ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

ATTI

DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

VOL. VIII.

NAPOLI

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FIS. E MAT.

DIRETTA DA MICHELE DE RUBERTIS

1879

SOCI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Presidente — **DE GASPARIS ANNIBALE**
Vice-Presidente — **COSTA ACHILLE**
Segretario — **SCACCHI ARCANGELO**
Tesoriere — **FERGOLA EMMANUELE**

SOCII ORDINARII

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

Socii Residenti

1. Albini Giuseppe; 11 giugno 1868.

2. Cesati Vincenzo; 1° agosto 1868.

3. Costa Achille; 24 settembre 1861.

4. De Luca Sebastiano; 19 novembre 1861.

5. De Martini Antonio; 24 settembre 1861.

6. Govi Gilberto; 12 luglio 1879.

7. Guiscardi Guglielmo; 24 settembre 1861.

8. Nicolucci Giustiniano; 24 settembre 1861.

9. Palmieri Luigi; 19 novembre 1861.

10. Pasquale Giuseppe Antonio; 2 marzo 1867.

11. Scacchi Arcangelo; 24 settembre 1861.

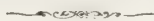
12. . . . .

Socii non residenti

13. Cannizzaro Stanislao; 10 febbraio 1872.

14. Meneghini Giuseppe; 13 aprile 1869.

15. Sella Quintino; 16 dicembre 1862.

16. . . . .

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

Socii residenti

17. Battaglini Giuseppe; 19 novembre 1861.

18. De Gasparis Annibale; 14 settembre 1861.

19. Fergola Emmanuele; 16 novembre 1861.

20. Padula Fortunato; 24 settembre 1861.

21. Trudi Nicola; 19 novembre 1861.

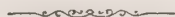
22. . . . .

Socii non residenti

23. Brioschi Francesco; 3 maggio 1864.

24. Bellavitis Giusto; 11 gennaio 1879.

SOCII STRANIERI

1. Bunsen Roberto; 9 aprile 1870.
2. Cayley Arturo; 3 maggio 1864.
3. Chasles Michele; 3 maggio 1864.
4. Dumas Giovan Battista; 3 maggio 1864.
5. Helmholtz Ermanno; 9 aprile 1870.
6. Owen Riccardo; 9 aprile 1870.
7. Sylvester G. G.; 3 maggio 1864.
8. . . . .

SOCII CORRISPONDENTI NAZIONALI

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

1. Cantoni Giovanni; 30 dicembre 1865.
2. Cornalia Emilio; 8 giugno 1867.
3. Ercolani Giov. Battista; 11 marzo 1876.
4. Gemmellaro Gaetano Giorgio; 8 dicembre 1877.
5. Licopoli Gaetano, 12 ottobre 1872.
6. Pacini Filippo; 3 marzo 1863.
7. Palmeri Paride; 10 dicembre 1870.

8. Pedicino Nicola; 10 dicembre 1870.

9. Seguenza Giuseppe; 12 ottobre 1872.

10. Stoppani Antonio; 3 marzo 1863.

11. . . . .

12. . . . .

13. . . . .

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

14. Beltrami Eugenio; 1° dicembre 1877.

15. Betti Errico; 13 gennaio 1863.

16. Cremona Luigi; 9 maggio 1865.

17. Genocchi Angelo; 9 maggio 1865.

18. Rubini Raffaele: 9 maggio 1865.

19. Schiaparelli Giovanni, 12 febbraio 1876.

20. . . . .

Indice delle Materie

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

INTORNO AD ALCUNI PUNTI DI ANALISI DIPENDENTI DALLA PARTIZIONE DEI NUMERI

MEMORIA

del Socio Ordinario NICOLA TRUDI

Letta nell'Adunanza del dì 8 dicembre 1877.

> . . . partitions constitute the sphere in which analysis lives, moves, and has its being; and no power of language can exaggerate or paint too forcibly the importance of this till recently almost neglected, but vast, subtle, and universally permeating element of algebraical thought and expression *).
>
> SYLVESTER, *Quarterly Journal*, vol. I, p. 144.

CAPITOLO I.

Notizie storiche e critiche intorno alla partizione de' numeri.

Nell'Algebra, e generalmente nell'Analisi, s'incontrano diversi punti, i quali presentano speciali difficoltà, e lasciano ancor molto a desiderare così dal lato teorico, che delle applicazioni. Questi punti, in genere, sono quelli, che si connettono in qualunque modo con la partizione de'numeri, e credo che valga la pena di studiare più accuratamente le difficoltà che li arrestano. Ora a me pare che si raggiunga completamente lo scopo mediante un algoritmo, interamente algebrico, che supplisce a tutto quello che può dipendere da partizione *lineare* di numeri, e che, alla proprietà di dare immediatamente gli sviluppi di formole connesse con partizioni, accoppia quella più notevole di costituire un principio di ricerca e di dimostrazione.

Intanto, siccome in seguito mi troverei obbligato a frequenti digressioni e note dichiarative in riguardo alla partizione de'numeri, teorica la quale ne'libri istituzionali, o è affatto trascurata, o vi è considerata da un punto di vista incompleto, così mi è sembrato più utile di raccogliere quelle note in un apposito Capitolo, il quale in tal modo offre un complesso di notizie storiche e critiche relative a queste importanti teoriche, le quali forse non saranno senza interesse pe'cultori della Scienza.

La partizione de'numeri dà origine a due specie di quistioni, di natura diversa, ed entrambe interessanti; si può, cioè, domandare: 1°, quante sono le partizioni di un dato numero sotto certe condizioni; e, 2°, si possono domandare le partizioni istesse. Queste due specie di quistioni, tra loro quasi indipendenti, hanno ciascuna una storia propria, e gioverà discorrerne partitamente.

*) « . . . Le partizioni costituiscono la sfera in cui l'analisi vive, si muove, ed ha il suo essere; nè vi è potenza di linguaggio « che possa esagerare o descrivere più efficacemente la importanza di questo concetto, il quale finora è stato quasi negletto, ma « che tuttavia non cessa di essere un elemento vasto, sottile ed universalmente penetrante di pensiero ed espressione algebrica ».

1.

Notizie intorno alla determinazione del numero delle partizioni.

Per ciò che riguarda le quistioni di questa natura, gli Scrittori di Algebra sogliono presso a poco riprodurre il Capo XVI, *De partitione numerorum*, del T. I della Introduzione all'analisi degl'infiniti di Eulero: Opera pubblicata la prima volta a Losanna nel 1748; ma sembra poco conosciuto che il grande Uomo sia ritornato più tardi sullo stesso argomento, nel T. III de' nuovi Commentari di Pietroburgo che risponde all'anno 1751, per corredarlo di più ampi sviluppi, e di una tavola molto più estesa di quella che si trova nell'opera citata. Ora questo nuovo lavoro di Eulero è preceduto da un sunto, in cui sono notati i miglioramenti apportati al primo: ed oltre a ciò vi è perfettamente delineata la natura e l'indole delle due specie di quistioni più sopra mentovate; ma questo sunto offre una particolarità importante per la storia della partizione de' numeri, poichè vi è narrata l'origine curiosissima delle prime ricerche di Eulero intorno a questa teoria: notizia che non si trova nella Introduzione. Trattandosi di una fonte, che non è sempre agevole di consultare, crediamo di far cosa grata a'lettori riproducendo qui testualmente il detto sunto.

« Problema de partitione numerorum Auctori quondam a Cl. Professore Bero-
« linensi Naudaeo fuit oblatum, qui pro casu speciali quaesiverat, quot variis modis
« numerus 50 in septem partes dispertiri possit. Problema hoc primo intuitu ita com-
« paratum videbatur, ut aliter nisi per inductionem resolvi non posset, quo fere modo
« pleraque problemata ad artem combinatoriam pertinentia resolvi solent. Qui scilicet
« eius solutionem suscipere velit, primo quaeret, quot variis modis quisque in duas partes
« discerpi possit, ubi quidem nullam difficultatem offendet; deinde procedet ad divisio-
« nem in tres partes, quod negotium etiam nunc satis commode succedet. In divisione in
« quatuor partes fortasse iam haerebit, neque statim perspiciet, quomodo numerus par-
« titionum cum numero partiendo increscat; inductione tamen fretus, et hanc progres-
« sionis legem divinabit. Quinque-partitio ipsi iam maiores creabit molestias, ac nisi
« omni circumspectione utatur, verendum est, ne inductioni, utcunque certa ipsi vi-
« deatur, nimis confidens in errorem inducatur. Quod eo magis est pertimescendum in
« partitione in plures partes; uti etiam ipse problematis Auctor fuit seductus, et pro
« casu proposito in divisione numeri 50 in septem partes, post taediosissimos calculos
« enormiter a veritate aberravit; neque etiam alii insignes Mathematici hac via ince-
« dentes ab errore se vendicare valuerunt. Qui autem actu omnes partitiones dinume-
« rare voluerit, non solum in immensum laborem se immergit, sed omni etiam atten-
« tione adhibita vix carebit ne turpiter decipiatur. Cum igitur hoc problema tam insi-
« gne specimen contineat quam parum inductioni vel maxime confirmatae sit fidendum,
« eo pluris est aestimandum Auctoris studium, quo certa methodo solutionem istius
« problematis investigavit, cum vix ulla alia via praeter inductionem ad eam patere
« videatur.

« Nihil igitur inductioni tribuens Auctor ex certissimis Analyseos principiis eius-
« modi formulas hausit, quae pro quocunque numero proposito statim ostendunt, quot
« variis modis is in tot, quot lubuerit, partes dividi possit, ita ut etiam circum maxi-

« mos numeros nullum dubium superesse queat. Problema autem hic geminum tractat,
« quorum altero quaeritur, quot modis datus numerus in tot partes inequales tantum,
« quot requiruntur, dissecari possit; in altero vero partium aequalitas non excluditur.
« Ita in exemplo initio memorato invenit numerum 50 omnino 522 modis in septem
« partes inter se inequales distribui posse; aequalitate autem partium non exclusa, nu-
« merum partitionum omnium esse 8946, qui ergo numerus quaestioni primum propo-
« sitae satisfacit.

« Pluribus aliis modis problema variari potest, dum scilicet singulae partes datae
« indolis esse iubentur, veluti numeri impares, vel quadrati, vel termini progres-
« sionis geometricae duplae, etc., partium numero vel praescripto, vel secus: Auctoris
« autem methodus aeque patet ad omnia huiusmodi problemata solvenda.

« Subiungit denique Auctor tabulam satis amplam, ex qua responsiones ad ple-
« rasque huius generis quaestionis sine ullo labore depromere licet; quae multo lon-
« gius est continuata, quam in Auctoris Introductione in Analysin, ubi idem argumen-
« tum iam tractaverat, hic autem studiosius expolivit. Caeterum haec Dissertatio re-
« ferta est plurimis tam egregiis artificiis, quam novis et notatu dignis observationibus
« circa naturam serierum, unde eius usus multo latius patere videtur: neque ullum
« est dubium, quin ex eodem fonte plurima alia argumenta felicissimo cum successu
« expediri queant ».

Passerò ora rapidamente in rassegna le investigazioni fatte sullo stesso argomento da illustri Analisti posteriori ad Eulero, i quali specialmente hanno rivolto lo studio alla ricerca de'termini generali delle serie, che entrano nelle quistioni di cui si tratta. E primo s'incontra il nostro Paoli, il quale, vivente ancora Eulero, nel secondo de' suoi opuscoli pubblicati in latino (Petri Paoli Liburnensis *Opuscula Analytica*, Liburni 1780) ha cercato di ridurre questi problemi alla integrazione di equazioni a differenze finite e parziali; ma Egli ritorna più tardi sullo stesso argomento, con maggiori sviluppi, nel T. II. delle memorie della Società Italiana delle Scienze (pag. 787).

Viene in seguito il Malfatti, il quale nel T. III della stessa raccolta in una memoria sulle serie ricorrenti (pag. 571), studia accuratamente le medesime quistioni. Sono però degne di nota le sue osservazioni circa i risultamenti del Paoli, poichè dimostra che le espressioni date da questo Geometra come termini generali sono lungi dall'avere i caratteri, che competono a questi termini. Per tanto è debito di giustizia il riconoscere che il Malfatti è stato il primo a porre in evidenza la vera natura e l'indole de'termini generali delle serie che s'incontrano in questo argomento, avendoli fatto dipendere dalla decomposizione delle funzioni fratte razionali in frazioni più semplici, e dalle proprietà delle radici primitive delle equazioni binomie, che sono gli elementi di quelle serie. Aggiunge il Malfatti che Egli aveva già pubblicato due altre note sullo stesso soggetto; la prima nel *Prodromo della Enciclopedia Italiana*, e la seconda nel n.° XI dell'*Antologia Romana* per l'anno 1784, ma non è stato possibile di riscontrar queste opere, che mancano in tutte le nostre Biblioteche.

In tempi più vicini la quistione è stata ripigliata da uomini insigni, e segnatamente da Cayley, Herschell, Kirkmann, Sylvester, e Bellavitis. Io non entrerò in altri particolari intorno a questi recenti lavori, che ormai sono a conoscenza di tutti; ma non posso dispensarmi dal far notare che la soluzione del Malfatti, or ora menzionata, coincide nel fondo con quella data del Cayley, la quale però si distingue per quella sveltezza ed ele-

ganza, che caratterizza tutto ciò che sorte dalla penna di questo eminente Geometra; il quale inoltre ha messo in luce l'alta importanza della partizione de' numeri nella teoria delle forme. Bisogna del resto riconoscere che la migliore e la più compiuta soluzione della quistione, di cui si tratta, è quella contenuta nel magnifico teorema annunciato dal Sylvester nel *Quartely Journal* (Vol. I, pag. 141), perciocchè esso dà quasi la rappresentazione analitica generale del numero delle partizioni; teorema del quale furono date elegantissime dimostrazioni dal Brioschi nel T. 8° degli Annali di Scienze matematiche e fisiche del Tortolini, e dal Battaglini, negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, pel 1857; ed un'altra dimostrazione ne fu data da me stesso in una memoria pubblicata negli Atti medesimi, nel 1865, nella quale mi proposi di rendere quel teorema indipendente al più possibile da ulteriori sviluppi analitici, e ridurlo ad essere immediatamente applicabile a' casi numerici.

È mestieri da ultimo di segnalare le recenti ricerche sulla partizione de' numeri del ch. Prof. Marsano nell' opera pubblicata a Genova nel 1870, dal titolo: *Sulla legge delle derivate generali delle funzioni di funzioni, e sulla teoria delle forme di partizione de' numeri interi*. L'Autore dà a queste materie un nuovo indirizzo; ed i giovani studiosi, che desiderano di approfondire siffatte teorie, consulteranno con vantaggio l'opera rimarchevole del modesto e dotto Professore.

2.

Notizie intorno alla ricerca effettiva delle partizioni.

Si sa che importanti teoriche di algebra ordinaria e di analisi superiore finiscono per dipendere da partizione di numeri; e basterebbe di ricordare: lo sviluppo delle potenze delle funzioni intere: le somme delle potenze simili delle radici delle equazioni: le funzioni simmetriche: le serie ricorrenti: le forme generiche degl' invarianti e covarianti: le derivate d'ordine qualunque delle funzioni di funzioni, ecc. ecc.

Per esempio, indicando A_n il coefficiente di x^n nello sviluppo di $(1+a_1x+a_2x^2+\ldots)^m$, si ha *).

$$A_n = \sum g\,!\,(m)_g \frac{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1\,!\,\varepsilon_2\,!\ldots\varepsilon_n\,!} \qquad (1)$$

dove il Σ si estende a tutte le soluzioni intere e positive o nulle dell' equazione indeterminata:

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \ldots + n\varepsilon_n = n\,, \qquad (2)$$

*) Adopero la notazione comune $n!$ per significare il fattoriale di un numero intero n, vale a dire il prodotto de' numeri naturali da 1 ad n, di modo che si ha $n! = 1.2,3\ldots n$; e questa notazione importa $o! = 1$. Uso inoltre, come al solito, il simbolo $(n)_r$ per significare il coefficiente binomiale di rango r relativo all' esponente n; così si ha in generale:

$$(n)_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}\,,$$

ed in particolare $(n)_o = (n)_n = 1$. È bene di tener presente che, se n è intero e positivo, si ha $(n)_r = (n)_{n-r}$.

Un' osservazione intorno a queste notazioni non è forse inopportuna. Sono due grandi Maestri quelli da' quali vennero la prima volta adoperate: la prima da Kramp, l'altra da Cauchy; esse d'altronde nulla hanno di strano, e sono di uso abbastanza facile e comodo; così io non veggo una ragione al mondo perchè si debbano sostituire con altre notazioni, che certamente non si raccomandano nè per maggiore semplicità, nè per l' autorità dell' origine.

e dov' è messo per compendio

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n = g\,.$$

Ora la risoluzione della equazione indeterminata (2) con le condizioni prescritte coincide appunto con la ricerca di tutte le partizioni del numero n in parti uguali o disuguali.

Ancora, chiamando s_n la somma delle potenze simili delle radici dell'equazione:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0\,, \tag{3}$$

si ha la formola ben nota di Waring:

$$s_n = n \sum (-1)^g (g-1)!\, \frac{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!}\,, \tag{4}$$

il $\sum$ e g avendo i medesimi significati di poc'anzi.

E, reciprocamente, per un coefficiente qualunque a_n della stessa equazione, espresso in funzione delle somme s, si ha la formola egualmente conosciuta

$$a_n = \sum \frac{(-1)^g}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\varepsilon_2} \ldots \left(\frac{s_n}{n}\right)^{\varepsilon_n}, \tag{5}$$

nella quale il $\sum$ e g hanno sempre il significato superiore.

Bisogna attualmente osservare che formole, della natura di quelle ricordate, non risolvono già immediatamente le quistioni, cui si rapportano, ma esigono ulteriori sviluppi, dipendenti dalla partizione de' numeri. Ora ne' libri istituzionali si cercherebbe invano una parola intorno a questo soggetto; anzi è opinione generalmente invalsa che non s'abbiano all'uopo metodi diretti; ed autorevoli scrittori, tra quali il Todhunter, non esitano esplicitamente ad affermare che bisogna ricorrere a *tentativi;* il che equivale a dichiarare quelle formole poco meno che inutili. In effetti, facendo ancora astrazione dalla incertezza a riguardo della totalità delle partizioni da cercarsi per tentativi, è chiaro che questo mezzo, praticabile appena ne' più semplici casi numerici, sarebbe impossibile per numeri elevati o indeterminati; inoltre resterebbe sempre il còmpito fastidioso di dedurre dalle partizioni i termini degli sviluppi delle formole, alle quali appartengono; ed in fin de' conti si avrebbe un'accozzaglia disordinata di termini, non regolati da veruna legge, distruggendosi così in quelle formole ogni carattere di termine generale. È conseguenza naturale di ciò che le formole, di cui si tratta, finiscono per rimanere abbandonate, con grave scapito del progresso dell'analisi.

È già più tempo che, occupandomi di ricerche connesse con siffatto argomento, io ebbi a rivolgere l'attenzione alle difficoltà messe in evidenza; ma non tardai a riconoscere che sarebbero completamente eliminate, introducendo nell'algoritmo algebrico la nozione, ormai comune, del *peso* e dell' *isobarismo;* tenendo presente che, in rapporto agli elementi letterali a_1, a_2, a_3, ... contenuti nelle formole anzidette, lo sviluppo di ciascuna è un polinomio costituito da termini di egual peso.

Svolgendo questo concetto fui subito condotto ad un algoritmo semplicissimo, che in effetti toglie di mezzo le difficoltà segnalate, poichè dà direttamente tutt' i termini

del mentovato polinomio, senza calcolo di sorta, e senza più dipendere da partizione di numeri o da risoluzione di equazioni indeterminate; le quali cose al contrario sono immediata conseguenza di quell'algoritmo, che dirò *algoritmo isobarico*. I principî fondamentali di questa teorica vennero da me già esposti in un articolo sullo sviluppo delle funzioni isobariche nel Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane, e che fa appendice ad una memoria del Prof. Gambardella intorno a'coefficienti delle facoltà analitiche (v. XI, p. 86; e v. XII, p. 110); la stampa di questo articolo era già corsa fino alle applicazioni, ma fui costretto ad arrestarne la pubblicazione, sia perchè nuove ed importanti proprietà, che si venivano svolgendo, consigliavano a darle un altro indirizzo, e sia per le ragioni di altra natura, che or vengo a dichiarare.

Si è qui sopra accennato alla opinione generalmente invalsa che non si abbiano metodi diretti per la partizione de' numeri, ed io stesso poco ponderatamente l'ho ripetuta nell'articolo citato intorno alle funzioni isobariche. Ma questa opinione è lontana dal vero; e giustizia vuole che un punto così importante per la storia della scienza sia convenevolmente rischiarato. I matematici Italiani saranno sorpresi, e dolenti ad un tempo, di aver ignorato che un illustre Matematico italiano, verso la metà dello scorso secolo, fu il primo a dare una conveniente risoluzione della quistione di cui trattasi.

Occorre di premettere che, mentre io attendeva ad ordinare un lavoro intorno all'algoritmo del quale ho fatto porola, avendo avuto occasione da dover meglio approfondire le ricerche del Paoli sulla determinazione del numero delle partizioni, che altra volta avea fugacemente percorso, ebbi a riconoscere che Egli fonda le sue ricerche sopra una certa maniera di decomporre un dato numero n in m parti uguali o disuguali, che però non dichiara esplicitamente, ritenendola forse evidente; ed in effetti lo diviene dopo poca riflessione (V. la pag. 52 de' detti opuscoli, ove sono riportate le partizioni del numero 7, e la pag. 49, come la pag. 817 del citato T. II delle memorie della Soc. Ital., le quali contengono i quadri generali delle partizioni per n ed m indeterminati). Ora è singolare che questa maniera di decomposizione del Paoli conduce a risultamenti i quali coincidono con quelli nascenti dal metodo algebrico, che io darò per risolvere una quistione analoga: metodo che non dipende da induzione, ma da principî rigorosamente stabiliti, e sotto forma così diversa da non potersi ravvisare la coincidenza a prima giunta.

Nel tempo istesso riscontrando ad altro fine il Dizionario delle Scienze Matematiche del Montferrier, all'art. *Serie* n.° 23, ebbi a trovare la notizia dell'esistenza di una regola di Hindenburg per decomporre un numero n in m parti uguali o disuguali; ora bastava anche il solo nome dell'Autore per mettermi sull'avviso, essendo ben noto che questo Geometra Tedesco fu il più zelante promotore dell'analisi combinatoria, e si sa che i processi di quest'analisi sono appunto fondati sulla partizione de' numeri. Quantunque per le citazioni del Lacroix io avessi desiderato, fin dalla mia prima gioventù, informazioni più precise intorno a'lavori dell'Hindenburg, pure non mi fu mai concesso di aver sott'occhio alcuna delle sue opere, mancando assolutamente nelle nostre Biblioteche, così pubbliche che private. Fui quindi obbligato di domandarle all'Estero, e le prime ricerche riuscirono ancora infruttuose; ma finalmente mi venne fatto di ricevere da Lipsia un'opera dal titolo seguente: *Sammlung combinatorisch-analyti-*

scher Abhandlungen, herausgegeben von CARL FRIEDRICH HINDENBURG — Leipzig, 1796, 1800: opera la quale contiene una raccolta di memorie di distinti matematici di quell'epoca, KRAMP, PFAFF, KLÜGEL, TETENS, HAUBER, TREMBLEY, e dello stesso HINDENBURG, dirette a rischiarare, a commentare, ed a promuovere l'analisi combinatoria.

Questo libro offre quanto basta per formarsi un concetto dell'analisi combinatoria e conferma che la quistione della partizione era in effetti risoluta da HINDENBURG, che ne ha dato due diverse soluzioni, ricordate in un articolo del KLÜGEL, dove sono accompagnate da una notizia, che non poteva non sorprendermi, cioè che la quistione era stata diversamente risoluta molto tempo prima, fin dal 1747, da un Geometra Italiano, il P. RUGGIERO BOSCOVICH *). Il KLÜGEL lo annuncia in questi termini: « Boscovich lehrte zuerst « 1747 in einem *Italienischen Journal* eine Methode alle Zerfällungen zu finden (Arch. « der Math. IV Heft, S. 402). Ohne diese zu kennen, trug her Prof. HINDENBURG seine « von jener ganz verschiedene, Auflösung der Aufgabe von der Zerfällung der Zahlen « in einer akademischen Schrift vor: *Methodus nova et facilis serierum infinitarum « exhibendi dignitates,* Lips. 1778; und hernach in einer ausführlichen Schrift: *Infini- « tinomii dignitatum historia, leges, ac formulae*, Gottingae 1779. Eine zweite Auflö- « sung hat derselbe in einem akademischen Programm (1795) mitgetheilt, etc. etc. ». Il KLÜGEL non dà alcuna indicazione sulle tre soluzioni, ma nel fine di paragonarle prende ad esempio il numero 7, e mette semplicemente sotto gli occhi de' lettori i tre sistemi di partizioni del detto numero, come risultano da quelle soluzioni. Ora, senza fermarmi alla seconda soluzione di HINDENBURG, che a me pare di poco interesse, mi limiterò a riprodurre i due sistemi di partizioni di 7, come sono dati dal KLÜGEL, rispondenti alla soluzione del BOSCOVICH ed alla prima soluzione di HINDENBURG. Essi sono i seguenti:

Secondo BOSCOVICH **)	Secondo HINDENBURG
1,1,1,1,1,1,1	7
1,1,1,1,1,2	1,6
1,1,1,2,2	2,5
1,2,2,2	3,4
1,1,1,1,3	1,1,5
1,1,2,3	1,2,4
2,2,3	1,3,3
1,3,3	2,2,3
1,1,1,4	1,1,1,4
1,2,4	1,1,2,3
3,4	1,2,2,2
1,1,5	1,1,1,1,3
2,5	1,1,1,2,2
1,6	1,1,1,1,1,2
7	1,1,1,1,1,1,1

*) Nativo di Ragusa, ma italiano per lingua, ed ha occupato uffici di pubblico Professore a Roma, a Pavia, ed a Milano.

**) Per maggior chiarezza in questo primo esempio le diverse parti delle partizioni sono state separate da virgole, ma in prosieguo per semplicità saranno soppresse, il che non può indurre in equivoci.

Dal confronto de' due sistemi il Klügel ha creduto di conchiudere per la prevalenza della soluzione *) dell' Hindenburg su quella del Boscovich; ma si vedrà a suo luogo che questa conchiusione non ha fondamento, ed è ben lungi dall'essere esatta.

Intanto i due specchietti, che precedono, mancando di ogni sorta di indicazioni, nulla mi avrebbero appreso riguardo alla natura delle soluzioni, da cui derivano, se non mi avesse colpito il fatto di ravvisare nell'uno e nell'altro i medesimi sistemi di partizione come risultano dal mio algoritmo isobarico; sicchè divennero per me indispensabili ulteriori investigazioni intorno alle soluzioni del Boscovich e dell' Hindenburg.

Ora richiamando la citazione del Klügel a riguardo del Boscovich, riportata più sopra, si osserverà che le parole *Italienischen Journal* sono seguíte dalla parentesi (Arch. der Math. etc.), il che naturalmente induce a credere trattarsi di un giornale Italiano col nome di *Archivio di matematiche;* ma le ricerche intorno a questo Archivio nelle nostre Biblioteche furono, com'esser dovea **), infruttuose; nè sorte migliore ebbe il riscontro minuzioso delle opere del Boscovich, che io possedeva. Fui quindi obbligato di rivolgermi ad amici dottissimi nella letteratura matematica; e finalmente da indicazioni somministrate da' ch. Professori Genocchi e Siacci da Torino, e dal Cremona da Roma, fu messo in chiaro che le ricerche del Boscovich fossero contenute nel *Giornale de' Letterati*, che a quell'epoca pubblicavasi in Roma. Ed in effetti in due volumi rispondenti agli anni 1747 e 1748 si trovano tre interessanti dissertazioni del Boscovich sul *metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza,* la prima nel vol. pel 1747, e le altre due in quello del 1748; e credo che valga la pena di darne un rapido sunto.

Nella prima l'Autore si occupa specialmente della quistione accennata dal titolo, e ne fa dipendere la soluzione da partizione di numeri; essa dimostra che il Boscovich sia stato il primo che abbia posto nettamente questa quistione di partizione, e ne abbia dato una soluzione soddisfacente per le applicazioni analitiche. Non essendo agevole di consultare il Giornale de'Letterati, io credo di far cosa grata al Lettore riportando qui testualmente la parte del lavoro di Boscovich, che si rapporta a siffatta quistione, e che è concepita ne' seguenti termini : « Prima però mi conviene sciogliere un altro problema, che a pri- « ma vista pare inutile, e pure nella presente materia fa tutto il gioco. Il problema è « il seguente: *Trovare tutte le maniere nelle quali un numero dato possa dividersi in parti,* « *che contengono numeri interi, intendendo sotto nome di numero anche l'unità, e sotto no-* « *me di divisione, anche una divisione immaginaria, che si faccia pigliando lo stesso nu-* « *mero intero considerato come parte unica e totale di se stesso;* o quello che è lo stesso : « *Trovare tutte le maniere, nelle quali un numero dato possa esser formato di parti,* « *che contengono numeri interi.* Questo problema si scioglie facilissimamente così. Si

*) Le parole *preminenza di soluzione* hanno bisogno di un chiarimento. La soluzione di una quistione di partizione dev'esser dotata di alcuni indispensabili requisiti. 1° Non deve dipendere dalla induzione temuta da Eulero, ma validamente dimostrata. 2° Deve concretarsi in una legge generale semplice e ben definita per la deduzione delle partizioni; chè in fin de' conti è questa legge che più di tutto interessa nelle applicazioni, anzichè il complesso delle stesse partizioni. 3° L'ordinamento delle partizioni dev'esser quello che può meglio convenire alle applicazioni; e ciò costituisce un punto essenziale della teoria; ma siccome quest'ordinamento può rispondere a diversi punti di vista, così sarà sempre vantaggioso di avere a disposizione più di una regola per risolvere una medesima quistione. 4° In fine la soluzione di cui si tratta tanto più sarà pregevole in quanto che sarà applicabile ad un maggior numero di casi particolari. La importanza di queste indicazioni generali sarà meglio valutata in prosieguo.

**) In effetti, proseguendo la lettura del libro, dalle continue citazioni di questo Archivio ho potuto assicurarmi trattarsi di un giornale tedesco di Matematiche a quell'epoca, a quanto pare, diretto e fondato dallo stesso Hindenburg ; ma questo giornale è anche ignorato nelle nostre Biblioteche.

« scrivano prima in una riga tante unità, quante ne contiene il numero dato. Indi nella « riga seconda si scriva in ultimo un binario, e innanzi tante unità quante ne riman-« gono a compiere detto numero. Di poi nella terza riga si mettano al fine due binarî « con le unità residue innanzi; nella quarta riga tre binarî con le unità residue innanzi; « e così di seguito fin che si può. Finiti tutt'i binarî possibili si metta in una nuova ri-« ga al fine un ternario con le unità residue innanzi; nella seguente un ternario con un « binario ed unità residue; indi un ternario con due binarî ed unità residue; e così in « poi fin che si può. Si passi poi a due ternarî con le unità, indi co' binarî, con lo stesso « ordine; e così appresso a tre ternarî, a quattro, a cinque, fin che si può. Esauriti i « ternarî, si passi a' quaternarî, combinando prima un quaternario con tutte le prece-« denti combinazioni; poi due quaternarî, tre quaternarî, ecc.; e così per ordine an-« dando a' quinarî, a' senarî, ecc., finchè si arrivi al numero dato, che rimarrà solo « parte unica di se medesimo ».

La regola, come vedesi, è semplice e chiara; ma il Lettore la seguirà meglio tenendo sott'occhio il primo de' due specchietti superiori. Il Boscovich non ne dà dimostrazione perchè la ritiene evidente; ma a tal riguardo basterà osservare che questa regola, quantunque apparisca diversa da quella, che io darò più innanzi, e che risulta rigorosamente da principî algebrici, pure nel fondo le due regole coincidono e conducono a' medesimi risultamenti; ond'è che la coincidenza notata più sopra a riguardo delle partizioni del numero 7 è realmente un fatto generale.

Nella seconda dissertazione il Boscovich deduce diversi teoremi dal metodo che Egli dà per elevare un infinitinomio a qualunque potenza; dimostra come da un termine già calcolato si possa dedurre il seguente, e risolve altre quistioni affini.

Finalmente nella terza dissertazione Egli mette a confronto il suo metodo con quello dato da Moivre, prima nelle *Transazioni filosofiche* in giugno 1697, e poscia, con diverse modifiche, nelle sue *Miscellanea analytica*, pubblicate a Londra nel 1730. Da questo confronto rileva il Boscovich che il suo metodo e quello di Moivre sono quasi fondati su' medesimi principî, ma che quello di Moivre rimane incompleto per non esservi risoluta la quistione della partizione.

Ma oltre a ciò in questa terza dissertazione il Boscovich fa notare che la regola di partizione, da lui data, soddisfa a due condizioni capitali e della maggiore importanza per la teoria e per le applicazioni. Bisogna premettere che, parlandosi di partizioni di un dato numero n, senza altre dichiarazioni, si allude ordinariamente a tutte le maniere nelle quali è possibile di decomporre il numero n in parti, uguali o disuguali, ed in conseguenza comprese nella serie $1, 2, 3, \ldots, n$; ma spesso si domandano, non tutte queste partizioni, ma quelle soltanto che contengono parti non superiori ad un dato numero m minore di n, e perciò uguali ad $1, 2, 3, \ldots, m$. Ora la regola del Boscovich risponde direttamente ed immediatamente a questa quistione, poichè non si ha che ad arrestarla alla introduzione della più grande delle parti, cioè ad m, ed esaurirla come nella regola è prescritto. Per esempio, se si domandassero le partizioni di 7 in parti non maggiori di 3, il primo de' due specchietti si arresterebbe all'ultima partizione della terza sezione, vale a dire ad 1 3 3.

Più generalmente si possono domandare le sole partizioni del dato numero n, le quali contengano parti assegnate qualunque; e la regola risponde ancora direttamente a questa domanda, poichè basta impiegarvi le sole parti assegnate. Per esempio, cer-

cando le partizione di 12 nelle parti 1, 3, 5, la regola dà subito le nove seguenti partizioni:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 5
1 1 1 1 1 1 1 1 1 3	1 1 1 1 3 5
1 1 1 1 1 1 3 3	1 3 3 5
1 1 1 3 3 3	1 1 5 5.
3 3 3 3	

Queste proprietà si trovano egualmente nel metodo da me dato nell'articolo citato sullo sviluppo delle funzioni isobariche, ma si vedrà più innanzi che il sistema di partizioni nascente dalla regola del Boscovich o dal mio algoritmo isobarico è ancora dotato di altre notabilissime proprietà.

Tuttavolta osservo che nella seconda delle due proprietà precedenti è quasi tacitamente supposto che, tra le parti assegnate, nelle quali si vuol dividere il numero n, non manchi la parte 1, che veramente è il caso ordinario delle applicazioni; ma, se manca questa parte, la regola esige delle attenzioni, che le fanno perdere la sua semplicità. Del resto allora si rientra nel caso il più generale del problema della partizione lineare de' numeri, del quale ho dato una soluzione nell'articolo ricordato.

Il Boscovich ha ancora considerato e risoluto il problema sul quale il Paoli ha fondato le sue ricerche sulla partizione de' numeri, vale a dire quello in cui si domandano tutte le maniere nelle quali un dato numero n può essere decomposto in un numero assegnato m di parti, uguali o disuguali; ma mi dispenso dal riportare la sua soluzione, dovendo or ora far conoscere la regola molto più semplice e diretta data da Hindenburg per risolvere lo stesso problema, il quale è il cardine della prima delle due già mentovate soluzioni della quistione di partizione date da questo Geometra.

L'ultima dissertazione del Boscovich presenta un'altra notevole circostanza, ed è che Egli rivolse ancora la sua attenzione alle quistioni relative alla determinazione del numero delle partizioni. Nel § 22 della terza Egli dice: Qui rimarrebbe da sciogliere un altro problema, che però non è necessario per ritrovar la formola, e sarebbe: « *Dato un numero, trovare quante siano tutte le sue divisioni possibili in parti intere,* « *senza determinarle ad una ad una.* Od anche: *Quante siano le divisioni possibili, che* « *non abbiano parti maggiori di un dato numero.* Io ho tentato l'uno e l'altro di questi « problemi..., ed ho trovato varie maniere da facilitarne la soluzione;..., come pure « un metodo, con cui date le divisioni del numero t, si può da esse ricavare il numero « delle soluzioni di $t+1$, $t+2$, ecc. con formole particolari a ciascuno ». Ma, conchiude il Boscovich, di aver stimato di non dar conto di queste ricerche per non aver trovato una cosa generale e facile quanto avrebbe voluto.

Il volume del giornale de' letterati, che contiene la terza dissertazione del Boscovich, era pubblicato a Roma nel 1748, e nell'anno medesimo era pubblicata a Losanna la Introduzione all'analisi degl'infiniti; e quindi si verifica questa curiosa coincidenza che i problemi sulle partizioni posti e tentati da Boscovich nel 1748, venivano nello stesso anno posti ancora, e completamente risoluti da Eulero.

Vengo ora a discorrere della soluzione di Hindenburg del problema in cui si domandano tutte le partizioni di un dato numero n, e che dà origine al secondo de' due sistemi di partizioni del numero 7 più sopra considerati. Io già dissi che nel *Sammlung*

questa soluzione non è dichiarata; ma ulteriori indagini mi fecero avvertito che molto materiale relativo a quistioni di tal natura ed all'analisi combinatoria dovesse trovarsi nell'*Analyse des réfractions astronomiques et terrestres* di Kramp, come pure ne' suoi *Élémens d'Arithmètique Universelle* e nelle *Disquisitiones Analyticae* di Pfaff. Mi era già nota la mancanza nelle Biblioteche della classica opera del Kramp, *Analyse* etc., perchè da più tempo aveva inutilmente cercato di consultarla; ma nella seconda si trova perfettamente dichiarata la regola di Hindenburg per risolvere il detto problema, e nelle *Disquisitiones* di Pfaff si trovano inoltre ampî comenti intorno a questa ed ad altre soluzioni di Hindenburg. Le quali vi son pure messe a confronto con la soluzione di Boscovich, che ivi è attentamente considerata; e questo confronto porta l'Autore a confermare l'opinione del Klügel circa la preminenza delle soluzioni di Hindenburg; ma si vedrà or ora irrecusabilmente che l'uno e l'altro si sono ingannati.

L'Hindenburg non considera direttamente la quistione della ricerca del completo sistema di partizioni di un dato numero n; egli invece le distribuisce in classi, comprendendo in una medesima classe tutte quelle che contengono uno stesso numero di parti; cioè nella 1^a classe quelle formate di una parte (cioè lo stesso numero dato n), nella 2^a quelle di due parti; nella 3^a quelle di tre parti; ecc. ecc.; e quindi si propone: *la ricerca di tutte le partizioni della classe* m^{esima}, vale a dire di: *Trovare tutte le maniere nelle quali un dato numero* n *può essere decomposto in un numero assegnato* m *di parti, uguali o disuguali.* Ora ecco la soluzione di Hindenburg come è esposta dal Kramp al § 339 dell'opera citata: « Proporre, egli dice, le due equazioni indeterminate

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \ldots = n$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots = m$$

« equivale a domandare tutte le maniere differenti nelle quali il numero n può risul-
« tare per via di addizione da m numeri più piccoli, ma interi e positivi; o, ciò che
« torna allo stesso, essere decomposto in m parti, uguali o disuguali. Noi andiamo a
« trascrivere qui la soluzione che Hindenburg ha dato di questo problema essenziale.

« Si scriverà l'unità $m-1$ volte di seguito, ed in ultimo luogo il numero $n-(m-1)$,
« ciò che forma la partizione *iniziate* (V. l'esempio a fianco, il quale si rapporta alla
« decomposizione del numero 10 in quattro parti). Percorrendo in seguito i
« numeri di questa partizione iniziale *da dritta a sinistra*, e valga lo stesso
« per le partizioni seguenti, bisognerà arrestarsi in ciascuna a quello che
« primo si trova inferiore di *due unità almeno* all'ultimo numero a dritta;
» si aumenterà di 1 il numero al quale si è arrestati, e rimanendo inalte-
« rati tutti quelli che si trovano alla sua sinistra, si rimpiazzeranno con que-
« sto stesso numero, così aumentato di 1, tutti quelli che sono alla sua drit-
« ta, eccetto però l'ultimo, in luogo del quale bisogna mettere ogni volta
« il complemento degli altri al dato numero n, vale a dire ciò che bisogna
« aggiungere alla loro somma per ritrovare il numero n.

1 1 1 7
1 1 2 6
1 1 3 5
1 1 4 4
1 2 2 5
1 2 3 4
1 3 3 3
2 2 2 4
2 2 3 3

« Con questa regola si passa facilmente da una partizione all'altra, e l'ultima sarà
« quella alla quale la regola non può più essere applicata; vale a dire quella in cui
« non si trova più alcun numero, il quale differisca dall'ultimo di *almeno* due unità ».

★

Si vede adunque che la quistione è egregiamente risoluta, e la regola non potrebbe essere più semplice; ed è poi chiaro che essa conduce immediatamente al completo sistema delle partizioni del numero n, il quale risulta dal complesso de' sistemi di partizioni di tutte le classi: 1^a, 2^a, 3^a, ..., n^{ma}. Va inteso che nel sistema complessivo le classi debbano succedersi in ordine crescente, e che in ciascuna di esse le partizioni ritengano rigorosamente l'ordine istesso con cui nascono dalla regola precedente. Applicando queste norme alle partizioni del numero 7, si ottiene appunto il secondo de' due specchietti riportati più sopra per le partizioni di questo numero, l'uno secondo Boscovich, l'altro secondo Hindenburg, ed in tal modo essi restano perfettamente dichiarati.

Ma occorre di aggiungere che l'ordinamento delle partizioni secondo Hindenburg è fondato sopra un criterio, che giova di conoscere. L'Autore considera nella partizione un valor numerico, riguardandola come un numero le cui cifre sono le sue parti medesime; di modo che, per esempio, il valor numerico della partizione 1144 (o meglio $1 + 1 + 4 + 4$) sarebbe *mille cento quarantaquattro*. Posto ciò, secondo Hindenburg due o più partizioni si dicono *bene ordinate (rite ordinatae*, e nell'idioma tedesco *gut geordnet*) quando si succedono per valor numerico crescente; ed allora è evidente che nel suo sistema risultano *bene ordinate* così tutte le partizioni, come quelle di ciascuna classe. Si vedrà del resto che anche il sistema di Boscovich è guidato da un criterio dello stesso genere, ma assai più naturale e più proficuo.

Ho già fatto osservare che anche il Boscovich ha dato una soluzione del problema or ora considerato; la quale però non regge per semplicità a fronte di quella di Hindenburg. Ma la cosa è molto diversa quando si tratta del completo sistema di partizioni; e basterebbe ciò solo che il metodo di Hindenburg non è affatto applicabile ai casi particolari già notati a riguardo del metodo di Boscovich; di modo che in questi casi il primo de' due metodi obbliga generalmente alla ricerca di tutte le partizioni, per quindi escluderne quelle per le quali non si verificano le condizioni richieste. Tuttavolta non è questo ciò che mi fa tenere infondati i giudizî di Klügel e di Pfaff intorno alla preminenza del sistema di partizioni di Hindenburg su quello di Boscovich, poichè vi è ben altro. Io non fo quistione di preminenza; riconosco invece che ciascuno de' due sistemi è dotato di proprietà così speciali da rendersi entrambi indispensabili nella teoria della partizione de' numeri, come si mostrerà più innanzi, e quasi può dirsi, che si completano: ma il fatto importante sta in ciò, che tra' due sistemi esiste una mirabile corrispondenza, per la quale ciascuno di essi può essere immediatamente tramutato nell'altro. Hindenburg ha ben veduto i pregi del sistema di Boscovich, e si rileva dall'opera di Pfaff, che lo abbia studiato in tutt'i modi ed in tutt'i sensi, nel fine di cavarne le leggi per le quali ne poteva dipendere il proprio sistema; ma quella corrispondenza gli è sfuggita, e dovea sfuggirgli perchè mancante de' principii che mi permisero di scovrirla.

Ma qui richiamo l'attenzione intorno a certi memorabili fatti scientifici, che non debbono rimanere inosservati nella storia del progresso delle umane cognizioni; e sarà curioso ed interessante di veder venire il Cayley, a sua insaputa, giudice inappellabile tra' due sistemi di partizioni di Boscovich ed Hindenburg.

Si sa che qualunque funzione simmetrica delle radici di un' equazione si può esprimere linearmente per mezzo di combinazioni di coefficienti (cioè di prodotti

di questi coefficienti e di loro potenze); e che, reciprocamente, qualunque combinazione di coefficienti si può esprimere linearmente per mezzo di funzioni simmetriche. Nell'Algebra di Meier Hirsch, pubblicata nel 1810, si trovano calcolate, in dieci tavole, tutte le possibili funzioni simmetriche fino al 10mo grado, in termini di combinazioni di coefficienti; il Cayley ha completato questo lavoro, ed in una memoria inserita nelle *Transazioni filosofiche* (vol. 147, par. 1^a, pag. 489), riproduce le dieci tavole di Meier Hirsch, ed in altrettante tavole da lui calcolate dà le espressioni di tutte le possibili combinazioni di coefficienti, fino al peso 10, in termini di funzioni simmetriche *). Queste ricerche sono essenzialmente fondate sulla partizione de' numeri, e specialmente sull'ordinamento delle partizioni; ora, non appena quelle tavole mi vennero sott'occhio, fui colpito dalla circostanza singolare che ciascuna è fondata sopra un doppio ordinamento delle partizioni di uno stesso numero, uno per le combinazioni di coefficienti, l'altro per le funzioni simmetriche; coincidenti con quelli che risultano dal nostro algoritmo isobarico, e quindi anche co' sistemi di partizioni di Boscovich e di Hindenburg. Ma il Cayley, e ciò appare senza equivoci dalla sua stessa memoria, ha completamente ignorato e le ricerche di Boscovich e quelle di Hindenburg; invece le due maniere di ordinamento da lui adottate sono la conseguenza di due principî, che qui è necessario di porre in evidenza **).

Uno di questi principî è un criterio stabilito dal Cayley per dare un'ordinamento definito alle partizioni. Paragonando due partizioni. Egli considera come *anteriore* quella in cui è più piccola la parte maggiore, cioè l'ultima; e quando vi siano più parti eguali alla maggiore, la partizione anteriore è quella in cui il numero delle dette parti è più piccolo. Che se il numero di queste parti è lo stesso nelle due partizioni, basterà applicare i medesimi criterî alle parti prossimamente inferiori alle più grandi ecc. ecc. Per esempio, considerando le partizioni

1111233 , 22233 , 111234 , 12224 , 2244 , 1344 , 444 ,

si vede che ciascuna è anteriore alle seguenti, o posteriore alle precedenti. In altri termini può dirsi che ciascuna è di *rango inferiore* alle seguenti, o di *rango superiore* alle precedenti. In generale, trattandosi di partizioni, le quali abbiano comuni alcune delle ultime parti, la quistione di precedenza è decisa dalla parte che in ciascuna si trova immediatamente prima delle parti comuni; e la partizione di rango inferiore è sempre quella in cui la detta parte è più piccola.

Quando si abbiano presenti tutte le partizioni di un numero non è difficile di disporle in guisa che ne risulti un sistema ordinato per rango ascendente, ossia per modo che ciascuna riesca di rango superiore alle precedenti, ma allora, richiamando la regola del Boscovich, si riconoscerà senza più che un sistema di questa natura

*) Io non conosco l'Algebra di Meier Hirsch, e non è stato possibile di consultarla; la notizia delle sue ricerche è data nella memoria del Cayley; ma certamente non è Egli il primo che abbia concepito e costruito le tavole di funzioni simmetriche. Molto tempo prima queste tavole erano state calcolate da Vandermond, trovandosi pubblicate fin dal 1771 tra le Memorie dell' Accademia di Francia; e posseggo io stesso il volume che le contiene.

**) Un largo sunto di questa memoria del Cayley è dato nell'Opera del Fiedler, *Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen*, e vi sono riprodotte complessivamente tutte le tavole, così pe' valori delle combinazioni di coefficienti, che per quelli delle funzioni simmetriche.

è niente altro che quello dello stesso Boscovich; ed ecco spiegata la coincidenza tra questo sistema e quello adottato dal Cayley per le combinazioni di coefficienti nelle sue tavole più sopra ricordate. Il Cayley nulla dice intorno al metodo da lui seguíto per dedurre dal suo criterio le combinazioni di coefficienti ordinate nel modo dichiarato, e si limita a questa avvertenza: « It is to be noticed that the combinations taken in « order, from lest to right, are *not* in the order in which they would be obtained « by Arbogast's Method of Derivations from an operand a^x, a being ultimately re- « placed by unity ». Queste parole del Cayley dimostrano in modo assoluto ch'egli non avea alcuna notizia delle ricerche di Boscovich e di Hindenburg.

Non è superfluo di far notare che la nozione così semplice e naturale del rango nelle partizioni è della maggiore importanza e nella stessa teoria delle partizioni e per diverse quistioni di analisi, che ne dipendono; ed in particolare osserverò che senza questa nozione è pressochè impossibile una esposizione alla meglio completa della teoria delle funzioni simmetriche, come si vedrà nelle applicazioni.

L'altro principio impiegato dal Cayley consiste nella nozione delle partizioni *conjugate*, dovuta, come Egli afferma, a Sylvester o a Ferrers. Nel capitolo seguente questa nozione sarà convenientemente sviluppata e presentata sotto una forma più algebrica; ma qui è sufficiente di presentarla nella sua forma primitiva.

Immaginando una partizione qualunque A di un dato numero n, si decomponga ogni parte in semplici unità, e quindi le unità dovute a ciascuna parte si scrivano per ordine in altrettante linee verticali, ma in guisa da trovarsi anche orizzontalmente allineate (vedi l'esempio a fianco), ed a patto che nella linea orizzontale superiore si trovino tante unità quante sono le parti. Posto ciò, se si prendano le somme delle unità per verticali, è chiaro che si riproduce la partizione A; ma prendendo le somme per orizzontali, nascerà un'altra partizione B dello stesso numero n, in generale diversa da A, e che si dice *conjugata* di A. Se si cerca con lo stesso processo la conjugata di B, si ricade evidentemente nella partizione originaria A; ed è però che le partizioni A e B diconsi tra loro *conjugate*. Come si vede la ricerca della conjugata di una data partizione è molto facile; ma sarà dato a suo luogo un metodo per ottenerla immediatamente, senza decomporre le parti nelle loro unità.

A = 2245

1 1 1 1	4
1 1 1 1	4
1 1	2
1 1	2
1	1
2 2 4 5	

B = 12244

1 1 1 1 1	5
1 1 1 1	4
1 1	2
1 1	2
1 2 2 4 4	

Ho detto che nelle sue tavole il Cayley ha adottato un doppio ordinamento di partizioni; l'uno per le combinazioni di coefficienti, l'altro per le funzioni simmetriche; il primo gli risulta dalla nozione del rango, e coincide esattamente col sistema di Boscovich; ed ora aggiungo che il secondo è niente altro che il sistema conjugato del primo. Io dissi ancora che questo secondo sistema coincide col sistema di Hindenburg, ma lo dissi come un fatto che si verifica nelle tavole pe' sistemi di partizioni di tutt'i numeri da 1 a 10. Si trattava quindi di una induzione, che autorizzava a sospettare che la proposizione potesse esser vera in generale; e ad ogni modo era un argomento che meritava di essere approfondito. La quistione si riduceva evidentemente a provare che due partizioni di uno stesso numero e di egual posto nel sistema di Boscovich e nel sistema di Hindenburg fossero tra loro conjugate, e da principio si presentò difficile; ma una via finalmente mi fu aperta dall'algoritmo isobarico e dalla nozione del rango

nelle partizioni; e con questi aiuti fu possibile di mettere fuori ogni dubbio questa curiosa ed inattesa proprietà, cioè che: *I due sistemi di partizioni di uno stesso numero, di* Boscovich *e di* Hindenburg, *sono tra loro conjugati;* o, in altri termini: *I due sistemi di partizioni di uno stesso numero ordinati, l'uno per rango ascendente, l'altro per valor crescente delle partizioni, sonò tra loro conjugati.*

Cadono quindi assolutamente i giudizî di Klügel e di Pfaff intorno alla prevalenza dell'un sistema sull'altro; e basterebbe il solo fatto di essersi dovuto entrambi impiegar dal Cayley in una medesima quistione per riconoscere che entrambi hanno la loro speciale importanza, e si completano.

Mi resta a dare un cenno intorno alle ricerche, che formano il soggetto della presente memoria. Nel Capitolo II. espongo quello che ho chiamato *algoritmo isobarico,* essenzialmente fondato sulla rappresentazione degli elementi algebrici con una sola lettera variata con indici; l'uso di lettere diverse avrebbe reso la scrittura più semplice, ma a scapito grandissimo della chiarezza. Per esso divengono immediatamente sviluppabili le formole relative a quistioni analitiche dipendenti da partizione di numeri, e ciò senza più dipendere nè da partizioni nè da risoluzione di equazioni indeterminate.

Ma il Capitolo III. mostrerà che la importanza dell'algoritmo isobarico è molto più estesa, poichè costituisce un principio di ricerche e di dimostrazione, capace di ridurre difficili quistioni al massimo grado di semplicità. In questo Capitolo saranno esposte diverse proprietà dei polinomii isobarici, o più generalmente, delle funzioni isobariche; alcune di natura interamente elementare, altre di un ordine più elevato dipendenti dalla derivazione; e vi si troveranno diverse applicazioni. Tra queste figura la deduzione delle formole notate (3) e (4) a pag. 5; vale a dire quella di Waring per la somma delle potenze simili delle radici di un'equazione, espressa in termini de' coefficienti; e l'altra che serve inversamente ad esprimere un coefficiente qualunque in termini delle somme delle potenze simili delle radici. A me pare che il modo di deduzione di queste formole possa meritare una qualche attenzione, perchè fondato unicamente sulle note formole di Newton e sulle prime e più semplici nozioni dell' algoritmo isobarico; ond'è che ormai esse divengono accessibili a coloro che fanno nell' Algebra i primi passi [1]); e, ciò che più monta, si ha il mezzo di scrivere i loro sviluppi con la stessa facilità con cui si scrivono gli sviluppi delle potenze de' binomi.

Nella teoria delle funzioni isobariche è una importante ricerca quella della derivata parziale d' ordine indeterminato del prodotto di un numero qualunque di siffatte funzioni, da prendersi rispetto a quali che siano elementi; questo argomento, mentre apre un campo vastissimo di investigazione nella teoria delle forme, dà in particolare la

[1]) Pare che non esista alcun' altra deduzione *elementare* delle due formole di cui si tratta. Si sa che la prima fu data da Waring senza dimostrazione nelle *Meditationes Algebraicae;* ma è affatto ignorato che la seconda sia dovuta ad Hindenburg, che pure non dà dimostrazione. Queste formole si trovano semplicemente enunciate nel *Sammlung* citato più sopra, a pag. 110, accompagnate da qualche osservazione di Hindenburg in rapporto all'analisi combinatoria; in quanto alla seconda Egli aggiunge queste sole parole: *Der andere Satz ist, so viel ich weiss, ganz neu*: ma in riguardo alla formola di Waring dà una notizia che merita di essere ricordata, cioè, che la prima dimostrazione generale di questa formola fu data da Prasse in uno scritto pubblicato a Lipsia nel 1796, dal titolo: *Usus logarithmorum Infinitinomii iu Theoria Aequationum.*

chiave per risolvere tutte le quistioni relative alle funzioni simmetriche, le quali, anche nello stato attuale della scienza sono ben lungi dall'essere completamente rischiarate. Troveremo, per esempio, un'equazione a derivate parziali di facile ed immediata applicazione, la quale costituisce una funzione generatrice de' coefficienti di tutte le possibili funzioni simmetriche espresse ne' coefficienti dell'equazione, non esclusi i coefficienti dell'equazione a' quadrati delle differenze; e che può essere considerata come un complemento al memorabile teorema di Borchardt intorno alla funzione generatrice di tutte le funzioni simmetriche delle radici di un'equazione, il quale, com'è noto, rimane di assoluta impotenza pel calcolo effettivo di queste funzioni mediante i coefficienti dell'equazione.

Naturalmente la derivazione, alla quale abbiamo accennato, si collega alla derivazione di un prodotto di funzioni ordinarie di più variabili; ma siccome questo soggetto è poco studiato ne' libri istituzionali, abbiamo dovuto cominciare per mettere in evidenza la legge generale, che regola lo sviluppo di una derivata parziale d'ordine qualunque di un prodotto di siffatte funzioni; ed i risultamenti si presentarono straordinariamente semplici. La forma di questo sviluppo dipende assolutamente, ed in modo lucidissimo, dalla partizione de' numeri; e sarebbe, se pure ve ne fosse bisogno, un altro esempio per provare che ormai non è permesso di trascurare queste nozioni nelle Algebre ordinarie. In quanto a' coefficienti la loro determinazione si compendia in una regola unica e di facilissima applicazione, che dà immediatamente, ed in tutt'i casi, il coefficiente di un termine designato qualunque. Come si vede, siamo entrati in un argomento, che sorte propriamente dall' indole delle ricerche, che formano il soggetto dell'attuale pubblicazione; e quindi abbiamo creduto di rimandare ad un'appendice la ricerca considerata in generale, e nel testo abbiamo raccolto tutto ciò, che si rapporta specialmente alla derivazione delle funzioni isobariche.

L'estensione presa dalle materie, alle quali abbiamo accennato, ci ha determinati a limitare il presente lavoro alla teoria delle funzioni isobariche, ed a rimettere le applicazioni a successive comunicazioni.

Capitolo II.

Art. 1. — *Nozioni preliminari relative all'algoritmo isobarico.*

1. Considerando un sistema di quantità obbligate a succedersi con ordine definito (prima, seconda, terza, ecc. ecc.), converremo di designarle con elementi letterali $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, dove gl'indici formano le serie naturale $1, 2, 3, \ldots, m$. Posto ciò, con nome generico, chiamiamo *combinazioni* i prodotti di questi elementi moltiplicati tra loro in numero qualunque, non escluse le ripetizioni, ma a patto che siano raccolti in uno gli elementi ripetuti, per via di convenienti esponenti; ed in conseguenza le combinazioni, delle quali è parola, avranno generalmente la forma:

$$a_p^{\alpha} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots a_t^{\lambda}. \tag{1}$$

In questa forma gl'indici e gli esponenti sono sempre numeri interi e positivi; gli esponenti possono essere indifferentemente uguali o disuguali, ma gl'indici essenzialmente disuguali; e, se il contrario non sia dichiarato, si supporranno sempre disposti in ordine crescente; sicchè sarà $p < q < r < \ldots < t$. La somma di tutti gli esponenti è, come all'ordinario, il *grado* della combinazione.

2. Si chiama *peso* di una combinazione la somma de' prodotti degl' indici di tutt'i fattori pe' rispettivi esponenti; e quindi, dinotato con n il peso della combinazione (1), sarà:

$$n = p\alpha + q\beta + r\gamma + \ldots + t\lambda.$$

Le combinazioni di grado *zero*, o di peso *zero*, debbono tenersi equivalenti all'unità.

3. Le combinazioni di egual peso si dicono *isobariche;* ma a questo punto si presenta una quistione, che per l'algebra è di superiore interesse: « Trovare tutte le com- « binazioni isobariche, che è possibile di formare co' dati elementi, di peso eguale ad « un dato numero n ». Noi risolveremo la quistione in più modi, che si appropriano a diverse condizioni, che si possono imporre, a seconda delle applicazioni, e specialmente perchè le combinazioni si abbiano ordinate, secondo certi criteri, che saranno additati; ma è necessario di premettere alcuni chiarimenti.

Ed innanzi tutto faremo osservare che la ricerca, di cui si tratta, può farsi evidentemente dipendere da partizione di numeri; in fatti, se $p, q, \ldots, t$ sono numeri presi ad arbitrio nella serie $1, 2, \ldots, m$, e s'immagini il numero n decomposto in α parti uguali a p, β parti uguali a $q, \ldots, \lambda$ parti uguali a t, è chiaro che la combinazione formata con gli elementi $a_p, a_q, \ldots, a_t$, aventi per esponenti i numeri $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, è appunto una combinazione di peso n. Segue da ciò che ogni partizione del numero n, in parti uguali o disuguali, non maggiori di m, dà una combinazione di peso n; e quindi, per trovare il completo sistema delle combinazioni di questa natura, non si ha che a formare tutte le partizioni di n in parti uguali ad $1, 2, 3, \ldots, m$, non escluse le ripetizioni. Per esempio, volendo tutte le possibili combinazioni di peso 6 risultanti da tre elementi a_1, a_2, a_3, si cercheranno le partizioni di 6 in parti, uguali o disuguali, non maggiori di 3, e queste essendo:

$$1+1+1+1+1+1\ ,\ 1+1+1+1+2\ ,\ 1+1+2+2\ ,\ 2+2+2\ ,\ 1+1+1+3\ ,\ 1+2+3\ ,\ 3+3\ ,$$

le corrispondenti combinazioni saranno *):

$$a_1^6 \;,\; a_1^4 a_2 \;,\; a_1^2 a_2^2 \;,\; a_2^3 \;,\; a_1^3 a_3 \;,\; a_1 a_2 a_3 \;,\; a_3^2.$$

Adunque, se si conoscono tutte le partizioni del numero n, ne seguono subito tutte le combinazioni di peso n; ma, reciprocamente, è chiaro che, se si conoscono le combinazioni, ne seguono immediatamente le partizioni, di modo che risolvendosi l'una, resta risoluta anche l'altra quistione. Noi preferiamo la considerazione diretta delle combinazioni, sia perchè nella maggior parte delle applicazioni le partizioni si richieggono appunto per formare le combinazioni, sia perchè le partizioni hanno nelle stesse combinazioni la più naturale ed opportuna rappresentazione **); e sia perchè le

*) La quistione può essere considerata sotto un altro punto di vista. Se si rappresentano con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ delle quantità indeterminate capaci di prendere tutt'i valori interi e positivi o nulli, è evidente che qualunque combinazione avrà la forma:

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3} \ldots a_m^{\varepsilon_m}, \tag{a}$$

e dovendo essere di peso n, è necessario e basta che gli esponenti verifichino l'equazione indeterminata:

$$1.\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \ldots + m\varepsilon_m = n. \tag{b}$$

Ne risulta che la forma (a) darà tutte le combinazioni di peso n, prendendo per sistemi di esponenti tutte le soluzioni della equazione (b) in numeri interi e positivi, incluso il zero.

Applicando questo processo all'esempio superiore, in cui si tratta di trovare tutte le combinazioni di peso 6 risultanti dai tre elementi a_1, a_2, a_3, bisogna cominciare per cercare tutte le soluzioni dell'equazione:

$$1.\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 = 6,$$

e si trova facilmente che queste soluzioni, in numero di sette, sono le seguenti:

ε_1	ε_2	ε_3
6	0	0
4	1	0
2	2	0
0	3	0
3	0	1
1	1	1
0	0	2.

Ora, adottando ciascuna soluzione per sistema di esponenti alla forma $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3}$, si ritorna evidentemente alle combinazioni ottenute nel testo. Ma quindi risulta che la costruzione del completo sistema di combinazioni di peso n include egualmente la risoluzione della equazione indeterminata (b) in numeri interi e positivi, o nulli.

**) È manifesto che nelle combinazioni si ha una rappresentazione delle partizioni molto più concisa e più opportuna; basta ritenere che gl'indici esprimano le parti disuguali, mentre gli esponenti dinotano quante volte queste parti sono ripetute. Così, in generale, il simbolo:

$$a_p^{\alpha}\, a_q^{\beta}\, a_r^{\gamma} \ldots a_t^{\lambda}$$

può bene essere adoperato per significare la partizione di un numero in α parti eguali a p, β parti eguali a $q, \ldots, \lambda$ parti eguali a t; ma allora vale anche meglio di sopprimere la lettera a, che non ha più scopo, e la partizione si rappresenta semplicemente con la notazione:

$$p^{\alpha} q^{\beta}{}_r{}^{\gamma} \ldots t^{\lambda}, \tag{c}$$

già usata da Vandermond e da Cayley, e che supplisce la scrittura incomoda:

$$\frac{\alpha \text{ parti } p}{p\,p \ldots p}\;\frac{\beta \text{ parti } q}{q\,q \ldots q}\;\frac{\gamma \text{ parti } r}{r\,r \ldots r} \cdots \frac{\lambda \text{ parti } t}{t\,t \ldots t}.$$

Naturalmente nel simbolo (c) non si ha più a vedere nè un prodotto, nè potenze, nè esponenti, ma solo una maniera concisa per significare un numero decomposto in α parti p, β parti q, ecc. ecc.; di guisa che i numeri $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ non sono più esponenti ordinari, ma sono e li chiameremo *esponenti di ripetizione* delle parti disuguali. In questa notazione, come esponenti di ripetizione si ammettono anche 1 e 0; il primo per le parti semplici, cioè non ripetute, ma si sopprime per brevità, e l'altro per parti

combinazioni consentono un linguaggio algebrico, che nelle partizioni dovrebbe risolversi in circollocuzioni.

4. Le combinazioni di egual peso si distribuiscono per *classi* e per *sezioni di classi;* la *classe* di una combinazione è l'indice più grande, e la *sezione* è l'esponente dell'elemento che ha l'indice più grande. Per esempio le combinazioni isobariche di peso 10, $a_1^3 a_2^2 a_3$, $a_2^2 a_3^2$, $a_1 a_3^3$ sono di 3ª classe, ma appartengono rispettivamente alle sezioni 1ª, 2ª, 3ª.

Supponendo dati m elementi, il numero delle classi non può essere maggiore di m, ma può essere minore. Infatti, nelle combinazioni di peso n non possono entrare elementi d'ordine superiore ad n; quindi, se $n \leqq m$, il numero delle classi sarà uguale ad n; ma se $n > m$, quel numero sarà sempre eguale ad m. La classe n^{ma} non può comprendere che la sola combinazione a_n; ed una è pure la combinazione di 1ª classe, cioè a_1^n.

5. Paragonando due combinazioni di egual peso, si dice di *rango inferiore* quella in cui l'elemento d'ordine più elevato ha l'indice più piccolo; o, se questi indici sono eguali, quella in cui lo stesso elemento ha l'esponente più piccolo. Che se anche gli esponenti sono eguali, il rango si valuta applicando i medesimi criterî agli elementi di ordine prossimamente inferiori a' più elevati, e così di seguito. Per esempio, considerando le combinazioni di peso 12, $a_1^5 a_3 a_4$, $a_1 a_2^2 a_3 a_4$, $a_1^2 a_2 a_4^2$, $a_2^2 a_4^2$, $a_1^7 a_5$, si trova che ciascuna è di rango inferiore alle seguenti; o, se piaccia, di rango superiore alle precedenti. In generale è chiaro che il rango di due combinazioni, che hanno comuni alcuni degli ultimi fattori, è lo stesso che quello delle due combinazioni di peso inferiore, che ne risultano sopprimendo tutt'i fattori comuni.

6. Due combinazioni isobariche si dicono di *rango successivo*, o semplicemente *successive,* se non esiste alcuna combinazione di rango intermedio, cioè superiore all'una ed inferiore all'altra. Questa successione è definita dal seguente criterio:

Sono successive due combinazioni isobariche A *e* B *aventi le forme:*

$$A = a_i a_k^x \quad , \quad B = a_1^y a_{k+1} ,$$

dove $k > 0$ *ed* $i < k$, *e gli esponenti* x *ed* y *potendo prendere tutt'i valori interi e positivi compatibili con l'eguaglianza de' pesi delle due combinazioni.*

La dimostrazione è immediata; infatti, una combinazione di rango intermedio ad A e B dovrebbe contenere l'elemento a_k con un esponente superiore ad x; e ciò è impossibile, perchè il suo peso sorpasserebbe quello di A.

che in realtà non esistono. Applicando, per esempio, queste convenzioni alle partizioni del numero 6 in parti eguali ad 1, 2, 3, considerate nel testo, le medesime divengono:

$$1^6 \;,\; 1^4 2 \;,\; 1^2 2^2 \;,\; 2^3 \;,\; 1^3 3 \;,\; 123 \;,\; 3^2 .$$

Ma in generale è chiaro che, per passare da un sistema di combinazioni a quello delle corrispondenti partizioni, non si ha che a sopprimere la lettera a; e, reciprocamente, ripristinando questa lettera si tornerebbe da un sistema di partizioni a quello delle corrispondenti combinazioni.

Considerando le partizioni indipendentemente dalle combinazioni le terremo egualmente distribuite per classi, e la *classe* di una partizione è sempre la parte più grande. Inoltre chiamiamo ancora *grado* di una partizione il numero di tutte le sue parti: numero perciò equivalente alla somma di tutt'i suoi indici di ripetizione; di guisa che il grado della partizione (*c*) sarà

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda .$$

Così, secondo queste denominazioni, il *grado* di una partizione è ciò che Hindenburg ha chiamato *classe* della partizione (V. p. 11); mentre per noi la *classe* è definita dalla parte più grande della partizione.

Questa proposizione include evidentemente il caso di $i=0$; vale a dire, quando $A=a_k^x$, la combinazione successiva ha ancora la forma $B=a_1^y a_{k+1}$.

7. Supponendo data la combinazione A, per avere la combinazione successiva B di rango superiore, non si ha che a determinare il valore dell'esponente y, che rende il peso di B eguale al peso di A, che è dato. Chiamando μ questo peso, si ha:

$$kx+i=y+k+1=\mu\,; \tag{2}$$

quindi

$$y=(kx+i)-(k+1)=\mu-(k+1)\,,$$

e la combinazione richiesta sarà definita dalla formola:

$$B=a_1^{\mu-(k+1)}a_{k+1}\,.$$

Niente adunque è più facile della ricerca della combinazione B, di rango superiore, successiva alla data combinazione $A=a_i a_k^x$; e può stabilirsi la regola seguente: *Agli elementi* a_i *ed* a_k *si sostituiscano gli elementi* a_1 *ed* a_{k+1}, *dando però ad* a_1 *un esponente eguale all'eccesso del peso* μ *di* A *sull'indice maggiore* k *accresciuto di* 1; potendo d'altra parte la combinazione A avere l'una o l'altra delle due forme $a_i a_k^x$ ed a_k^x.

Esempî						
Combinazioni date	;	$a_2 a_3^2$,	$a_3 a_5$,	$a_2 a_5$,	a_4^2 ,	a_1^6 ,
Combinazioni successive superiori	;	$a_1^4 a_4$,	$a_1^2 a_6$,	$a_1 a_6$,	$a_1^3 a_5$,	$a_1^4 a_2$.

È a notarsi che nella combinazione B sparisce l'elemento a_1 quando si ha $\mu=k+1$, vale a dire quando $A=a_1 a_k$. In questa ipotesi si ha semplicemente $B=a_{k+1}$.

8. Se invece è data B, e si domanda la combinazione successiva inferiore A, si hanno due incognite a determinare, x ed i. Parrebbe che in questo caso fosse insufficiente la relazione (2); però, siccome è dato il peso μ di B, e si ha

$$\mu=kx+i\,,$$

visto che $k>i$, segue da questa relazione che x e i sono l'uno il quoziente l'altro il residuo della divisione di μ per k, e quindi si ha la regola seguente per definire la combinazione A di rango inferiore e successiva ad una data combinazione $B=a_1^y a_{k+1}$: *Si divida il peso* μ *di* B *per* k, *o meglio pel suo indice maggiore diminuito di* 1; *e posto che* x *sia il quoziente ed* i *il residuo, sarà* $A=a_i a_k^x$.

Se μ è multiplo di k, e quindi $i=0$, risulta $A=a_k^x$. E quando $y=0$ e $B=a_{k+1}$, si ha $A=a_1 a_k$.

Esempî						
Combinazioni date	;	a_5 ,	$a_1 a_5$,	$a_1^2 a_5$,	$a_1^3 a_5$,	$a_1^7 a_5$,
Combinazioni successive inferiori	;	$a_1 a_4$,	$a_2 a_4$,	$a_3 a_4$,	a_4^2 ,	a_4^3 .

Art. 2. — *Metodi per l'algoritmo isobarico.*

9. In queste ricerche ci limitiamo a considerare le combinazioni isobariche relative ad una serie continua di elementi, ne' quali cioè gl' indici formano la serie naturale $1, 2, 3, \ldots, m$, che è veramente il caso ordinario delle applicazioni; ma più generalmente si possono domandare tutte le combinazioni di peso n relative ad una serie di elementi $a_p, a_q, a_r, \ldots, a_t$ dove gl' indici $p, q, r \ldots, t$ figurano numeri interi e positivi qualunque, tra loro disuguali. Nella memoria intorno alle funzioni isobariche, ricordata nel Cap. I (pag. 6), abbiamo dato una soluzione di questa quistione, la quale presenta non lievi difficoltà, e qui non occorre di ritornare sull' argomento; ma è indispensabile di riprodurre alcuni de' semplicissimi principii che sono il fondamento della teoria.

Considerando la somma di tutte le combinazioni di peso n, che possono risultare dagli elementi $a_p, a_q, a_r, \ldots, a_t$, si ha un polinomio, i di cui termini sono tutti di peso n, e che perciò si dirà *polinomio isobarico di peso n* relativo a' dati elementi. Per brevità rappresenteremo questo polinomio con la notazione $|a_p, a_q, \ldots, a_t|_n$, vale a dire chiudendo gli elementi tra due linee, e segnando esternamente un indice, che ne esprime il peso. Un polinomio isobarico di peso n è *completo* se contiene tutte le possibili combinazioni di peso n, che possono risultare dagli elementi; e qui riterremo sempre che si tratti di polinomi completi. Spesso rappresenteremo questo polinomio col simbolo A_n, di modo che sarà

$$A_n = |a_p, a_q, \ldots, a_t|_n,$$

10. Da questa definizione e dalla natura delle combinazioni isobariche risultano immediatamente alcune conseguenze, che è mestieri di segnalare.

1° Se tra gli elementi cui si rapporta il polinomio A_n ve ne sono di quelli con indici più grandi del peso n, questi elementi si possono impunemente sopprimere; e così per esempio si ha $|a_2 a_3 a_7|_6 = |a_2 a_3|_6 = a_2^3 + a_3^2$.

2° È nullo il polinomio A_n se gl' indici degli elementi sono tutti più grandi del peso, o se siano tali da non poterne risultare alcuna combinazione di peso n, come avviene, per esempio, se gl' indici sono tutti pari, e dispari il peso.

3° Un elemento solo, come a_p, non può dare che una sola combinazione per ogni valore particolare del peso n. In tal caso adunque il polinomio A_n, ossia $|a_p|_n$, si riduce propriamente ad un monomio, e si ha $|a_p|_n = a_p^{\frac{n}{p}}$. Ma, perchè il secondo membro possa essere diverso da zero, è necessario che l'esponente sia un numero intero, e quindi n multiplo di p; se ciò ha luogo, e pongasi $n = pk$, si avrà $|a_p|_n = |a_p|_{pk} = a_p^k$; se n non è divisibile per p, sarà sempre $|a_p|_n = 0$.

4° Un polinomio isobarico di peso *zero* deve tenersi equivalente all' unità qualunque siano gli elementi ed il loro numero; sicchè si ha in ogni caso

$$A_o = |a_p a_q \ldots a_t|_o = 1.$$

11. Posto ciò, dimostreremo due notevoli proprietà de' polinomi isobarici completi.

I. *Se nel polinomio isobarico completo* A_n *gli esponenti di un elemento* a_p *si diminuiscano di un dato numero* i, *e si rigettino le combinazioni in cui l' esponente di* a_p *è inferiore ad* i, *le combinazioni che restano formeranno il polinomio completo isobarico di peso* $n - pi$.

Infatti, diminuendo di i unità l'esponente di a_p in una combinazione di peso n, se ne diminuisce il peso di pi unità; e perciò le combinazioni residue sono tutte di peso $n - pi$. È poi chiaro che il sistema di queste combinazioni è *completo*, perchè, se alcuna ne mancasse, moltiplicandola per $a_p{}^i$, si avrebbe una combinazione di peso n, non compresa nel sistema originario; e ciò è assurdo, perchè per ipotesi quel sistema è completo.

II. *Se il polinomio* A_n *si ordini secondo le potenze di un elemento* a_p, *il coefficiente di una potenza qualunque* $a_p{}^i$ *sarà un polinomio isobarico completo di peso* $n - pi$ *relativo agli stessi elementi dati, escluso però l' elemento* a_p.

Che questo coefficiente sia un polinomio isobarico di peso $n - pi$ è evidente, e solo bisogna provarlo completo. Ma se potesse mancarvi una delle combinazioni, che sarebbe di peso $n - pi$, moltiplicandola per $a_p{}^i$ ne risulterebbe una combinazione di peso n non esistente nel polinomio A_n; il che è contro l'ipotesi.

12. Sia k il quoziente intero della divisione di n per p, e ρ, il resto, in guisa che $n = pk + \rho$; è chiaro che $a_p{}^k$ è la potenza più alta di a_p, che può trovarsi in A_n, ed il suo coefficiente sarà un polinomio isobarico di peso $\rho = n - pk$. In conseguenza se si rappresenta in generale con B_r il polinomio isobarico completo di peso r relativo a' dati elementi, escluso il solo elemento a_p, per modo che

$$B_r = \left| a_q , a_r , \ldots , a_t \right|_r ,$$

lo sviluppo del polinomio A_n ordinato secondo le potenze ascendenti di a_p, prenderà la forma

$$A_n = B_n + B_{n-p} a_p + B_{n-2p} a_p{}^2 + B_{n-3p} a_p{}^3 + \ldots + B_{n-pk} a_p{}^k ;$$

e giova osservare che il primo termine del secondo membro, cioè B_n esprime tutta la parte del polinomio A_n indipendente da a_p.

Le nozioni che precedono somministrano due metodi distinti per costruire il completo sistema delle combinazioni di peso n relative alla serie continua di elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots$, la quale si può supporre indifferentemente finita o indefinita; dappoichè le regole che daremo esigono che i dati elementi vengano successivamente introdotti l'uno dopo l'altro, ed il processo può essere arrestato, semprechè si voglia, a qualunque elemento designato.

PRIMO METODO

13. Questo metodo, fondato sulle proprietà I e II poc'anzi dichiarate, fa dipendere le combinazioni di una classe qualunque da quelle delle classi precedenti, e ne risulta un processo, che si compendia nella regola seguente:

Le combinazioni della 1ª sezione nella r^ma^ *classe si derivano da quelle delle classi precedenti in cui l' elemento* a_1 *ha un esponente non inferiore ad* r, *e si ottengono diminuendo questo esponente di* r, *e moltiplicandole per* a_r. *Ma le combinazioni di ogni altra sezione*

si derivano da quelle della sezione, che immediatamente la precede, e si ottengono diminuendovi ancora di r *l'esponente di* a_1, *ma accrescendo di* 1 *quello di* a_r. *L'ultima sezione è quella in cui gli esponenti di* a_1 *sono divenuti inferiori ad* r.

Supposto che le prime $r-1$ classi formino un sistema *completo* di peso n, anche completa sarà la r^{ma} classe, cioè conterrà tutte le combinazioni di peso n, in cui l'elemento con l'indice più grande è a_r. Infatti, segue immediatamente dalla proprietà I, che la 1ª sezione comprende tutte le combinazioni di peso n, nelle quali l'elemento a_r può trovarsi a 1° grado; ma per la stessa ragione la 2ª sezione comprenderà tutte quelle, che contengono la 2ª potenza di a_r; poi la terza quelle che contengono la 3ª potenza, ecc. ecc.; e quindi risulta che la r^{ma} classe, ottenuta con la regola esposta, è necessariamente completa.

14. La risoluzione della quistione è ora evidente, perchè, cominciando ad applicar la regola all'unica combinazione di 1ª classe

$$a_1^n,$$

se ne deducono successivamente le classi superiori, e quindi il completo sistema di combinazioni di peso n. E si hanno dapprima le combinazioni di 2ª classe:

$$a_1^{n-2}a_2 \quad , \quad a_1^{n-4}a_2^2 \quad , \quad a_1^{n-6}a_2^3 \quad , \quad a_1^{n-8}a_2^4, \ldots, a_1^{n-2i}a_2^i, \ldots$$

nella quale ogni sezione comprende una sola combinazione, donde avviene che, mentre gli esponenti di a_1 formano una progressione aritmetica decrescente, la cui ragione è 2, e che comincia da $n-2$, gli esponenti di a_2 sono invece numeri naturali, a cominciar da 1; l'ultima combinazione della 2ª classe sarà $a_2^{\frac{n}{2}}$, ovvero $a_1 a_2^{\frac{n-1}{2}}$, secondochè n è pari o impari. Dalle combinazioni delle prime due classi, con la introduzione del terzo elemento a_3 si deducono quelle della 3ª classe, le quali, distinte per sezioni, sarebbero le seguenti:

1ª Sez.	, $a_1^{n-3}a_3$	, $a_1^{n-5}a_2a_3$	, $a_1^{n-7}a_2^2a_3$	, . . . , $a_1^{n-2i-3}a_2^ia_3$	, . . .
2ª Sez.	, $a_1^{n-6}a_3^2$	, $a_1^{n-8}a_2a_3^2$	, $a_1^{n-10}a_2^2a_3^2$	, . . . , $a_1^{n-2i-6}a_2^ia_3^2$	, . . .
3ª Sez.	, $a_1^{n-9}a_3^3$	, $a_1^{n-11}a_2a_3^3$	, $a_1^{n-13}a_2^2a_3^3$	, . . . , $a_1^{n-2i-9}a_2^ia_3^3$	, . . .
ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.

E così, continuando ad introdurre l'uno dopo l'altro i rimanenti elementi $a_4, a_5, \ldots, a_m$, si ottiene il completo sistema delle combinazioni di peso n nel modo il più semplice e rapido che può desiderarsi, perchè non richiede calcolo di sorta, e tutto si riduce al fastidio della scrittura *). È quasi superfluo di avvertire che questi sistemi si arrestano tostochè l'esponente di a_1 cominciasse a diventar negativo.

*) Il sistema delle combinazioni di peso n relative agli elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots$, può, quando si voglia, essere immediatamente tradotto nel sistema delle partizioni di n in parti uguali ad 1, 2, 3, . . . ; e perciò, tenendo presente la notazione delle partizioni (nota 2ª a pag. 18), non si ha che a sopprimere la lettera a, e ritenere i soli indici co' rispettivi esponenti. Ma allora è chiaro che

Quando il numero m degli elementi è inferiore al peso n, la classe più elevata sarà la m^{esima}; ma se quel numero e indefinito, o maggiore di n, la classe più elevata sarà la n^{esima}; e le combinazioni delle ultime classi per esempio delle ultime cinque, saranno

classe $(n-4)^{esima}$	;	$a_1^4 a_{n-4}$,	$a_1^2 a_2 a_{n-4}$,	$a_2^2 a_{n-4}$,	$a_1 a_3 a_4$,	$a_4 a_{n-4}$, .
classe $(n-3)^{esima}$	:	$a_1^3 a_{n-3}$,	$a_1 a_2 a_{n-3}$,	$a_3 a_{n-3}$,		
classe $(n-2)^{esima}$	;	$a_1^2 a_{n-2}$,	$a_1 a_{n-2}$,			
classe $(n-1)^{esima}$	;	$a_1 a_{n-1}$,				
classe n^{esima}	;	a_n .				

15. Il metodo esposto è di tale evidenza da non aver bisogno di altre spieghe; ma tuttavolta, per abbondare in chiarezza, daremo un esempio concreto nel quale le combinazioni sono ancora distinte per classi, sempre disposte nell'ordine istesso con cui risultano dalla regola; e per comodo de'lettori aggiungeremo i sistemi di combinazioni di tutt'i pesi inferiori a 10.

il sistema delle partizioni può essere direttamente ottenuto, indipendentemente dalle combinazioni, operando sulle parti 1, 2, 3,... e sui loro esponenti di ripetizione come si trattasse degl'indici degli elementi e de'loro esponenti. Laonde, presa come iniziale la partizione di 1ª classe, si ha il seguente sistema di partizioni del numero n distribuito per classi

1ª classe ,	1^n				
2ª classe ,	$1^{n-2}\,2$	$1^{n-4}\,2^2$	$1^{n-6}\,2^3$	$1^{n-8}\,2^4$	ecc. ecc.
3ª classe	$1^{n-3}\,3$	$1^{n-5}\,23$	$1^{n-7}\,2^2 3$	$1^{n-9}\,2^3 3$	ecc. ecc.
	$1^{n-6}\,3^2$	$1^{n-8}\,23^2$	$1^{n-10}\,2^2 3^2$	$1^{n-12}\,2^3 3^2$	ecc. ecc.
	$1^{n-9}\,3^3$	$1^{n-11}\,23^3$	$1^{n-13}\,2^2 3^3$	$1^{n-15}\,2^3 3^3$	ecc. ecc.
	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
4ª classe	$1^{n-4}\,4$	$1^{n-6}\,24$	$1^{n-8}\,2^2 4$	$1^{n-10}\,2^3 4$	ecc. ecc.
	$1^{n-7}\,34$	$1^{n-9}\,234$	$1^{n-11}\,2^2 34$	$1^{n-13}\,2^3 34$	ecc. ecc.
	$1^{n-10}\,3^2 4$	$1^{n-12}\,23^2 4$	$1^{n-14}\,2^2 3^2 4$	$1^{n-16}\,2^3 3^2 4$	ecc. ecc.
	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.

Confrontando questo sistema di partizioni con quello che risulta dalla regola del BOSCOVICH (V. pag. 8), sarà subito manifesto che i due sistemi coincidono perfettamente, quantunque derivanti da principî e da regole diverse.

Segue da chiarimenti già dati (nota 1ª, pag. 18), che l'attuale sistema di partizioni include la risoluzione completa in numeri interi e positivi o nulli dell'equazione indeterminata

$$1\,.\,\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4 + \ldots = n\,,$$

perchè ogni partizione nel sistema degli esponenti di ripetizione delle parti disuguali dà un sistema di valori di quelle incognite, che sono appunto contrassegnate con indici eguali rispettivamente alle dette parti. Per esempio, le quattro partizioni scritte in ultimo, dànno le quattro soluzioni:

$\varepsilon_1 = n - 10$,	$\varepsilon_1 = n - 12$,	$\varepsilon_1 = n - 14$,	$\varepsilon_1 = n - 16$
$\varepsilon_3 = 2$,	$\varepsilon_2 = 1$,	$\varepsilon_2 = 2$,	$\varepsilon_2 = 3$
$\varepsilon_4 = 1$,	$\varepsilon_3 = 2$,	$\varepsilon_3 = 2$,	$\varepsilon_3 = 2$
	$\varepsilon_4 = 1$,	$\varepsilon_4 = 1$,	$\varepsilon_4 = 1$.

Combinazioni di peso $n=10$.

1ª Classe, a_1^{10} ,

2ª Classe, $a_1^8 a_2$, $a_1^6 a_2^2$, $a_1^4 a_2^3$, $a_1^2 a_2^4$, a_2^5 ,

3ª Classe, $a_1^7 a_3$, $a_1^5 a_2 a_3$, $a_1^3 a_2^2 a_3$, $a_1 a_2^3 a_3$, $a_1^4 a_3^2$, $a_1^2 a_2 a_3^2$, $a_2^2 a_3^2$, $a_1 a_3^3$,

4ª Classe, $a_1^6 a_4$, $a_1^4 a_2 a_4$, $a_1^2 a_2^2 a_4$, $a_2^3 a_4$, $a_1^3 a_3 a_4$, $a_1 a_2 a_3 a_4$, $a_3^2 a_4$, $a_1^2 a_4^2$, $a_2 a_4^2$

5ª Classe, $a_1^5 a_5$, $a_1^3 a_2 a_5$, $a_1 a_2^2 a_5$, $a_1^2 a_3 a_5$, $a_2 a_3 a_5$, $a_1 a_4 a_5$, a_5^2 ,

6ª Classe, $a_1^4 a_6$, $a_1^2 a_2 a_6$, $a_2^2 a_6$, $a_1 a_3 a_6$, $a_4 a_6$,

7ª Classe, $a_1^3 a_7$, $a_1 a_2 a_7$, $a_3 a_7$,

8ª Classe, $a_1^2 a_8$, $a_2 a_8$,

9ª Classe, $a_1 a_9$,

10ª Classe, a_{10} .

Sistemi di combinazioni di tutt' i pesi da $n=1$ *fino ad* $n=9$.

$n=1$; a_1 ,

$n=2$; a_1^2 , a_2 ,

$n=3$; a_1^3 , $a_1 a_2$, a_3 ,

$n=4$; a_1^4 , $a_1^2 a_2$, a_2^2 , $a_1 a_3$, a_4 ,

$n=5$; a_1^5 , $a_1^3 a_2$, $a_1 a_2^2$, $a_1^2 a_3$, $a_2 a_3$, $a_1 a_4$, a_5 ,

$n=6$; a_1^6 , $a_1^4 a_2$, $a_1^2 a_2^2$, a_2^3 , $a_1^3 a_3$, $a_1 a_2 a_3$, a_3^2 , $a_1^2 a_4$, $a_2 a_4$, $a_1 a_5$, a^6 ,

$n=7$; a_1^7 , $a_1^5 a_2$, $a_1^3 a_2^2$, $a_1 a_2^3$, $a_1^4 a_3$, $a_1^2 a_2 a_3$, $a_2^2 a_3$, $a_1 a_3^2$, $a_1^3 a_4$, $a_1 a_2 a_4$, $a_3 a_4$, $a_1^2 a_5$, $a_2 a_5$, $a_1 a_6$, a_7 ,

$n=8$; a_1^8 , $a_1^6 a_2$, $a_1^4 a_2^2$, $a_1^2 a_2^3$, a_2^4 , $a_1^5 a_3$, $a_1^3 a_2 a_3$, $a_1 a_2^2 a_3$, $a_1^2 a_3^2$, $a_2 a_3^2$, $a_1^4 a_4$, $a_1^2 a_2 a_4$, $a_2^2 a_4$, $a_1 a_3 a_4$, a_4^2 , $a_1^3 a_5$, $a_1 a_2 a_5$, $a_3 a_5$, $a_1^2 a_6$, $a_2 a_6$, $a_1 a_7$, a_8 ,

$n=9$; a_1^9 , $a_1^7 a_2$, $a_1^5 a_2^2$, $a_1^3 a_2^3$, $a_1 a_2^4$, $a_1^6 a_3$, $a_1^4 a_2 a_3$, $a_1^2 a_2^2 a_3$, $a_2^3 a_3$, $a_1^3 a_3^2$, $a_1 a_2 a_3^2$, a_3^3 , $a_1^5 a_4$, $a_1^3 a_2 a_4$, $a_1 a_2^2 a_4$, $a_1^2 a_3 a_4$, $a_2 a_3 a_4$, $a_1 a_4^2$, $a_1^4 a_5$, $a_1^2 a_2 a_5$, $a_2^2 a_5$, $a_1 a_3 a_5$, $a_4 a_5$, $a_1^3 a_6$, $a_1 a_2 a_6$, $a_3 a_6$, $a_1^2 a_7$, $a_2 a_7$, $a_1^8 a_8$, a_9 .

16. Siccome i polinomî isobarici $A_1, A_2, A_3, \ldots$ non sono altra cosa che somme di tutte le combinazioni, rispettivamente di pesi $1, 2, 3, \ldots$, risulta:

$$A_1 = |a_1|_1 = a_1$$

$$A_2 = |a_1 a_2|_2 = a_1^2 + a_2$$

$$A_3 = |a_1 a_2 a_3|_3 = a_1^3 + a_1 a_2 + a_3$$

$$A_4 = |a_1 a_2 a_3 a_4|_4 = a_1^4 + a_1^2 a_2 + a_2^2 + a_1 a_3 + a_4$$

ecc. ecc. ecc.

Ma intorno a ciò dobbiamo prevenire una volta per tutte che salvo avviso espresso in

contrario, le combinazioni di qualunque peso, sia distinte, sia riunite in polinomio, vogliono in ogni caso essere rigorosamente disposte e succedersi nell'ordine istesso con cui risultano dal metodo.

17. Faremo inoltre osservare che, una volta ottenuto il sistema di combinazioni di peso n, si può immediatamente dedurne quello del peso prossimamente inferiore $n-1$. Basta diminuire da per tutto di *uno* l'esponente di a_1, e rigettare le combinazioni, che non contengono a_1; il che segue senza più dalla proprietà I del n.° 11; ed è poi chiaro che le combinazioni di peso $n-1$, risultanti in tal modo, si troveranno esattamente disposte nell'ordine istesso con cui le darebbe il metodo diretto. Applicando questo processo al sistema superiore delle combinazioni di peso 10, si possono riprodurre successivamente l'uno dopo l'altro i sistemi corrispondenti a tutt'i pesi inferiori 9, 8, 7, ecc. ecc.

Reciprocamente, moltiplicando per a_1 le combinazioni di peso $n-1$, si riproducono evidentemente, ma solo in parte, le combinazioni di peso, n, dovendo mancare tutte quelle che non contengono a_1; però incontreremo tra poco altri principî da' quali risulterà che anche queste combinazioni indipendenti da a_1 possono essere riprodotte di una maniera semplicissima, di guisa che sarà pure immediato il passaggio dalle combinazioni di peso qualunque a quelle del peso immediatamente superiore.

18. Il metodo esposto per costruire il completo sistema delle combinazioni di peso n palesa alcune proprietà di questo sistema, che meritano di essere segnalate.

I. È conseguenza del metodo che ogni combinazione è di rango superiore alla precedente. Ora, siccome il sistema comprende tutte le combinazioni, avviene che non può esisterne alcuna di rango intermedio tra due vicine, e da ciò risulta il fatto notevole che *le combinazioni riescono disposte per rango ascendente e successivo*, prendendo in tal modo un ordinamento naturale, che assegna a ciascuna un posto perfettamente definito. Ma allora è palese che questo sistema di combinazioni è perfettamente uniforme a quello adottato da Cayley nelle tavole delle funzioni simmetriche, e dà origine ad un sistema di partizioni coincidente col sistema di Boscovich (V. pag. 14).

II. In qualunque classe si possono determinare direttamente la prima e l'ultima combinazione, cioè quella del rango più basso, e quella del rango più alto. Segue dalla stessa regola che la prima combinazione della r^{ma} classe è $a_1^{n-r}a_r$; in quanto all'ultima si osserverà che l'elemento a_r vi ha l'esponente più grande; perciò questo esponente sarà il quoziente intero della divisione di n per r, mentre il resto, che è più piccolo di r, sarà l'indice di un altro elemento che completa la combinazione. In conseguenza, posto che k sia il quoziente ed i il resto della divisione di n per r, e quindi,

$$n = rk + i,$$

l'ultima combinazione della r^{ma} classe sarà $a_i a_r^k$. Ed in effetti la combinazione successiva di rango superiore sarebbe (n.° 7) $a_1^{n-(r+1)}a_{r+1}$, ma questa non più appartiene alla r^{ma} classe, ed è invece la prima della classe seguente.

Quando il resto della divisione è *zero*, vale a dire quando n è multiplo di r, e quindi $n = rk$, l'ultima combinazione è semplicemente a_r^k.

III. Segue dal principio I dimostrato al n.° 8 che, se nelle combinazioni della r^{ma} classe gli esponenti di a_1 si diminuiscono di 1, le combinazioni così ridotte forme-

ranno il completo sistema delle combinazioni di peso $n - r$ relative agli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Da ciò risulta che per costruire tutte le combinazioni della r^{ma} classe non è necessario di ricorrere a quelle delle classi precedenti, come nella regola è prescritto; ma si possono invece costruire le combinazioni di peso inferiore $n - r$, e moltiplicarle per a_r. Bisogna inoltre osservare che le combinazioni di peso $n - r$ sono indipendenti dall'elemento a_r se $r > n - r$, vale a dire $r > \frac{n}{2}$, e perciò in questa ipotesi le combinazioni della r^{ma} classe conterranno soltanto la prima potenza dell'elemento a_r.

IV. È un corollario immediato della proprietà precedente che: *Il numero delle combinazioni di peso* n *appartenenti alla classe* r^{ma} *è uguale al numero delle combinazioni di peso* $n - r$ *relative agli elementi* $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

E nella teoria delle partizioni questa proprietà si traduce come segue: *Nel sistema delle partizioni di un dato numero* n *in parti non maggiori di un dato numero* r, *quelle in cui non manca la parte maggiore* r *sono tante, quante sono le partizioni del numero* $n-r$, *sempre in parti non maggiori di* r.

19. Fin qui abbiamo supposto le combinazioni ordinate per rango ascendente; ed una volta così ottenute, niente impedisce di considerarle in ordine inverso, onde averle disposte per rango discendente, come occorre in diverse applicazioni; ed in questa ipotesi possiamo dare tal sistema la seguente disposizione:

a_n ,	$a_1 a_{n-1}$,	a_2	a_{n-2} ,	a_3	a_{n-3} ,	a_4	a_{n-4} ,	a_5	a_{n-5} ,	ecc. ecc.
		a_1^2		$a_1 a_2$		$a_1 a_3$		$a_1 a_4$		
				a_1^3		a_2^2		$a_2 a_3$		
						$a_1^2 a_2$		$a_1^2 a_3$		
						a_1^4		$a_1 a_2^2$		
								$a_1^3 a_2$		
								a_1^5		

dove s'intende che le combinazioni scritte a sinistra di ciascuna riga verticale debbano moltiplicarsi per l'elemento segnato alla dritta. In questo quadro ogni colonna comprende tutte le combinazioni di una stessa classe, procedenti da sopra in sotto per rango discendente; di modo che la prima superiore è sempre la combinazione di rango più elevato della classe medesima. Ma la quistione dell'ordinamento delle combinazioni per rango discendente sarà poco appresso direttamente risoluta.

SECONDO METODO

20. La costruzione di un sistema di combinazioni ordinato per rango ascendente può farsi evidentemente dipendere dal seguente problema: *Data una combinazione qualunque* P, *trovare la combinazione successiva* Q, *di rango superiore*. Questo problema è la generalizzazione del caso particolare considerato al n.° 7; ma andiamo a vedere che a questo caso va immediatamente ridotto il caso generale. Distinguiamo due ipotesi, secondochè il primo elemento in P (quello cioè con l'indice più piccolo), si trova a

prima potenza o a potenza superiore; e quindi, supponendo $i < p < q < \ldots < t$, considereremo due forme:

$$1^a \text{ forma}, \quad P = a_i a_p^{\alpha} \times a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots \qquad , \qquad 2^a \text{ forma}, \quad P = a_p^{\alpha} \times a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots$$

Posto ciò, le combinazioni successive superiori si ottengono solo applicando la regola del n.° 7 alle rispettive combinazioni parziali a sinistra $a_i a_p^{\alpha}$ ed a_p^{α}, rimanendo inalterato tutto ciò che si trova a dritta. Ora, detto μ il peso di queste combinazioni parziali, vale a dire, ponendo ne' due casi

$$\mu = p\alpha + i \qquad \text{o} \qquad \mu = p\alpha,$$

la combinazione successiva superiore a quelle combinazioni parziali è sempre $a_1^{\mu-(p+1)} a_{p+1}$; ed in conseguenza la combinazione Q successiva e superiore a P, sarà in ogni caso definita dalla formola:

$$Q = a_1^{\mu-(p+1)} a_{p+1} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots;$$

La dimostrazione è riposta nella soppressione de' fattori comuni a P e Q (n.° 5); ma importa di osservare che, se in P gl' indici p e q sono numeri consecutivi, e quindi $p + 1 = q$, gli elementi a_{p+1} ed a_q riuscendo uguali, bisogna in Q riunirli in uno, accrescendo di 1 l'esponente β di a_q.

Si ha dunque un altro metodo non meno semplice del precedente, ma più diretto, per costruire l'una dopo l'altra tutte le combinazioni di peso n, ordinate per rango ascendente; e perciò non si ha che a prender mossa dalla combinazione di 1^a classe a_1^n. E, se si cercassero le sole combinazioni di una data classe, non si avrà che a prendere come iniziale la prima combinazione di questa classe, la quale è già conosciuta al pari dell'ultima (n.° 18, II). Per esempio nella 4^a classe di peso 9 si ha la prima combinazione $a_1^5 a_4$, che rientra nella 2^a forma, e quindi la combinazione successiva di rango superiore sarà $a_1^3 a_2 a_4$; da questa, che appartiene ancora alla 2^a forma, deriva $a_1 a_2^2 a_4$; ma ora siamo alla 1^a forma, e ne risulta $a_1^2 a_3 a_4$, ecc. ecc., e quindi tutte le combinazioni della 4^a classe, di peso 9, saranno:

2^a *forma*	2^a *forma*	1^a *forma*	2^a *forma*	1^a *forma*	1^a *forma*
$a_1^5 a_4$,	$a_1^3 a_2 a_4$,	$a_1 a_2^2 a_4$,	$a_1^2 a_3 a_4$,	$a_2 a_3 a_4$,	$a_1 a_4^2$.

La combinazione $a_1 a_4^2$, alla quale ci siamo arrestati, è evidentemente l'ultima della 4^a classe, perchè l'esponente dell'elemento a_4 è il quoziente intero della divisione di 9 per 4 (n.° 18, II); ed in effetti la combinazione seguente sarebbe $a_1^4 a_5$; ma questa non fa più parte della 4^a classe, essendo la prima della 5^a classe.

21. Si può con eguale facilità risolvere l'altro problema: *Data una combinazione* Q, *trovare la combinazione* P, *successiva inferiore.*

E qui pure occorrono due ipotesi, secondochè il più piccolo degl'indici in Q è maggiore di 1, o eguale ad 1, e quindi si hanno le due forme:

$$Q = a_p^{\alpha} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots \qquad , \qquad Q' = a_1^h a_p^{\alpha} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots$$

dove $p>1$, e che si possono scrivere come segue:

$$Q = a_p \times a_p^{\alpha-1} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots \quad , \quad Q' = a_1^{h} a_p \times a_p^{\alpha-1} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots$$

Così disposte, le corrispondenti combinazioni successive inferiori P e P′ si ottengono modificando con la regola del n.° 8 solo le combinazioni parziali a sinistra del segno $\times$, coè a_p ed $a_1^{h} a_p$. Ora la prima si cangia semplicemente in $a_1 a_{p-1}$, e l'altra diviene $a_i a^{k}_{p-1}$, dove k ed i sono l'uno il quoziente, l'altro il resto della divisione del suo peso $h+p$ per l'indice maggiore p diminuito di 1; e le combinazioni richieste saranno:

$$P = a_1 a_{p-1} a_p^{\alpha-1} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots \quad , \quad P' = a_i a^{k}_{p-1} a_p^{\alpha-1} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots$$

Con la risoluzione di questo problema si ha un metodo per costruire direttamente tutte le combinazioni di peso n, disposte per rango discendente; e perciò non si ha che a prender mossa dall'ultima combinazione del sistema, o meglio da quella di rango più elevato. Così, prendendo come iniziale la combinazione a_n, si ritroverebbe il sistema del n.° 19.

22. I principî, che precedono, permettono di completare la risoluzione della quistione accennata alla fine del n.° 17, vale a dire il passaggio dalle combinazioni di peso $n-1$ a quelle di peso n. Si disse alllora che, se le prime si moltiplicano per a_1 ne risultano altrettante combinazioni di peso n, ma che, a complemento del sistema di peso n, mancano tutte quelle che non contengono a_1; trattasi ora di trovare queste combinazioni, ed averle in guisa da riprodurre con le altre il solito sistema ordinato per rango ascendente e successivo. Poichè le combinazioni di peso $n-1$ si suppongono ordinate con queste condizioni, è chiaro che quelle di peso n, le quali ne risultano moltiplicandole per a_1, saranno certamente ordinate per rango ascendente, ma non può dirsi che due prossime qualunque siano di rango successivo; ed è facile a vedersi che si avvera una interruzione dopo ogni combinazione di peso $n-1$, che abbia la forma:

$$A = a_i a_p^{\alpha} a_q^{\beta} a_r^{\gamma}, \ldots,$$

nella quale cioè il primo elemento a_i ha per esponente l'unità. Infatti, sia B la combinazione di peso $n-1$, di rango superiore e successiva ad A; per le regole precedenti, sarà:

$$B = a_1^{p\alpha+i-(p+1)} a_{p+1} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots;$$

e quindi dalla moltiplicazione di A e B per a_1 risultano le due combinazioni di peso n:

$$a_1 a_i a_p^{\alpha} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots, \qquad \text{ed} \qquad a_1^{p\alpha+i-p} a_{p+1} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots;$$

ma queste non sono di rango successivo, perchè vi ha la combinazione di rango intermedio

$$a_{i+1} a_p^{\alpha} a_q^{\beta} a_r^{\gamma} \ldots,$$

la quale si ottiene cercando la combinazione successiva, o superiore alla prima, o inferiore alla seconda. Segue da ciò che ogni combinazione di peso $n-1$, che ha la for-

ma $a_i a_p^\alpha a_q^\beta, \ldots$, ne dà due al peso n, cioè $a_1 a_i a_p^\alpha a_q^\beta \ldots$, ed $a_{i+1} a_p^\alpha {}_q^\beta, \ldots$, la prima che ne risulta moltiplicandola per a_1, e l'altra che ne deriva accrescendo di 1 l'indice i di a_i; ma, perchè sia mantenuta la legge del rango, la seconda dovrà sempre prender posto immediatamente dopo la prima. Dopo ciò è manifesto che le combinazioni di peso n si derivano da quelle di peso $n-1$ con la regola seguente:

Si moltiplichino le combinazioni di peso n — 1 *per* a_1, *e si ha così una parte del sistema di peso* n; *le rimanenti poi (salvo la legge del rango) si ottengono da quelle sole combinazioni di peso* n — 1, *nelle quali l' esponente dell' elemento con l' indice più piccolo è l' unità, e perciò basta che in ciascuna il detto indice si aumenti di* 1 *).

Si prova facilmente che il sistema di peso n, derivato con questa regola dal sistema di peso $n-1$, è necessariamente completo. Bisogna osservare che il sistema di peso $n-1$ non può contenere combinazioni di rango più elevato di a_{n-1}; e questa, applicando la regola, ne dà due al peso n, cioè $a_1 a_{n-1}$ ed a_n, la seconda delle quali è appunto la combinazione di rango più elevato nel peso n. Ora, siccome la regola dà un sistema di combinazioni ordinato per rango ascendente e successivo, il quale comprende e quella di rango più basso a_1^n, e quella del rango più alto a_n, ne risulta che il sistema comprende tutte le possibili combinazioni di peso n, ed è perciò necessariamente completo.

Bisogna osservare che le combinazioni di peso n, derivanti dalla seconda parte della regola, sono affatto indipendenti dall'elemento a_1; e da ciò risulta il seguente teorema, che ha importanti applicazioni:

Il numero delle combinazioni di peso qualunque n, *nelle quali non manca l' elemento* a_1, *è eguale al numero delle combinazioni di peso* n — 1. E quindi: *Il numero di quelle indipendenti da* a_1 *è uguale alla differenza tra il numero delle combinazioni di peso* n *e quello delle combinazioni di peso* n — 1 **).

*) Nella teoria della partizione la regola per dedurre le partizioni del numero n da quelle del numero $n-1$ si traduce come segue:

Si aggiunga una parte 1 *a tutte le partizioni del numero* n—1; *ma oltre a ciò si aumenti di* 1 *la parte più piccola in quelle sole partizioni nelle quali questa parte non è ripetuta.*

Una regola simile è data da Boscovich nella seconda delle dissertazioni delle quali si è discorso nel primo Capitolo, e l'applica a derivare l'uno dall'altro i coefficienti delle potenze di x nello sviluppo delle potenze delle funzioni intere.

**) Trattandosi di partizioni si ha questo teorema:

Nel sistema delle partizioni di un numero n *in parti non maggiori di un dato numero* m, *il numero di quelle, in cui non manca la parte* 1, *è uguale al numero delle partizioni di* n—1, *sempre in parti non maggiori di* m. E perciò: *Il numero di quelle che sono indipendenti dalla parte* 1 *è uguale alla differenza tra il numero delle partizioni di* n *e quello delle partizioni di* n—1.

Pare che questo teorema non sia conosciuto; ed in effetti il Cayley nelle sue ricerche intorno alla determinazione del numero delle partizioni, ed io stesso nella memoria sullo stesso argomento, pubblicata nel 1865, abbiamo dato le formole per definire il numero delle partizioni di n non solo in parti eguali ad 1, 2, 3; ad 1, 2, 3, 4; ad 1, 2, 3, 4, 5; ad 1, 2, 3, 4, 5, 6; e ad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ma anche in parti eguali a 2, 3; a 2, 3, 4; a 2, 3, 4, 5; a 2, 3, 4, 5, 6; ed a 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ora è evidente che queste ultime formole, le quali escludono la parte 1, non hanno più scopo quando si ammette il teorema enunciato; infatti, data l'espressione algebrica del numero delle partizioni di n in parti eguali ad $1, 2, 3, \ldots, m$, si ha in pari tempo l'espressione del numero delle partizioni di $n-1$ secondo le medesime parti; e quindi, in virtù del teorema, la differenza tra queste due espressioni darà quella del numero delle partizioni di n in parti uguali a $2, 3, 4, \ldots, m$, che risponde appunto al numero delle partizioni di n, che sono indipendenti dalla parte 1.

Del resto il teorema si dimostra facilmente co' principî di Eulero. Infatti, supponendo i due sviluppi

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^2 + \ldots \quad (1)$$

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)} = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{n-1} x^{n-1} + B_n x^2 + \ldots \quad (2)$$

i due coefficienti del primo sviluppo A_{n-1} ed A_n rappresenteranno rispettivamente i numeri delle partizioni di $n-1$ ed n in parti

Art. 3.° — *Combinazioni conjugate.*

23. Una combinazione P si trasforma in un'altra combinazione Q di egual peso, se ad ogni elemento di P se ne sostituisca un altro avente per indice la somma del proprio esponente, e di tutt'i seguenti, e per esponente la differenza tra l'indice proprio e quello che lo precede. La nuova combinazione Q si dice *conjugata* di P.

Se gl' indici di P fossero disposti in ordine decrescente, ogni elemento dovrebbe mutarsi in un altro avente per indice la somma del proprio esponente e di tutt'i precedenti, e per esponente la differenza tra il proprio indice e quello che lo segue.

Supponiamo, per fissar le idee,

$$P = a_p^{\alpha}\, a_q^{\beta}\, a_r^{\gamma}\, a_t^{\delta},$$

e gl' indici in ordine crescente; cercando la conjugata secondo la definizione, si ha:

$$Q = a_{\alpha+\beta+\gamma+\delta}^{p}\; a_{\beta+\gamma+\delta}^{q-p}\; a_{\gamma+\delta}^{r-q}\; a_{\delta}^{t-r}\ ;$$

e si verifica subito che il peso di Q è uguale a quello di P. Gl' indici in Q si succedono decrescendo *); se si cerca la sua conjugata, si ritorna a P; e quindi risulta, che:

Se una combinazione è conjugata di un'altra, questa reciprocamente è conjugata di quella.

Essendo differenti le conjugate di combinazioni differenti, si ha questa proposizione:

Le conjugate di tutte le combinazioni di peso n, *relative ad* n *elementi, riproducono il completo sistema delle stesse combinazioni, ma con ordine diverso.*

24. La conjugata della combinazione a_p^{α}, è semplicemente a_{α}^{p}, vale a dire si forma dalla prima scambiando l' indice con l' esponente, e viceversa.

eguali ad $1, 2, 3, \dots, m$, mentre il coefficiente B_n nel secondo rappresenta il numero delle partizioni di n in parti uguali a $2, 3, 4, \dots, m$; e per conseguenza questo coefficiente B_n esprime quante sono le partizioni di n indipendenti dalla parte 1. Posto ciò, se i due membri di (1) si moltiplicano per $1-x$, si ha l'eguaglianza:

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^m)} = \begin{array}{l|l|l|l|l} 1+A_1 & x+A_2 & x^2+\dots+A_{n-1} & x^{n-1}+A_n & x^n+\dots; \\ \quad -1 & \quad -A_1 & \qquad\quad -A_{n-2} & \quad -A_{n-1} & \end{array}$$

e quindi risulta la relazione, $B_n = A_n - A_{n-1}$, la quale si traduce appunto nel teorema superiore.

*) Disponendo in ordine inverso gli elementi della conjugata Q, la medesima diviene

$$Q = a_{\delta}^{t-r}\; a_{\gamma+\delta}^{r-q}\; a_{\beta+\gamma+\delta}^{q-p}\; a_{\alpha+\beta+\gamma+\delta}^{p},$$

e gl' indici vi si trovano, come all'ordinario, disposti in ordine crescente. Ma vogliamo osservare nell'interesse delle applicazioni che si può dalla combinazione P passare direttamente a questa forma di Q, trasformando gli elementi di P contati dall' ultimo a dritta; quindi si cangerà l'ultimo elemento a_t^{δ} in un altro a_{δ}^{t-r}, che ha per indice il suo esponente δ, e per esponente la differenza tra il suo indice t e l' indice precedente r; poi il penultimo elemento a_r^{γ} nell'altro $a_{\gamma+\delta}^{r-q}$, che ha per indice la somma dei due ultimi esponenti γ e δ e per esponente la differenza tra il suo proprio indice r e l'indice precedente q; indi il terz'ultimo elemento a_q^{β} nell'altro $a_{\beta+\gamma+\delta}^{q-p}$, che ha per indice la somma de' tre ultimi esponenti β, γ, δ, e per esponente sempre la differenza tra il suo proprio indice e quello che lo precede; e così continuando.

25. Bisogna osservare che l'indice più grande di Q, cioè $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, equivale alla somma di tutti gli esponenti di P; ma è manifesto che anche l'indice più grande di P, cioè t, equivale a sua volta alla somma di tutti gli esponenti di Q; qual somma, essendo $p + (q - p) + (r - q) + (t - r)$, si riduce appunto a t. È chiaro che queste circostanze debbono verificarsi in generale; e da ciò risultano le seguenti proprietà:

Se due combinazioni sono conjugate, la classe dell'una è eguale al grado dell'altra; e viceversa. E le conjugate delle combinazioni appartenenti ad una medesima classe sono tutte di uno stesso grado eguale alla classe.

26. Segue da queste ultime proprietà che, se si immaginano le conjugate corrispondenti una ad una a tutte le combinazioni di peso n, ordinate per rango ascendente, le conjugate si troveranno ordinate per *gradi crescenti*, o più esattamente per gruppi composti di combinazioni di gradi eguali, procedenti per ordine dal 1° al grado n^{mo}; di modo che, mentre all'unica combinazione di 1ª classe corrisponde una combinazione di 1° grado, al gruppo delle combinazioni di 2ª classe corrisponderà un gruppo di altrettante combinazioni di 2° grado; poi al gruppo di quelle di 3ª classe un gruppo di egual numero di combinazioni di 3° grado; e così di seguito. Ne diamo un esempio nel seguente quadro, nel quale sono a sinistra tutte le combinazioni di peso 8 ordinate per rango ascendente, disposte per classi, mentre a dritta si trovano le corrispondenti conjugate, le quali in conseguenza riescono disposte per gradi crescenti:

a_1^8 ,	a_8 ,
$a_1^6 a_2$, $a_1^4 a_2^2$, $a_1^2 a_2^3$, a_2^4 ,	$a_7\, a_1$, $a_6\, a_2$, $a_5\, a_3$, a_4^2
$a_1^5 a_3$, $a_1^3 a_2 a_3$, $a_1\, a_2^2 a_3$, $a_1^2 a_3^2$, $a_2\, a_3^2$	$a_6\, a_1^2$, $a_5\, a_2\, a_1$, $a_4\, a_3\, a_1$, $a_4 a_2^2$, $a_3^2 a_2$,
$a_1^4 a_4$, $a_1^2 a_2\, a_4$, $a_2^2 a_4$, $a_1 a_3 a_4$, a_4^2	$a_5\, a_1^3$, $a_4\, a_2\, a_1^2$, $a_3^2 a_1^2$, $a_3 a_2^2 a_1$, a_2^4 ,
$a_1^3 a_5$, $a_1\, a_2\, a_5$, $a_3\, a_5$,	$a_4\, a_1^4$, $a_3\, a_2\, a_1^3$, $a_2^3 a_1^2$
$a_1^2 a_6$, $a_2\, a_6$,	$a_3\, a_1^5$, $a_2^2 a_1^4$,
$a_1\, a_7$,	$a_2\, a_1^6$,
a_8 ,	a_1^8 .

27. Riassumendo le ultime conchiusioni, e tenendo presente una proposizione enunciata al n.° 18 sotto il segno IV, si ha il seguente teorema:

Il numero delle combinazioni di peso n *e di grado* m *relative agli elementi* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *è uguale al numero di quelle della* m^{esima} *classe; e quindi anche eguale al numero delle combinazioni di peso* $n - m$ *relative agli elementi* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *).

Dopo ciò resta immediatamente risoluta la quistione in cui si domandano, non tutte le combinazioni di peso n, ma quelle soltanto, che sono di grado assegnato; basta cercare le combinazioni della classe eguale al dato grado, e le loro conjugate risolveranno la quistione; ma importa di dare di questa quistione una risoluzione diretta.

*) La proposizione superiore risponde a questa:

Le partizioni di un numero n *in* m *parti uguali o disuguali sono tante quante sono quelle del numero* $n - m$ *in parti uguali o disuguali, non maggiori di* m. *Ed altrettante sono le partizioni di* n *in parti uguali o disuguali, le quali contengono la parte* m.

È uno de' teoremi di EULERO, ma senza la seconda parte.

Ricerca diretta di tutte le combinazioni di uno stesso grado.

28. Premettiamo il seguente problema: *Data una combinazione* M, *trovarne un' altra* N *dello stesso grado, ma tale che la coniugata di* M *sia di rango successivo inferiore alla coniugata di* N.

Siano M' ed N' le coniugate di M ed N; essendo data M può trovarsi la sua conjugata M'; indi N' di rango successivo superiore ad M'; e di seguito N coniugata di N'. Ma, dovendo essere uguali i gradi di M ed N, è necessario che M' ed N' siano di una stessa classe; se ciò non è, il problema è impossibile. Ora questo accade in due soli casi: quando M contiene un solo elemento, e quando ne contiene due con indici che differiscono di 1. Infatti, se $M=a_p^\alpha$, si ha (n.° 24) $M'=a_\alpha^p$; quindi N' ha la forma (n.° 7) $a_1^\nu a_{p+1}$, ed è di classe diversa da M'; se $M=a_p^\alpha a^\beta_{p+1}$, si ha $M'=a_\beta a^p_{\alpha+\beta}$, ed $N'=a_1^\nu a_{\alpha+\beta+1}$, anche di classe diversa da M'. Esclusi questi due casi, il problema è sempre possibile.

Supponiamo per fissar le idee che M contenga quattro elementi, e sia:

$$M=a_p^\alpha a_q^\beta a_r^\gamma a_s^\delta ,$$

la coniugata M' di M, con gl' indici in ordine crescente (nota al n.° 23), sarà:

$$M'=a_\delta^{s-r}\, a_{\gamma+\delta}^{r-s}\, a_{\beta+\gamma+\delta}^{q-p}\, a_{\alpha+\beta+\gamma+\delta}^{p} ;$$

ma a questo punto occorre distinguere due casi: 1°, $s-r>1$; 2°, $s-r=1$.

Caso 1°; $s-r>1$. In questo caso la combinazione N' successiva e superiore ad M' ha la forma:

$$N'=a_1^{\nu}\, a_{\delta+1}\, a_{\gamma+\delta}^{r-q}\, a_{\beta+\gamma+\delta}^{q-p}\, a_{\alpha+\beta+\gamma+\delta}^{p} ,$$

e resta nella classe di M', qualunque numero di elementi abbia M. Quindi N, conjugata di N', è di grado eguale a quello di M, e si ha in effetti:

$$N=a_p^\alpha\, a_q^\beta\, a_r^{\gamma-1}\, a_{r+1}^{\delta}\, a_z .$$

Il peso di N essendo eguale al peso di M, l'indice z è determinato dalla formola:

$$z=r+s\delta-(r+1)\delta , \qquad (1)$$

e perciò: *l' indice* Z *dell'ultimo elemento di* N *è uguale al penultimo indice di* M, *accresciuto della differenza tra il peso dell' ultimo fattore di* M *e quello del penultimo fattore di* N.

Paragonando ora le combinazioni M ed N risulta, che nel caso di $s > r+1$, la M si cangia in N modificando solo i due ultimi fattori a_r^γ, a_s^δ nel modo seguente: *Si diminuisca di* UNO *l'esponente* γ *del primo, si cangi in* $r+1$ *l'indice* s *del secondo, e s'introduca in ultimo l'elemento semplice* a_z, *il cui indice* z *renda il peso di* N *eguale a quello di* M.

Dopo la regola data per determinare il valore di z, riesce semplicissimo ed immediato il passaggio da M ad N. Per esempio da $M = a_2^2 a_3^2 a_6^3$ si ha subito $N = a_2^3 a_3 a_4^3 a_9$; $M = a_2^3 a_4^5$ darebbe $N = a_2^2 a_3^5 a_7$, ecc. ecc.

La trasformazione è più semplice quando $\delta = 1$; in questa ipotesi la formola (1) si riduce a $z = s-1$; e quindi da $M = a_p^\alpha a_q^\beta a_r^\gamma a_s$ si passa subito ad $N = a_p^\alpha a_q^\beta a_r^{\gamma-1} a_{r+1} a_{s-1}$.

Bisogna osservare che l'ultimo indice z in N non può riuscire inferiore al penultimo indice $r+1$, perchè nella formola (1), essendo per ipotesi $s > r+1$, la differenza $s\delta - (r+1)\delta$ è sempre positiva, diversa da zero, ed in generale maggiore di 1. Questa differenza si riduce ad 1, ove si abbia ad un tempo $\delta = 1$ ed $s = r+2$; allora i due ultimi fattori di N si riducono entrambi ad a_{r+1}, e debbono riunirsi nell'unico fattore a^2_{r+1}.

Caso 2°; $s = r+1$. In questa ipotesi M è della forma:

$$M = a_p^\alpha a_q^\beta a_r^\gamma a_{r+1}^\delta$$

e si ha successivamente:

$$M = a_\delta \, a_{\gamma+\delta}^{r-q} \, a_{\beta+\gamma+\delta}^{q-p} \, a_{\alpha+\beta+\gamma+\delta}^{p} \;, \quad N' = a_1^y \, a_{\gamma+\delta+1} \, a_{\beta+\gamma+\delta}^{q-p} \, a_{\alpha+\beta+\gamma+\delta}^{p} \;, \quad N = a_p^\alpha \, a_q^{\beta-1} \, a_{q+1}^{\gamma+\delta} \, a_z \,,$$

dove z rende sempre il peso di N eguale al peso di M, e si ha:

$$z = q + [r\gamma + (r+1)\delta] - (q+1)(\gamma+\delta) \,;$$

di modo che nel caso presente: *L'indice* z *equivale al terz'ultimo indice di* M, *accresciuto della differenza tra il peso complessivo de' due ultimi fattori di* M *e quello del penultimo fattore di* N.

Dunque M si trasforma in N modificando come segue i tre ultimi fattori a_q^β, a_r^γ, a_{r+1}^δ: *Si diminuisca di* UNO *l'esponente* β *del primo; si cangi nel secondo l'indice* r *in* $q+1$ *e l'esponente* γ *in* $\gamma+\delta$, *e si sostituisca all'ultimo l'elemento semplice* a_z, *il cui indice* z *rende in ogni caso il peso di* N *eguale a quello di* M.

Così da $M = a_1^2 a_2^3 a_4^2 a_5^2$ si ha $N = a_1^2 a_2^2 a_3^4 a_8$; da $M = a_1^3 a_4^2 a_5^3$ verrebbe $N = a_1^2 a_2^5 a_{14}$; ecc..ecc.

Anche nel caso presente l'ultimo indice z di N non può essere più piccolo dell'indice precedente $q+1$, come immediatamente risulta dalla sua espressione cui può darsi la forma:

$$z = q + \delta + [r - (q+1)](\gamma+\delta) \,;$$

secondo le ipotesi $r > q$; e perciò la differenza $r - (q+1)$ non può essere negativa. Questa differenza si annulla quando $r = q+1$, e quindi, se si abbia ad un tempo $\delta = 1$, si avrà semplicemente $z = q+1$; vale a dire l'ultimo indice z di N riesce uguale al-

l'indice precedente $q+1$ se i tre ultimi indici di M sono i numeri consecutivi q, $q+1$, $q+2$, e nello stesso tempo l'ultimo esponente δ eguale ad 1; così da $M = a_p^{\alpha} a_q^{\beta} a_{q+1}^{\gamma} a_{q+2}$ segue $N = a_q^{\alpha} a_q^{\beta-1} a_{q+1}^{\gamma+1} a_{q+1}$, o meglio $N = a_p^{\alpha} a_q^{\beta-1} a_{q+1}^{\gamma+2}$.

29. Come dalla data combinazione M se ne deduce un'altra dello stesso grado, così da questa può dedursene un'altra, poi da questa un'altra, e così di seguito finchè si possa, cioè finchè non si giunga ad una combinazione di un solo elemento, o di due elementi, ma con indici differenti di uno. In questo modo si ottiene un sistema di combinazioni di uno stesso grado, dotate della proprietà che le loro conjugate, necessariamente di classe eguale al grado, sono di rango successivo ascendente.

Segue da questa proprietà che per trovare tutte le combinazioni di grado assegnato m basta applicare il processo prendendo come *iniziale* la combinazione di grado m conjugata alla combinazione di rango più basso della m^{ma} classe, vale a dire alla prima combinazione di questa classe, $a^{n-m} a_m$ (n.° 18, II); e quindi la combinazione iniziale per la ricerca di tutte quelle di grado m sarà $a_1^{m-1} a_{n-m+1}$. Il sistema delle combinazioni di grado m, trovate col metodo attuale, coincide adunque esattamente col sistema conjugato a quello delle combinazioni della m^{esima} classe; ed in tal guisa è riprodotto il teorema già enunciato al n.° 27.

30. Il complesso de' sistemi di combinazioni di tutt'i gradi $1, 2, 3, \ldots, n$ riproduce, diversamente disposto, il completo sistema delle combinazioni di peso n, che si ottiene co' metodi precedenti: questo ordinato per rango ascendente, quello per gradi ascendenti; ma i due sistemi sono tra loro conjugati. Per esempio, le combinazioni di peso 9 ordinate per gradi sarebbero:

$$\begin{array}{lllllllll}
a_9, & a_1 a_8, & a_1^2 a_7, & a_1^3 a_6, & a_1^4 a_5, & a_1^5 a_4, & a_1^6 a_3, & a_1^7 a_2, & a_1^9 \\
 & a_2 a_7, & a_1 a_2 a_6, & a_1^2 a_2 a_5, & a_1^3 a_2 a_4, & a_1^4 a_2 a_3, & a_1^5 a_2^2 & & \\
 & a_3 a_6, & a_1 a_3 a_5, & a_1^2 a_3 a_4, & a_1^3 a_3^2, & a_1^3 a_2^3 & & & \\
 & a_4 a_5, & a_1 a_4^2, & a_1 a_2^2 a_4, & a_1^2 a_2^2 a_3 & & & & \\
 & & a_2^2 a_5, & a_1 a_2 a_3^2, & a_1 a_2^4 & & & & \\
 & & a_2 a_3 a_4, & a_2^2 a_3 & & & & & \\
 & & a_3^3 & & & & & &
\end{array}$$

e le coniugate riprodurrebbero il sistema ordinato per rango ascendente.

31. La ricerca delle combinazioni di peso n e di grado m nella teoria della partizione corrisponde alla ricerca delle partizioni di n in m parti uguali o disuguali. Ora le regole algoritmiche, date per risolvere la prima quistione, si traducono facilmente in regole di partizione esaminando come funzionano nelle partizioni corrispondenti alle combinazioni M ed N. Indicando queste partizioni rispettivamente con P e Q, nella ipotesi di $s > r+1$, si ha:

$$P = \overset{\alpha \text{ parti } p}{\overline{pp \ldots pp}} \; \overset{\beta \text{ parti } q}{\overline{qq \ldots qq}} \; \overset{\gamma \text{ parti } r}{\overline{rr \ldots rr}} \; \overset{\delta \text{ parti } s}{\overline{ss \ldots ss}},$$

$$Q = \overset{\alpha \text{ parti } p}{\overline{pp \ldots pp}} \; \overset{\beta \text{ parti } q}{\overline{qq \ldots qq}} \; \overset{(\gamma-1) \text{ parti } r}{\overline{rr \ldots r}} \; \overset{\delta \text{ parti } (r+1)}{\overline{(r+1)(r+1) \ldots (r+1)}} \; \overset{1 \text{ parte}}{\overline{z}};$$

vale a dire per passare dalla partizione P a Q bisogna sostituire la parte $r+1$ all' ultima delle parti r a dritta delle parti s in P, ed a ciascuna di queste stesse parti, eccetto l'ultima, alla quale bisogna sostituire il numero z, che rende la somma di tutte le parti di Q uguale alla somma di tutte le parti di P; numero evidentemente uguale ad $r+\delta s-(r+1)\delta$. Ora richiamando la regola di Hindenburg (pag. 11) per dedurre l'una dall' altra le partizioni di un numero in m parti, si riconosce senza più che, quando $s>r+1$, il processo per passare da P a Q coincide esattamente con la regola di Hindenburg; ma ora è chiaro che la conchiusione non è diversa nella ipotesi di $s=r+1$, perchè in questo caso si ha:

$$P=\overbrace{pp\ldots pp}^{\alpha \text{ parti } p}\ \overbrace{qq\ldots qq}^{\beta \text{ parti } q}\ \overbrace{rr\ldots rr}^{\gamma \text{ parti } r}\ \overbrace{(r+1)(r+1)\ldots(r+1)(r+1)}^{\delta \text{ parti } (r+1)},$$

$$Q=\overbrace{pp\ldots pp}^{\alpha \text{ parti } p}\ \overbrace{qq\ldots q}^{(\beta-1) \text{ parti } q}\ \overbrace{(q+1)(q+1)\ldots(q+1)(q+1)}^{(\gamma+\delta) \text{ parti } (q+1)}\ \overbrace{z}^{1 \text{ parte}}.$$

Ciò che precede dimostra che il sistema delle partizioni di un dato numero n in m parti uguali o disuguali *) risultante dal nostro algoritmo isobarico, coincide esattamente con quello che risulta dalla regola di Hindenburg; e quindi segue il teorema già annunciato (pag. 15), che: *I sistemi di partizioni di uno stesso numero di* Boscovich *e di* Hindenburg *sono tra loro conjugati.*

*) Occorrendo in molti casi di doversi decomporre un numero in un numero assegnato di parti *disuguali*, faremo osservare che questa decomposizione può farsi dipendere da quella in parti uguali o disuguali. Supponendo il sistema delle partizioni di n in m parti uguali o disuguali, alle $m-1$ parti di ognuna, a contare dalla seconda all' ultima, si aggiungono per ordine i numeri della serie naturale $1, 2, 3, \ldots, m-1$; è chiaro che in tal guisa quelle partizioni divengono tutte le possibili partizioni in m parti disuguali del numero $n+\frac{m(m-1)}{2}$; nè oltre a questa può esservene alcun'altra, perchè se vi fosse, togliendo dalle sue parti, a contar dalla seconda, i numeri $1, 2, 3, \ldots, m-1$, ne risulterebbe una nuova partizione di n in m parti, non compresa tra le prime. Può vedersene a lato un esempio; nello specchietto I sono iscritte le partizioni di 10 in tre parti uguali o disuguali (e, già s'intende, con le parti sempre disposte in ordine crescente); e nello specchietto II si trovano quelle formate dalle prime, con aggiungere ordinatamente alle ultime tre parti di ciascuna i numeri 1, 2, 3; queste ultime sono adunque tutte le possibili partizioni del numero 16 in quattro parti disuguali.

I.	II.
1 1 1 7	1 2 3 10
1 1 2 6	1 2 4 9
1 1 3 5	1 2 5 8
1 1 4 4	1 2 6 7
1 2 2 5	1 3 4 8
1 2 3 4	1 3 5 7
1 3 3 3	1 4 5 6
2 2 2 4	2 3 4 7
2 2 3 3	2 3 5 6

Per tanto, volendosi le partizioni di un numero n in m parti disuguali, si cercheranno prima le partizioni in m parti uguali o disuguali del numero $n-\frac{m(m-1)}{2}$; e da queste si passerà a quelle, aggiungendo per ordine alle ultime $m-1$ parti di ognuna, a contar dalla seconda, i numeri $1, 2, 3, \ldots, m-1$.

Da ciò che precede risultano immediatamente questi teoremi di Eulero:

Il numero delle partizioni di n *in* m *parti uguali o disuguali è uguale a quello delle partizioni del numero* $n+\frac{m(m-1)}{2}$ *in* m *parti disuguali.*

Il numero delle partizioni di n *in* m *parti disuguali è uguale a quello delle partizioni del numero* $n-\frac{m(m-1)}{2}$ *in* m *parti uguali o disuguali.*

E da questo, messo di accordo con quello enunciato nella nota al num. 27, è facile di dedurre che:

Il numero delle partizioni di n *in* m *parti disuguali è uguale a quello delle partizioni del numero* $n-\frac{m(m+1)}{2}$ *in parti uguali o disuguali non maggiori di* m

Capitolo III.

Art. 1.° — *Funzioni isobariche.*

32. Una funzione intera e razionale degli elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ si dice *isobarica di peso* n, se i termini sono combinazioni di peso n con coefficienti qualunque, indipendenti dagli elementi; ed è *completa*, se comprende tutte le combinazioni del detto peso. Le funzioni che avremo a considerare si supporranno sempre complete, e le distingueremo in *ordinarie* e a *divisori fattoriali;* sono a *divisori fattoriali,* se ogni combinazione è divisa pe' fattoriali di tutti gli esponenti, e sono *ordinarie* senza questi divisori.

Noi abbiamo già considerato (n.° 10) la somma di tutte le combinazioni di peso n, relative al dato sistema di elementi a; ed ora risulta dalla precedente definizione che quella somma è la più semplice delle funzioni isobariche, poichè ha tutt'i coefficienti uguali ad 1. Intanto, siccome importa di tener distinto questo caso particolare, ritenuta la denominazione di funzione isobarica pel caso generale di coefficienti qualunque, continueremo a dare alla semplice somma il nome di *polinomio isobarico*, designandolo col simbolo già convenuto A_n. Che se ogni combinazione debba dividersi pe' fattoriali degli esponenti, lo additeremo nello stesso simbolo dandogli un doppio accento; e però, scrivendo A''_n, intendiamo la somma di tutte le combinazioni di peso n a divisori fattoriali. Così, per esempio, si ha:

$$A_1 = a_1 \quad , \quad A''_1 = a_1$$

$$A_2 = a_1^2 + a_2 \quad , \quad A''_2 = \frac{a_1^2}{2!} + a_2$$

$$A_3 = a_1^3 + a_1\, a_2 + a_3 \quad , \quad A''_3 = \frac{a_1^3}{3!} + a_1 a_2 + a_3$$

$$A_4 = a_1^4 + a_1^2 a_2 + a_2^2 + a_1 a_3 + a_4 \quad , \quad A''_4 = \frac{a_1^4}{4!} + \frac{a_1^2 a_2}{2!} + \frac{a_2^2}{2!} + a_1 a_3 + a_4$$

$$\text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \quad , \quad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.}$$

Per $n = 0$ i valori di A_n ed A''_n si riducono all'unità (n.° 2); ond'è che $A_0 = 1$, $A''_0 = 1''$.

33. Occorrendo di rappresentare di una maniera più esplicita le somme A_n ed A''_n adopreremo talvolta la notazione comune

$$A_n = \sum a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3} \ldots a_m^{\varepsilon_m} \quad , \quad A_n'' = \sum \frac{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3} \ldots a_m^{\varepsilon_m}}{\varepsilon_1!\, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_m!} ,$$

dove il Σ va esteso alle soluzioni intere e positive o nulle dell'equazione

$$1 . \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \ldots + m\varepsilon_m = n ;$$

però, siccome la dichiarazione della estensione del Σ non fa che ridurre le somme alle

sole combinazioni di peso n, potremo dispensarcene e supplirla segnando il peso come indice del Σ; e quindi avremo, senza bisogno di altre dichiarazioni,

$$A_n = \Sigma_n a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3} \ldots a_m^{\varepsilon_m} \quad , \quad A''_n = \Sigma_n \frac{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3} \ldots a_m^{\varepsilon_m}}{\varepsilon_1! \, \varepsilon_2! \ldots \varepsilon_m!} .$$

Ma più spesso sottoporremo al Σ una combinazione generale $a_p^\alpha a_q^\beta a_r^\gamma \ldots a_t^\lambda$, e scriveremo

$$A_n = \Sigma_n a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda \quad , \quad A''_n = \Sigma_n \frac{a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!} ,$$

intendendosi esteso il Σ a tutte le combinazioni di peso n, il che è accennato dall'indice n; e ciò importa la relazione

$$p\alpha + q\beta + \ldots + t\lambda = n .$$

34. Qualunque funzione isobarica può riguardarsi come ciò che diviene, a seconda de' casi, l'uno o l'altro dei due polinomii A_n, A''_n, modificandone convenientemente i coefficienti; ed esprimeremo questo concetto scrivendo $|kA_n|$ o $|kA''_n|$ per significare che ogni termine di A_n o di A''_n debba moltiplicarsi per una costante k, la quale varia in generale da un termine all' altro, ma costante nel senso che non dipende dagli elementi a. Queste funzioni sono *determinate* quando è data la legge che regola i coefficienti k.

Ordinariamente il valore di k relativo ad un termine qualunque è una funzione del suo grado, la stessa per tutt'i termini. Indicando, in genere, con g i gradi de' termini, e con $\varphi(g)$ una funzione di g, che non divenga nè infinita, nè indeterminata per qualsivoglia valore intero e positivo di g, a cominciar da zero, e che diremo *funzione caratteristica,* supporremo $k = \varphi(g)$; e le due funzioni isobariche diverranno

$$|\varphi(g) A_n| \quad \text{e} \quad |\varphi(g) A''_n| .$$

Secondo il significato di queste notazioni un termine qualunque ha per coefficiente il valore, che prende $\varphi(g)$, ponendovi per g il grado del termine; e perciò negli sviluppi delle due forme i coefficienti della combinazione $a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda$, saranno rispettivamente

$$\varphi(\alpha + \beta + \ldots + \lambda) \quad \text{e} \quad \frac{\varphi(\alpha + \beta + \ldots + \lambda)}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!} .$$

È stato già osservato che per $n = 0$ si ha $A_0 = 1$ ed $A''_0 = 1$; ma in questa ipotesi si ha $g = 0$; dunque, quando il peso delle due funzioni isobariche si riduce a zero, i loro valori si riducono semplicemente a $\varphi(0)$.

Premesse queste nozioni generali, noi ci occuperemo più specialmente delle funzioni isobariche a divisori fattoriali, che sono dotate di rimarchevoli proprietà. Per rappresentarle in compendio adotteremo il simbolo V_n, dove l' indice n dinota sempre il peso, e sarà quindi

$$V_n = |\varphi(g) A''_n| ,$$

o con notazione più esplicita

$$V_n = \Sigma_n \varphi(g) \frac{a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!} ; \qquad [V_0 = \varphi(0)].$$

Proprietà elementari delle funzioni isobariche a divisori fattoriali

35. Se le n funzioni $V_{n-1}, V_{n-2}, V_{n-3}, \ldots, V_1, V_0$ si moltiplichino ordinatamente una volta per $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$, ed una volta per $a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, (n-1)a_{n-1}, na_n$, le somme de' prodotti

$$a_1V_{n-1}+a_2V_{n-2}+a_3V_{n-3}+\ldots+a_nV_0 \quad , \quad a_1V_{n-1}+2a_2V_{n-2}+3a_3V_{n-3}+\ldots+na_nV_0 ,$$

saranno entrambe funzioni isobariche *determinate*, di peso n, ed a divisori fattoriali.

Che queste somme siano funzioni isobariche di peso n è evidente; ma di più ciascuna è completa, perchè se mancasse una combinazione $P=a_p^{\alpha} a_q^{\beta} \ldots a_t^{\lambda}$, in V_{n-p} mancherebbe la combinazione $Q=a_p^{\alpha-1} a_q^{\beta} \ldots a_t^{\lambda}$; il che non è vero, le V essendo per ipotesi tutte funzioni isobariche complete. Resta a determinare i coefficienti.

Risulta dalle precedenti osservazioni che la combinazione P deve riprodursi in tutt' i prodotti $a_pV_{n-p}, a_qV_{n-q}, \ldots, a_tV_{n-t}$, prendendovi gli stessi coefficienti che la combinazione Q prende nelle funzioni $V_{n-p}, V_{n-q}, \ldots, V_{n-t}$. In V_{n-p} questo coefficiente è $\frac{\varphi(\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1)}{(\alpha-1)!\beta!\ldots\lambda!}$, o sotto altra forma, $\alpha\frac{\varphi(\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1)}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$; e quindi, avendosi risultamenti uniformi per le altre funzioni, è palese che nelle due somme la combinazione P prende rispettivamente i coefficienti

$$(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)\frac{\varphi(\alpha+\beta+\ldots\lambda-1)}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \quad , \quad (p\alpha+q\beta+\ldots+t\lambda)\frac{\varphi(\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1)}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} ,$$

i quali, fatta astrazione da' divisori fattoriali, e tenendo presente che

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=g \quad , \quad p\alpha+q\beta+\ldots+t\lambda=n$$

si traducono in $g\varphi(g-1)$ ed $n\varphi(g-1)$. Ne risulta che le due somme equivalgono a funzioni isobariche a divisori fattoriali, di peso n, determinate rispettivamente dalle funzioni caratteristiche $g\varphi(g-1)$ ed $n\varphi(g-1)$; e si hanno in conseguenza le due notabilissime formole

$$\text{(A)} \qquad a_1V_{n-1}+a_2V_{n-2}+a_3V_{n-3}+\ldots+a_nV_0=\left|g\varphi(g-1)A''_n\right| ,$$

$$\text{(B)} \qquad a_1V_{n-1}+2a_2V_{n-2}+3a_3V_{n-3}+\ldots+na_nV_0=\left|n\varphi(g-1)A''_n\right| ;$$

le quali hanno per l'algebra molta importanza, come si vedrà nelle applicazioni seguenti, e che deriva specialmente dalla indeterminazione della funzione $\varphi(g)$.

36. Nell'analisi precedente abbiamo tacitamente supposto indefinito il numero degli elementi a, o, che torna allo stesso, superiore al peso n. Ora, se il detto numero è uguale ad $m<n$, le proprietà dimostrate non cessano di sussistere, ma solo spariscono i termini con elementi d'ordine superiore ad m, e quindi i primi membri delle formole (A) e (B) si arrestano a' termini a_mV_{n-m} ed ma_mV_{n-m}.

Funzione isobarica particolare

37. La funzione V_n acquista una speciale importanza allorchè si prende

$$\varphi(g)=(-1)^g g\,! \; ; \qquad (1)$$

il che importa $\varphi(0)=1$; nel corso di queste ricerche la terremo distinta col carattere v, di modo che sarà

$$v_n=|(-1)^g g\,!\, A_n''|\,, \qquad (2)$$

con $v_0=1$; e si avrà sotto altra forma

$$v_n=\Sigma_n(-1)^g g\,!\,\frac{a_p^{\alpha}a_q^{\beta}\ldots a_t^{\lambda}}{\alpha\,!\,\beta\,!\ldots\lambda\,!}\,. \qquad (g=\alpha+\beta+\ldots+\lambda).$$

Niente è più semplice dello sviluppo di questa funzione perchè il coefficiente di un termine qualunque è il fattoriale del proprio grado, preso col $+$, se il grado è pari, col $-$, se impari. In generale il coefficiente della combinazione $a_p^{\alpha}\,a_q^{\beta}\ldots a_t^{\lambda}$ essendo espresso da

$$\pm\frac{(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\ldots\lambda\,!}\,,$$

è manifesto che nello sviluppo di v_n i coefficienti sono tutti numeri interi, che si calcolano facilissimamente; e si ha per esempio

$$\begin{aligned}
v_1&=-a_1\\
v_2&=a_1^2-a_2\\
v_3&=-a_1^3+2a_1a_2-a_3\\
v_4&=a_1^4-3a_1^2a_2+a_2^2+2a_1a_3-a_4 \qquad (3)\\
v_5&=-a_1^5+4a_1^3a_2-3a_1a_2^2-3a_1^2a_3+2a_2a_3+2a_1a_4-a_5\\
v_6&=a_1^6-5a_1^4a_2+6a_1^2a_2^2-a_2^3+4a_1^3a_3-6a_1a_2a_3+a_3^2-3a_1^2a_4+2a_2a_4+2a_1a_5-a_6
\end{aligned}$$

ecc. ecc. ecc. ecc. ecc.

Ma la funzione v_n, oltre al significato che prende dalla definizione, è suscettibile di diverse altre interpretazioni, che meritano di essere dichiarate, e per le quali essa acquista nell'Algebra una estesa influenza.

Prima interpretazione della funzione v_n

38. Applicando alla funzione v_n la formola (A) si osserverà che, in virtù della relazione (1), si ha $\varphi(g-1)=(-1)^{g-1}(g-1)\,!$, e $g\varphi(g-1)=-(-1)^g g\,!$; quindi il secondo membro si riduce a $-|(-1)^g A''_n|$, o, secondo la (2), a v_n; e quella formola diviene in conseguenza

$$a_1v_{n-1}+a_2v_{n-2}+\ldots+a_{n-1}v_1+a_nv_0=-v_n\,,$$

ovvero

$$v_n+a_1v_{n-1}+a_2v_{n-2}+\ldots+a_{n-1}v_1+a_nv_0=0\,. \qquad (4)$$

Posto ciò, dando ad n i valori 1, 2, 3, . . . , questa formola porge il sistema lineare

$$
\begin{aligned}
&v_1 + a_1 = 0 \\
&v_2 + a_1 v_1 + a_2 = 0 \\
&v_3 + a_1 v_2 + a_2 v_1 + a_3 = 0 \\
&v_4 + a_1 v_3 + a_2 v_2 + a_3 v + a_4 = 0 \\
&\text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.}
\end{aligned} \tag{5}
$$

che può dare l'uno dopo l'altro i valori di $v_1, v_2, v_3, \ldots$, espressi mediante gli elementi a, e naturalmente si riprodurrebbero i valori (3); ma, risolvendolo in generale rispetto a v_n, porremo il determinante

$$
P_n = \begin{vmatrix}
a_1 & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\
a_2 & a_1 & 1 & \ldots 0 & 0 \\
a_3 & a_2 & a_1 & \ldots 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots a_1 & 1 \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots a_2 & a_1
\end{vmatrix}
$$

ed il valore di v_n sarà definito dalla formola

$$v_n = (-1)^n P_n ,$$

la quale dimostra che la funzione isobarica v_n, a parte il segno, equivale al determinante P_n. Ora, essendo inversamente

$$P_n = (-1)^n v_n ,$$

si vede che lo sviluppo del determinante P_n può farsi dipendere da quello della funzione isobarica v_n, che si ottiene molto più semplicemente, e più di tutto perchè non vi è luogo a riduzioni, come ne' metodi per lo sviluppo de' determinanti.

39. È agevole di far dipendere dalle funzioni v il determinante più generale

$$
Q_n = \begin{vmatrix}
k_1 & 1 & 0 & \ldots 0 \\
k_2 & a_1 & 1 & \ldots 0 \\
k_3 & a_2 & a_3 & \ldots 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
k_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots a_1
\end{vmatrix} . \tag{5}
$$

In fatti l'elemento k_i della prima verticale ha per complemento un determinante riducibile a P_{n-i}, e che, algebricamente considerato, equivale a $(-1)^{i+1} p_{n-i}$, e quindi a

$(-1)^{n-1} v_{n-1}$; dunque i complementi algebrici della prima verticale equivalgono ordinatamente alle funzioni $v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3}, \ldots, v_1, v_0$, prese tutte col segno $(-1)^{n+1}$; e si ha in conseguenza

$$Q_n = (-1)^{n+1}\left(k_1 v_{n-1} + k_2 v_{n-2} + k_3 v_{n-3} + \ldots + k_n v_0\right). \tag{7}$$

Seconda interpretazione della funzione isobarica v_n.

40. Supponendo che la funzione fratta $\dfrac{1}{1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}$ sia sviluppata in

$$1 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

è chiaro che i coefficienti h sono determinati dal sistema lineare

$$h_1 + a_1 = 0 \quad , \quad h_2 + a_1 h_1 + a_2 = 0 \quad , \quad h_3 + a_1 h_2 + a_2 h_1 + a_3 = 0 \quad , \quad \text{ecc. ecc.}$$

il quale è identico al sistema (5); si ha quindi $h_1 = v_1$, $h_2 = v_2$, ...; e ne segue

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m} = 1 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_n x^n + \ldots. \tag{8}$$

Questa formola dimostra che la funzione isobarica v_n esprime il coefficiente di x^n nello sviluppo del primo membro in potenze ascendenti di x.

41. È evidente che lo sviluppo di qualunque funzione fratta razionale può farsi immediatamente dipendere dalle funzioni v. Infatti, se $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ indicano quantità costanti, moltiplicando i due membri della (8) per $b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1} x^{m-1}$, si avrà un risultamento della forma

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1}}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m} = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_n x^n + \ldots; \tag{9}$$

ma si trova facilmente che $\mu_0 = b_0$, $\mu_1 = b_0 v_1 + b_1$, $\mu_2 = b_0 v_2 + b_1 v_1 + b_2$, ..., ed in generale

$$\mu_n = b_0 v_n + b_1 v_{n-1} + b_2 v_{n-2} + \ldots + b_{m-1} v_{n-m+1}.$$

Terza interpretazione della funzione isobarica v_n.

42. Chiamando $a, b, c, \ldots, l$ le radici dell'equazione

$$X_m = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

si ha identicamente

$$\frac{1}{x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m} = \frac{1}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)};$$

e quindi, mutando x in $\dfrac{1}{x}$, verrà

$$\frac{1}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m} = \frac{1}{(1-ax)(1-bx)\ldots(1-lx)},$$

il secondo membro è riducibile a $(1-ax)^{-1}(1-bx)^{-1}\ldots(1-lx)^{-1}$; ma cangiando i binomî ne' noti sviluppi, e sostituendo al primo membro lo sviluppo (8), si avrà

$$1+v_1x+v_2x^2+v_3x^3+\ldots=(1+ax+a^2x^2+\ldots)(1+bx+b^2x^2+\ldots)\ldots(1+lx+l^2x^2+\ldots),$$

e saranno eguali ne' due membri i coefficienti delle potenze simili di x. Ora, visto che nel secondo membro ogni potenza di x è accompagnata da una potenza simile di una radice, si riconosce subito la legge che regola i coefficienti nello sviluppo del prodotto. Il coefficiente di x è somma di tutte le radici; quello di x^2 somma de' prodotti di tutte le radici due a due, con ripetizione; quello di x^3, somma de' prodotti di tutte le radici, tre a tre, con ripetizione; e così di seguito. Dunque il coefficiente di x^n equivale alla somma de' prodotti delle radici, prese n ad n, con ripetizione, ossia alla somma di tutte le funzioni simmetriche di grado n; quindi, eguagliando i coefficienti delle potenze simili di x ne' due membri, si ottengono le relazioni

$$v_1=\Sigma a$$
$$v_2=\Sigma a^2+\Sigma ab$$
$$v_3=\Sigma a^3+\Sigma a^2b+\Sigma abc$$
$$v_4=\Sigma a^4+\Sigma a^3b+\Sigma a^2b^2+\Sigma a^2bc+\Sigma abcd$$
ecc. ecc. ecc.

e ne segue che: *La funzione isobarica* v_n, *relativa a' coefficienti dell' equazione* $X_m=0$, *esprime la somma di tutte le funzioni simmetriche delle radici, di grado* n; *o, in breve, la funzione simmetrica completa di grado* n.

Così, mentre a_n coefficiente di x^n nella equazione $X_m=0$, esprime la somma dei prodotti delle radici, prese n ad n, senza ripetizione, la funzione V_n, al contrario, esprime ancora la somma de' prodotti n ad n delle stesse radici, ma con ripetizione *).

Valori di v_n in casi particolari

43. Diverse applicazioni esigono che si possono definire *a priori* i valori della funzione v_n relativi alle due equazioni particolari

$$x^m-1=0 \qquad (10)$$

$$x^m+x^{m-1}+\ldots+x+1=0 \qquad (11)$$

qualunque sia il grado m.

Il valore di v_n relativo all'equazione binomia è quello che prende la funzione sim-

*) Questa proprietà venne da noi dedotta da altri principî in una nota intorno alle funzioni simmetriche complete, già considerate dal Wronski col nome di funzioni *aleph* dalla caratteristica in carattere ebraico di cui si valeva per dinotarle, ed inserita nel vol. 2° del *Giornale di Matematiche* (1864). La dimostrazione data nel testo è dovuta al ch. Prof. Fergola, dal quale mi venne gentilmente comunicata.

*

metrica completa delle radici dell'equazione $X_m=0$ quando i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_m$ si annullano tutti, eccetto l'ultimo a_m, che diviene -1; ma, invocando la definizione di v_n, è chiaro che questo valore coincide con quello che prende nella stessa ipotesi la funzione isobarica

$$\left|(-1)^g g!\,A''_n\right|. \qquad (12)$$

Ora, quando gli elementi si riducono al solo a_m, il polinomio isobarico A_n non può che ridursi ad una sola combinazione della forma $a_m^{\ k}$, la quale importa $n=mk$; ma, perchè quel polinomio non sia nullo, è necessario che n sia divisibile per m. Ciò supposto, si avrà $A_n=a_m^{\ k}$; indi $A''_n=\frac{1}{k!}a_m^{\ k}$; e però, essendo nel caso attuale $g=k$, il valore della funzione (12) si riduce a $(-1)^k\frac{k!}{k!}a_m^{\ k}$, vale a dire a $(1-)^k a_m^{\ k}$. Quando $a_m=-1$, questo valore torna equivalente ad 1; e ne risulta che per l'equazione binomia (10) di grado m si ha

$$v_n=1 \quad , \quad \text{se } n \text{ è multiplo di } m\,;$$

$$v_n=0 \quad , \quad \text{in qualunque altro caso}\,.$$

44. Segue dalla seconda interpretazione che il valore di v_n relativo alla equazione binomia esprime ancora il coefficiente di x^n nello sviluppo della funzione $\frac{1}{1-x^m}$; e però questo coefficiente sarà 1 o zero, secondo chè n è o no divisibile per m: come del resto è subito confermato dalla semplice divisione.

45. Considerando ora il valore di v_n in rapporto alla equazione (11) osserviamo che esso è il valore che prende la funzione simmetrica completa delle radici dell'equazione $X_m=0$ quando tutt'i coefficienti si riducono all'unità, e coincide con quello che prende nella stessa ipotesi la funzione isobarica (12); di guisa che, in realtà, esso esprime la somma algebrica di tutt'i coefficienti nello sviluppo di questa funzione; ma sotto questo punto di vista la determinazione del valore di v_n non sarebbe agevole; ed è ancora la seconda interpretazione che darà subito la risoluzione della quistione.

Infatti nel caso attuale si ha che v_n è il coefficiente di x^n nello sviluppo della funzione $\frac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^m}$, cui può darsi la forma $\frac{1-x}{1-x^{m+1}}$; ma, se si dinota con w_n il coefficiente di x^n in $\frac{1}{1-x^{m+1}}$, segue dal n.° 41 che il coefficiente di x^n in quella forma è espresso da w_n-w_{n-1}; dunque risulta

$$v_n=w_n-w_{n-1}\,.$$

Posto ciò, se niuno de' due numeri n ed $n-1$ è divisibile per $m+1$, si avrà ad un tempo (n.° 44) $w_n=0$ e $w_{n-1}=0$, e quindi anche $v_n=0$; se n è divisibile, non potrà esserlo $n-1$; in tal caso si ha $w_n=1$, $w_{n-1}=0$, e di seguito $v_n=1$; se, al contrario, è divisibile $n-1$, non può esserlo n; sicchè si avrà $w_n=0$, $w_{n-1}=1$, e quindi $v_n=-1$. Laonde, riassumendo, possiamo conchiudere che in rapporto all'equazio-

ne (11), di grado m, la funzione v_n non può prendere che tre distinti valori, cioè 1, -1, 0; e si ha propriamente

$$\left.\begin{array}{lll} v_n = 1 & , \text{ se } n \text{ è divisibile per } m+1 & , \text{ o se } n \equiv 0 \\ v_n = -1 & , \text{ se } n-1 \text{ è divisibile per } m+1 & , \text{ o se } n \equiv 1 \end{array}\right\} (\text{mod. } m+1)$$

$$v_n = 0 \quad , \text{ in qualunque altro caso.}$$

E sono questi ancora i soli valori che può prendere la somma algebrica de' coefficienti nella espressione sviluppata di v_n, il che costituisce una ragguardevole proprietà. Ne risulta in particolare che, se $m=n$, il valore di v_n è sempre nullo; il che vuol dire che è sempre nulla la somma algebrica de' coefficienti nella espressiane di v_n, quando il numero degli elementi, cui si rapporta, è uguale al peso n, come si può verificare nelle (2). Supponiamo, ancora per esempio, che si domandi la somma de' coefficienti in v_6 quando si hanno tre soli elementi a_1, a_2, a_3; in questo caso, essendo $m=3$, e siccome nè 6, nè 5 sono divisibili per $3+1$, la somma de' coefficienti è parimenti nulla; in effetti l'ultima delle (2) si riduce a

$$v_6 = a_1^6 - 5a_1^4 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 - a_2^3 + 4a_1^3 a_3 - 6a_1 a_2 a_3 + a_3^2 ,$$

e la somma de' coefficienti è zero. Se gli elementi fossero due, a_1, a_2, essendo $m=2$, e quindi 6 divisibile per $2+1$, la somma de' coefficienti in v_6 sarà eguale ad 1, come può verificarsi, poichè in questa ipotesi si ha

$$v_6 = a_1^6 - 5a_1^4 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 - a_2^3 .$$

Art. 2.° — *Relazioni tra le funzioni* v *e le somme delle potenze simili delle radici.*

46. Indicando con s_n la somma delle potenze simili di grado n delle radici dell'equazione $X_m=0$, tra i coefficienti a e le somme s, si ha la conosciuta relazione Newtoniana

$$s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + a_3 s_{n-3} + \ldots + a_{n-1} s_1 + n a_n = 0 , \tag{1}$$

la quale, ponendo $n=1, 2, 3, \ldots$, porge il sistema lineare

$$\begin{array}{l} s_1 + a_1 = 0 \\ s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \\ s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \\ s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4a_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{2}$$

e, risolvendolo rispetto ad s_n, si avrà

$$s_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 1a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & 1 \\ n\,a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Si può sviluppare il determinante, osservando (n.° 39) che i complementi algebrici degli elementi della prima verticale equivalgono alle funzioni $v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_1, v_0$, prese col segno $(-1)^{n+1}$, e si ha in conseguenza

$$s_n = -(a_1 v_{n-1} + 2a_2 v_{n-2} + 3a_3 v_{n-3} + \dots + na_n v_0): \tag{3}$$

formola notevole, la quale fa dipendere le somme s dalle funzioni v.

47. Ma l'espressione di s_n si riduce immediatamente a' soli elementi a; applicando alla parentesi la formola (B), stabilita al n.° 35; e siccome per le funzioni v si ha $\varphi(g) = (-1)^g g!$, e quindi $\varphi(g-1) = -(-1)^g (g-1)!$, risulta che per queste funzioni quella formola diviene

$$a_1 v_{n-} + 2a_2 v_{n-2} + 3a_3 v_{n-3} + \dots + na_n v_0 = -n \left| (-1)^g (g-1)!\, A''_n \right|,$$

e si ha in conseguenza

$$s_n = n \left| (-1)^g (g-1)!\, A''_n \right|. \tag{4}$$

Questa formola dimostra che la somma s_n equivale al prodotto di n per una funzione isobarica di peso n, la quale è ciò che diviene la somma delle combinazioni a divisori fattoriali A''_n, quando ciascuna si moltiplica pel fattoriale del proprio grado diminuito di 1, e si prenda col $+$ o col $-$, secondochè il grado è pari o impari. Nella notazione ordinaria, com'è dichiarato al n.° 33, si avrebbe

$$s_n = n \sum_n (-1)^g (g-1)! \frac{a_p^{\alpha} a_q^{\beta} \dots a_t^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \dots \lambda!},$$

il Σ dovendo estendersi a tutte le combinazioni di peso n; e si ritrova così la formola ben nota data da WARING per esprimere le somme delle potenze simili delle radici mediante i coefficienti dell'equazione, e che in tal modo resta stabilita per le vie le più elementari, ed accompagnata inoltre da metodi semplicissimi per ottenerne lo sviluppo effettivo per qualunque valore di n.

48. È osservabile che l'espressione (4) di s_n si può mettere nella forma $n \left| \frac{1}{g} \times (-1)^g g!\, A''_n \right|$, e quindi tradursi in

$$s_n = n \left| \frac{1}{g} v_n \right|;$$

ora, per la notazione convenuta al n.° 34, ciò vuol dire che l'espressione di s_n risulta da quella di v_n moltiplicandola per n, e dividendone ogni termine pel proprio grado; di modo che si può passare immediatamente dalle v alle s; ed è così, per esempio, che le (2) darebbero

$$s_1 = -a_1$$

$$s_2 = a_1^2 - 2a_2$$

$$s_3 = -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3$$

$$s_4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 2a_2^2 + 4a_1 a_3 - 4a_4$$

$$s_5 = -a_1^5 + 5a_1^3 a_2 - 5a_1 a_2^2 - 5a_1^2 a_3 + 5a_2 a_3 + 5a_1 a_4 - 5a_5$$

$$s_6 = a_1^6 - 6a_1^4 a_2 + 9a_1^2 a_2^2 - 2a_2^3 + 6a_1^3 a_3 - 12a_1 a_2 a_3 + 3a_3^2 - 6a_1^2 a_4 + 6a_2 a_4 + 6a_1 a_5 - 6a_6$$

ecc. ecc. ecc. ecc. ecc. ecc.

49. Come per la funzione v_n così anche per la funzione s_n si può definire il suo valore relativamente alle radici delle equazioni (10) ed (11) considerate al n.° 43.

In quanto alla equazione binomia (10), si sa che il valore di s_n è uguale al grado m dell'equazione, se n è multiplo di n, ed è nullo nel caso opposto. Rispetto alla seconda è evidente che il valore di s_n è quello che prende l'espressione generale della somma delle potenze di grado n delle radici dell'equazione $X_m = 0$ quando i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_m$ si riducono all'unità, ed equivale in conseguenza alla somma algebrica di tutt'i coefficienti della detta espressione. Una proposizione è conosciuta a tal riguardo, ed è che la somma di questi coefficienti è sempre uguale a -1, ma questa proposizione vuol'esser meglio definita; infatti essa è vera finchè il grado m della equazione è indeterminato, o meglio finchè questo grado è superiore ad n, e cessa di esserlo quando si ha, al contrario, $m < n$. Ora, siccome è questo il caso che più frequentemente interessa le applicazioni, ridurremo qui la proposizione a giusti termini. E la cosa è molto semplice; infatti, essendo

$$x^m + x^{m-1} + \ldots + x + 1 = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$$

se si dinotano rispettivamente con s'_n ed s''_n le somme delle potenze di grado n delle radici delle due equazioni $x^{m+1} - 1 = 0$ ed $x - 1 = 0$, si ha $s_n = s'_n - s''_n$; ma s'_n equivale ad $m+1$, se n è multiplo di $m+1$, ed è zero nel caso contrario, ed s''_n è sempre uguale ad 1; dunque se n è multiplo di $m+1$, si avrà $s_n = m + 1 - 1 = m$, e nel caso opposto si avrà $s_n = -1$. Riassumendo, si ha la seguente proposizione:

Indicando s_n *la somma delle potenze di grado* n *delle radici dell'equazione*

$$x^m + x^{m+1} + \ldots + x + 1 = 0,$$

si ha

$$s_n = -1 \quad , \quad \textit{se } n \textit{ è multiplo di } m+1;$$

$$s_n = m \quad , \quad \textit{in qualunque altro caso.}$$

ART. 3.° — *Sviluppo di due particolari determinanti.*

50. Importanti ricerche conducono a determinanti delle forme

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & -2 & 0 & \dots 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & -3 & \dots 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots a_1 & -(n-1) \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta'_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 2 & 0 & \dots 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 3 & \dots 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots a_1 & n-1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

dove gli elementi iniziali delle verticali dalla seconda all' ultima sono i numeri naturali $1, 2, 3, \dots, n-1$, negativi nel primo, positivi nel secondo. Co' metodi ordinarî non è agevole di scovrire le leggi, che ne regolano gli sviluppi *); ma i principî stabiliti permettono di ridurli immediatamente a funzioni isobariche. Del resto è a notarsi che la trasformazione di uno de' due determinanti include, come vedremo, quella dell' altro; e quindi ci limiteremo a considerare il primo Δ_n.

Sia un' altra serie di elementi $b_1, b_2, b_3, \dots$, ed u_n il polinomio isobarico a divisori fattoriali, formato con la semplice somma di tutte le combinazioni di peso n, sarà

$$u_n=\sum\nolimits_n \frac{b_p^{\alpha} b_q^{\beta} \dots b_t^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \dots \lambda!}.$$

Applicando a questa funzione u_n la formola (B) del n.° 35, si osserverà che, essendo $\varphi(g)=1$, e di seguito anche $\varphi(g-1)=1$, il secondo membro si riduce ad nu_n, e la formola, scritta in ordine inverso, diverrà

$$nb_n+(n-1)b_{n-1}u_1+(n-2)b_{n-2}u_2+\dots+1.b_1 u_{n-1}-nu_n=0.$$

Ponendo $n=1, 2, 3, \dots$, si ha il sistema lineare

$$\begin{aligned} &1b_1 - 1\ u_1=0 \\ &2b_2+1b_1\ u_1- 2\ u_2=0 \\ &3b_3+2b_2\ u_1+1b_1\ u_2- 3\ u_3=0 \\ &4b_4+3b_3\ u_1+2b_2\ u_2+1b_1\ u_3-4u_4=0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

dal quale si possono trarre i valori di $u_1, u_2, u_3, \dots$, espressi mediante gli elementi b.

*) Il che è confermato da una trasformazione del secondo de' due determinanti data dall' egregio Prof. del Liceo di Campobasso, Sig. GIACOMO MOLA, nel 3° volume del *Giornale di Matematica* (1865).

Risolvendolo rispetto ad u_n risulta

$$n!\,u_n = \begin{vmatrix} 1b_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 2b_2 & 1.b_1 & -2 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 3b_3 & 2\,b_2 & 1.b_1 & -3 & \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n-1)b_{n-1} & (n-2)b_{n-2} & (n-3)b_{n-3} & (n-4)b_{n-4} & \ldots 1\,b_1 & -(n-1) \\ n\,b_n & (n-1)b_{n-1} & (n-2)b_{n-2} & (n-3)b_{n-3} & \ldots 2\,b_2 & 1\;b_1 \end{vmatrix};$$

ora, se gli elementi $b_1, b_2, b_3, \ldots$, che sono arbitrarî, si mutano in $\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots$ il determinante a dritta diviene appunto il determinante Δ_n; e si ha in conseguenza

$$\Delta_n = n!\sum_n \frac{\left(\frac{a_p}{p}\right)^\alpha \left(\frac{a_q}{q}\right)^\beta \cdots \left(\frac{a_t}{t}\right)^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}. \tag{1}$$

Il determinante Δ_n è così ridotto alla funzione isobarica formata dalla somma delle combinazioni di peso n, a divisori fattoriali, relative agli elementi frazionarî $\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots$

In quanto al determinante Δ'_n basta osservare che esso è ciò che diviene Δ_n, cambiando prima i segni a tutti gli elementi, e poscia i segni a tutte le verticali. Ora, se ne'due membri della (1) si mutano i segni agli elementi a, il primo membro Δ_n si muta in $(-1)^n\Delta'_n$; in quanto al secondo membro il cangiamento di segno agli elementi fa solo prendere il segno — alle combinazioni di grado impari; e con ciò si ottiene

$$\Delta'_n = (-1)^n n!\sum_n (-1)^g \frac{\left(\frac{a_p}{p}\right)^\alpha \left(\frac{a_q}{q}\right)^\beta \cdots \left(\frac{a}{t}\right)^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}. \tag{2}$$

Queste espressioni di Δ_n e Δ'_n, sviluppando le potenze degli elementi frazionarî, si possono mettere nelle forme

$$\Delta_n = n!\sum_n \frac{a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda! \times p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda} \tag{3}$$

$$\Delta_n = (-1)^n n!\sum_n (-1)^g \frac{a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda! \times p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda}; \tag{4}$$

e quindi è manifesto che, per sviluppare le attuali funzioni isobariche, si possono costruire le combinazioni con gli elementi di forma intera $a_1, a_2, a_3, \ldots$, salvo a dare ad ogni combinazione due specie di divisori, cioè: gli uni, i soliti fattoriali degli esponenti; e gli altri, le potenze degl'indici di tutti gli elementi, che entrano nella combinazione, di gradi eguali a'rispettivi esponenti.

Applicazioni de' determinanti Δ_n e Δ'_n alle funzioni v ed s.

51. È qui mestieri di far conoscere una importante relazione tra le s e le v. Se al valore di s_n dato dalla (3) del n.° 46 si aggiunga il primo membro della (4) del n.° 38, e si scriva la somma in ordine inverso, si avrà questa nuova relazione

$$s_n = a_{n-1} v_1 + 2a_{n-2} v_2 + 3a_{n-3} v_3 + \ldots + (n-1) a_1 v_{n-1} + n v_n ,$$

la quale, dando ad n i valori $1, 2, 3, \ldots$, porge il sistema lineare

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 . v_1 \\ s_2 &= a_1 v_1 + 2 v_2 \\ s_3 &= a_2 v_1 + 2a_1 v_2 + 3v_3 \\ s_4 &= a_3 v_1 + 2a_2 v_2 + 3a_1 v_3 + 4v_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Risolvendolo rispetto a v_n, si osserverà che il determinante del sistema si riduce ad $n!$, e che quello che entra nella espressione di v_n è divisibile per $(n-1)!$; ond' è che si ha

$$n v_n = (-1)^n \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ s_2 & a_1 & 1 & \ldots 0 & 0 \\ s_3 & a_2 & a_1 & \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & a_{n-3} & \ldots a_1 & 1 \\ s_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots a_2 & a_1 \end{vmatrix} .$$

In questo determinante i complementi algebrici degli elementi della prima verticale equivalgono (n.° 39) alle funzioni $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_1, 1$, prese tutte col segno $(-1)^{n+1}$; e quindi risulta la relazione, alla quale abbiamo accennato,

$$s_1 v_{n-1} + s_2 v_{n-2} + s_3 v_{n-3} + \ldots + s_{n-1} v_1 + s_n = n v_n ,$$

e che, scrivendone il primo membro in ordine inverso, prende la forma

$$s_n + s_{n-1} v_1 + s_{n-2} v_2 + \ldots + s_1 v_{n-1} - n v_n = 0 .$$

Questa relazione, e la relazione Newtoniana (n.° 46), permettono di esprimere le v e

le a in funzione delle s; ponendovi $n=1, 2, 3, \ldots$ si ottengono i due sistemi lineari

$$\begin{array}{lcl}
s_1 - 1 . v_1 = 0 & , & s_1 + 1 . a = 0 \\
s_2 + s_1 v_1 - 2 v_2 = 0 & , & s_2 + s_1 a + 2 a_2 = 0 \\
s_3 + s_2 v_1 + s_1 v_2 - 3 v_3 = 0 & , & s_3 + s_2 a + s_1 a_2 + 3 a_3 = 0 \\
s_4 + s_3 v_1 + s_2 v_2 + s_1 v_3 - 4 v_4 = 0 & , & s_4 + s_3 a + s_2 a_2 + s_1 a_3 + 4 a_4 = 0 , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & , & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

e, risolvendoli rispetto a v_n ed a_n, si ha

$$v_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \ldots 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \ldots s_1 & -(n-1) \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \ldots s_2 & s_1 \end{vmatrix} \quad , \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \ldots s_1 & n-1 \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \ldots s_2 & s_1 \end{vmatrix} .$$

I due determinanti si riducono subito alle funzioni isobariche; basta osservare che essi sono ciò che divengono i determinanti Δ_n e Δ'_n, considerati al n.° 48, scambiandovi le a con le s; e quindi, applicando le formole (1) e (2), risulta

$$v_n = \Sigma_n \frac{\left(\frac{s_p}{p}\right)^\alpha \left(\frac{s_q}{q}\right)^\beta \ldots \left(\frac{s_t}{t}\right)^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \quad , \quad a_n = \Sigma_n (-1)^g \frac{\left(\frac{s_p}{p}\right)^\alpha \left(\frac{s_q}{q}\right)^\beta \ldots \left(\frac{s_t}{t}\right)^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \qquad (5)$$

ovvero conformemente alle (3) e (4)

$$v_n = \Sigma_n \frac{s_p^\alpha s_q^\beta \ldots s_t^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda! \times p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda} \quad , \quad a_n = \Sigma_n (-1)^g \frac{s_p^\alpha s_q^\beta \ldots s_t^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda! \times p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda}\text{ *)} . \qquad (6)$$

Le espressioni algebriche di v_n ed a_n equivalgono adunque a funzioni isobariche formate ciascuna da tutte le combinazioni di peso n, a divisori fattoriali, relative alle somme $s_1, s_2, s_3, \ldots$, salvo inoltre a dividere ogni combinazione per le potenze degl'indici di tutt'i fattori, di gradi eguali a'rispettivi esponenti. Ma le due espressioni differiscono in ciò che mentre la prima ha tutt'i termini positivi, nella seconda sono negativi i soli termini di grado impari.

*) Questa espressione di a_n è ben conosciuta (V. Serret, *Cours d'Algèbre Supérieure*, T. I, pag. 456; e Faà di Bruno, *Théorie des formes binaires*, pag. 14), ma la sua deduzione si fa ordinariamente dipendere da principî più elevati. Sembra, come lo abbiamo già avvertito nella nota a pag. 15, che fosse dovuta ad Hindenburg.

★

ART. 4.° — *Proprietà delle funzioni isobariche dipendenti dalla derivazione.*

52. Sia u_n una funzione isobarica di peso n relativa agli elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots$, che ora riguarderemo come variabili indipendenti, ed ammetteremo inoltre che questa funzione possa essere completa o incompleta, e con coefficienti qualunque. Essendo u_n funzione intera de' detti elementi, niente è più facile della ricerca della sua derivata rispetto ad un elemento a_p; ma ciò che importa di osservare si è che i termini di u_n, i quali concorrono a formare la derivata, sono quelli soltanto in cui non manca l'elemento a_p, e che questi termini si traducono nella derivata, moltiplicati per l'esponente di a_p, e con lo stesso esponente diminuito di *uno*, da che poi segue che la derivata è anch'essa una funzione isobarica di peso $n-p$.

È chiaro dopo ciò che le due somme:

$$a_1\frac{du_n}{da_1}+a_2\frac{du_n}{da_2}+a_3\frac{du_n}{da_3}+\ldots+a_m\frac{du_n}{da_m}\quad,\quad a_1\frac{du_n}{da_1}+2a_2\frac{du_n}{da_2}+3a_3\frac{du_n}{da_3}+\ldots+m\,a_m\frac{du_n}{da_m};$$

sono entrambe funzioni isobariche di peso n, ed è possibile di determinare i coefficienti. Supponiamo che $ka_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda$ sia un termine di u_n; è manifesto che questo termine si riproduce in tutti que' termini delle due somme, in cui sono in vista gli elementi $a_p, a_q, \ldots, a_t$, ed in conseguenza si troverà nella prima somma col coefficiente $(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)k$, e nella seconda col coefficiente $(p\alpha+q\beta+\ldots+t\lambda)k$. Ma $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ esprime il grado del termine, e $p\alpha+q\beta+\ldots+t\lambda$ ne dinota il peso, cioè n; dunque la prima somma è ciò che diviene la funzione u_n, moltiplicandone ogni termine pel proprio grado, mentre la seconda riproduce la stessa funzione u_n moltiplicata pel peso n; e quindi risultano le due formole

$$a_1\frac{du_n}{da_1}+a_2\frac{du_n}{da_2}+a_3\frac{du_n}{da_3}+\ \ldots\ +a_m\frac{du_n}{da_m}=|g\,u_n|$$

$$a_1\frac{du_n}{da_1}+2a_2\frac{du_n}{da_2}+3a_3\frac{du_n}{da_3}+\ \ldots\ +ma_m\frac{du_n}{da_m}=nu_n.$$

Queste formole, delle quali la seconda è conosciuta, esprimono interessanti proprietà delle funzioni isobariche, il che si manifesta *a priori*, riflettendo all'analogia che esse hanno colla notissima proprietà delle funzioni omogenee.

53. Usiamo la notazione ordinaria $\frac{d^\mu u_p}{da_p^\alpha\, da_q^\beta \ldots da_t^\lambda}$ per significare una derivata parziale d'ordine qualunque μ della funzione u_n, presa rispetto a μ elementi qualunque eguali o disuguali; ma per brevità diremo che questa derivata è relativa alla combinazione $a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda$, e l'ordine μ della derivata sarà uguale al grado della combinazione, vale a dire alla somma degli esponenti $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Se h è il peso di questa combinazione, la derivata, come risulta da ciò che precede, sarà funzione isobarica di peso $n-h$; ma, in generale, niente altro si può affermare intorno alla sua espressione, se i coefficienti della funzione primitiva u_n sono arbitrarî.

54. Però la natura della derivata può essere perfettamente dichiarata quando il peso della combinazione è uguale a quello della funzione primitiva, vale a dire quando $h=n$.

In questo caso, che è il più interessante per le applicazioni, il peso della derivata si riduce a *zero*, ed il suo valore è una *costante*, che si definisce subito *a priori*. Sia k, nella funzione u_n, il coefficiente della combinazione $a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda$, che ora supponiamo di peso n; sarà

$$u_n = ka_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda + \text{ecc. ecc.},$$

e, quali che siano gli altri termini, è chiaro che, cercando la derivata di u_n relativa alla combinazione messa in evidenza, a derivazioni finite niente altro può restare che ciò che proviene dal termine, che contiene questa combinazione, e si ha perciò

$$\frac{d^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} u_n}{da_p^\alpha da_q^\beta \ldots da_t^\lambda} = \alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,k.$$

55. Ecco ora alcune semplici, ma generali proprietà della funzione u_n, sia o no determinata, sia o no completa. Indichiamo per chiarezza con C_n una combinazione di peso n, e con k il suo coefficiente nella funzione u_n, quando vi sia contenuta.

I. La derivata di u_n relativa alla combinazione C_n è costante ed eguale al prodotto del suo coefficiente k, moltiplicato pe' fattoriali de' singoli esponenti di C_n. E se la funzione u_n è a divisori fattoriali, la derivata è semplicemente uguale al coefficiente k.

II. È nulla la derivata di u_n relativa a C_n, se C_n non è contenuta in u_n. Reciprocamente, se la derivata è nulla, C_n non può trovarsi in u_n, e sarà $k=0$.

III. Sono nulle le derivate di u_n relative, sia ad elementi con indici superiori ad n, sia a combinazioni di peso superiore ad n.

Derivazione della funzione V_n.

56. Indipendentemente dal processo di derivazione si possono ottenere le derivate parziali di tutti gli ordini della funzione isobarica a divisori fattoriali V_n definita in generale dalla forma

$$V_n = |\varphi(g) A''_n|.$$

Segue da ciò che precede che la derivata di V_n rispetto ad un elemento qualunque a_p è funzione isobarica di peso $n-p$, ma ora è possibile di determinare i coefficienti. In fatti un termine di V_n essendo della forma (n.° 34)

$$\varphi(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)\frac{a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

nella derivata rispetto ad a_p diviene

$$\varphi(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)\frac{a_p^{\alpha-1} a_q^\beta \ldots a_t^\lambda}{(\alpha-1)!\,\beta!\ldots\lambda!},$$

e si vede che nel passaggio dalla primitiva alla derivata ogni termine ritiene il proprio coefficiente, e ritiene per divisori i fattoriali degli esponenti. Dunque la derivata è una funzione isobarica di peso $n-p$, a divisori fattoriali, perfettamente determinata; ed il coefficiente di un termine qualunque è il valore che prende la funzione $\varphi(g)$, mettendovi per g il grado dello stesso termine accresciuto di 1; ond'è che si ha

$$\frac{dV_n}{da_p} = |\varphi(g+1) A''_{n-p}| \qquad (1)$$

Quando $p = n$ la derivata è costante; allora $A''_0 = 1$, $g = 0$, e si ha semplicemente

$$\frac{dV_n}{da_n} = \varphi(1) . \qquad (2)$$

57. Questi risultamenti si estendono subito agli ordini superiori; basta che per ogni derivazione si aumenti di 1 l'argomento g della funzione $\varphi(g)$, e perciò la derivata di V_n relativa ad una combinazione di peso r e di grado μ sarà espressa da

$$\frac{d^\mu V_n}{da_p^\alpha \, da_q^\beta \, . \, . \, . \, da_t^\lambda} = \left| \varphi(g+\mu) A''_{n-r} \right| . \qquad (3)$$

Questa formola dimostra che: *La derivata della funzione isobarica* V_n, *relativa ad una combinazione qualunque di peso* r *e di grado* μ, *è un'altra funzione isobarica a divisori fattoriali, di peso* n — r; *ed il coefficiente di qualsivoglia termine è il valore che prende la funzione* φ(g) *ponendovi per* g *il grado del termine accresciuto di* μ.

58. Se il peso r della combinazione è uguale ad n, $n - r = 0$ e $g = 0$, la derivata sarà costante, e si avrà

$$\frac{d^\mu V_n}{da_p^\alpha \, da_q^\beta \, . \, . \, . \, da_t^\lambda} = \varphi(\mu) ; \qquad (4)$$

vale a dire: *La derivata di* V_n, *relativa a qualunque combinazione di peso* n, *equivale al valore che prende la funzione* φ(g), *ponendovi per* g *il grado della combinazione.*

59. Il fatto che la derivata dipende unicamente dal peso e dal grado della combinazione, conduce alla singolare proprietà, che: *Le derivate parziali della funzione* V_n *relative a combinazioni di uno stesso peso e di uno stesso grado, sono eguali tra loro.* Ora questa proprietà suggerisce una notazione più semplice, ed anche più espressiva, per le derivate parziali di ordini superiori della funzione V_n; in fatti, se si conviene di indicare con C_r^μ una combinazione di peso r e di grado μ, la derivata di V_n relativa a questa combinazione può bene essere designata da $\frac{d^\mu V_n}{dC_r^\mu}$; ed in conseguenza di questa convenzione le formole (3) e (4) diverranno

$$\frac{d^\mu V_n}{dC_r^\mu} = \left| \varphi(g+\mu) A''_{n-r} \right| \quad , \quad \frac{d^\mu V_n}{dC_n^\mu} = \varphi(\mu) . \qquad (5)$$

60. Giova da ultimo di osservare che quando $\varphi(g) = 1$, la funzione V_n si riduce ad A''_n, cioè alla somma delle combinazioni di peso n a divisori fattoriali; e si ha in tal caso

$$\frac{dA''_n}{da_p} = A''_{n-p} \quad , \quad \frac{dA''_n}{da_n} = A''_0 = 1 \quad , \quad \text{e} \quad \frac{d^\mu A''_n}{dC_r^\mu} = A''_{n-r} \quad , \quad \frac{d^\mu A''_n}{dC_n^\mu} = A''_0 = 1 .$$

Così: *La derivata del polinomio isobarico a divisori fattoriali, relativo a qualunque combinazione, è un polinomio della stessa natura, di peso uguale alla differenza tra il peso del primitivo, e quello della combinazione.*

Derivazione delle funzioni v e delle somme s.

61. La teoria precedente dà subito le derivate delle v e delle s considerate come funzioni degli elementi a, perchè definite da funzioni isobariche, che sono casi particolari di V_n. Tuttavolta, siccome queste derivate costituiscono un importante materiale algebrico, e dànno anche luogo a speciali proprietà, crediamo utile di prenderle brevemente in esame.

I. *Derivazione di* v_n *rispetto alle* a. Dalla formola

$$v_n = \left| (-1)^g g\,!\,A''_n \right|,$$

derivata rispetto ad a_p, si ottiene in virtù della (1)

$$\frac{dv_n}{da_p} = \left| (-1)^{g+1} (g+1)\,!\,A''_{n-p} \right| = -\left| (g+1) \times (-1)^g g\,!\,A''_{n-p} \right|;$$

ma la parte a dritta del segno $\times$ equivale a v_{n-p}; dunque risulta

$$\frac{dv_n}{da_p} = -\left| (g+1)\,v_{n-p} \right|; \qquad (6)$$

e ne segue che la derivata di v_n rispetto ad a_p può formarsi dalla funzione v_{n-p}, mutandole il segno, e moltiplicandone ogni termine pel proprio grado accresciuto di 1.

Quando $p = n$, la derivata è costante; e si ha semplicemente

$$\frac{dv_n}{da_n} = -1 .$$

In generale, per la derivata di v_n relativa alla combinazione C_r^μ, si ha dalla prima delle (5)

$$\frac{d^\mu v_n}{dC_r^\mu} = \left| (-1)^{g+\mu} (g+\mu)\,!\,A''_{n-r} \right|;$$

ma, dando alla funzione caratteristica la forma $(-1)^\mu (g+1)(g+2)\ldots(g+\mu) \times (-1)^g g\,!$, è chiaro che si ha

$$\frac{d^\mu v_n}{dC_r^\mu} = (-1)^\mu \left| (g+1)(g+2) \ldots (\text{[illegible]} {}_{n-r} \right|; \qquad (7)$$

e quindi è palese che anche la derivata di v_n rispetto alla combinazione C_r^μ può, come nel caso precedente, essere formata mediante la funzione di peso inferiore v_{n-r}.

Quando $r = n$, questa formola si riduce a

$$\frac{d^\mu v_n}{dC_n^\mu} = (-1)^\mu 1.2.2 \ldots \mu = (-1)^\mu \mu\,!;$$

e ne segue, che: *La derivata di* v_n, *relativa ad una combinazione di peso* n *e di grado* μ, *è uguale al fattoriale di* μ, *preso col* $+$, *se* μ *è pari, col* $-$, *se impari.*

II. *Derivazione di* s_n *rispetto alle* a. Essendo

$$s_n = n \left| (-1)^g (g-1)\,!\,A''_n \right|$$

se si deriva rispetto ad a_p, conformemente alla (1), si avrà

$$\frac{ds_n}{da_p} = -n \left| (-1)^g g\,!\,A''_{n-p} \right|.$$

Il secondo fattore equivale a v_{n-p}; quindi risulta

$$\frac{ds_n}{da_p} = -n v_{n-p}\,; \tag{8}$$

e perciò: *La derivata di* s_n *rispetto ad* a_p *è uguale e di segno contrario alla funzione* v_{n-p}, *moltiplicata per* n.

Nella ipotesi di $p=n$, essendo $v_0=1$, si ha semplicemente

$$\frac{ds_n}{da_n} = -n\,.$$

Derivando i due membri della (8) rispetto a $\mu-1$ elementi qualunque, supporremo che essi formino con a_p la combinazione C_r^{μ}; avremo così in virtù della (7)

$$\frac{d^{\mu} s_n}{dC_r^{\mu}} = (-1)^{\mu} n \left| (g+1)(g+2)\ldots(g+\mu-1) v_{n-r} \right|\,;$$

e ne segue che la derivata di s_n, rispetto ad una combinazione qualunque C_r^{μ}, può ancora essere formata mediante la funzione v_{n-r}.

Questa formola, quando $p=n$, diviene

$$\frac{d^{\mu} s_n}{dC_n^{\mu}} = (-1)^{\mu} n \times 1.2.3\ldots(\mu-1) = (-1)^{\mu} n (\mu-1)\,!$$

e dimostra che: *La derivata di* s_n *relativa alla combinazione* C_n^{μ}, *equivale al prodotto di* n *pel fattoriale di* $\mu-1$, *preso col* $+$, *se* μ *è pari, col* $-$, *se impari.*

62. In diverse applicazioni occorre di considerare le v e le a come funzioni delle somme s, e quindi cercare le corrispondenti derivate. Queste quistioni si risolvono coi medesimi principî, perchè i valori di v_n ed a_n, espressi nelle somme s, sono date da funzioni isobariche determinate, a divisori fattoriali. In fatti, indicando con S''_n la somma delle combinazioni di peso n, a divisori fattoriali, relative agli elementi frazionarî $\frac{s_1}{1}, \frac{s_2}{2}, \frac{s_3}{3}, \ldots$, le formole (5) del n.° 51 divengono

$$v_n = S''_n \quad , \quad a_n = \left| (-1)^g S''_n \right|,$$

quindi derivando rispetto all' elemento $\frac{s_p}{p}$, si avrà

$$\frac{dv_n}{d\frac{s_p}{p}} = S''_{n-p} = v_{n-p} \quad , \quad \frac{da_n}{d\frac{s_p}{p}} = -\left| (-1)^g S''_{n-p} \right| = -a_{n-p}\,;$$

e ne risulta

$$\frac{dv_n}{ds_p} = \frac{v_{n-p}}{p} \quad , \quad \frac{da_n}{ds_p} = -\frac{a_{n-p}}{p}\,.$$

Queste formole, la seconda delle quali è dovuta al Brioschi, si traducono nelle regole seguenti:

La derivata di v_n rispetto alla somma s_p è uguale alla funzione v_{n-p} divisa per p.

La derivata di a_n rispetto ad s_p è uguale e di segno contrario ad a_{n-p} diviso per p.

Nel caso particolare di $p=n$, si ha

$$\frac{dv_n}{ds_n} = \frac{v_0}{n} = \frac{1}{n} \quad , \quad \frac{da_n}{ds_n} = -\frac{a_0}{n} = -\frac{1}{n}\,.$$

63. È ora facilissima la ricerca delle derivate parziali di ordini superiori delle funzioni v_n ed a_n relative alle s. Sia $s_p^{\alpha} s_q^{\beta} \ldots s_t^{\lambda}$ una combinazione di somme s, che supponiamo di peso qualunque m e di ordine μ, di modo che si abbia

$$m = p\alpha + q\beta + \ldots + t\lambda \quad , \quad \mu = \alpha + \beta + \ldots \lambda ;$$

per la ripetuta applicazione delle regole riguardanti la derivazione di 1° ordine si ha subito

$$\frac{d^{\mu} v_n}{ds_p^{\alpha} ds_q^{\beta} \ldots ds_t^{\lambda}} = \frac{1}{p^{\alpha} q^{\beta} \ldots t^{\lambda}} v_{n-m} \quad , \quad \frac{d^{\mu} a_n}{ds_p^{\alpha} ds_q^{\beta} \ldots ds_t^{\lambda}} = (-1)^{\mu} \frac{1}{p^{\alpha} q^{\beta} \ldots t^{\lambda}} a_{n-m} .$$

Se il peso della combinazione è uguale al peso delle funzioni, vale a dire se $m = n$, le derivate divengono costanti, ed i secondi membri di queste formole si riducono a' soli coefficienti.

Quando la combinazione si riduce ad una potenza di s_1, come s_1^m, si ha

$$\frac{d^m v_n}{ds_1^m} = v_{n-m} \quad , \quad \frac{d^m a_n}{ds_1^m} = - a_{n-m} .$$

E nella ipotesi di $m = n$, si ha semplicemente

$$\frac{d^n v_n}{ds_1^n} = 1 \quad , \quad \frac{d^n a_n}{ds_1^n} = -(-1)^n 1 .$$

64. Risulta dalle considerazioni precedenti che le derivate delle due funzioni v_n ed s_n, relative a quali che siano combinazioni di peso n, prendono valori costanti, vale a dire indipendenti dagli elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e dipendono soltanto dal grado della combinazione. Tornando utile di porre a confronto le regole dichiarate per le due funzioni, le riassumiamo nel canone seguente:

Le derivate di v_n *ed* s_n *relative a qualunque combinazione degli elementi* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \ldots$, *di peso* n *e di grado* μ, *sono definite dalle formole seguenti:*

$$\text{Derivata di } v_n = (-1)^{\mu} \mu!$$

$$\text{Derivata di } s_n = (-1)^{\mu} (\mu - 1)! \, n .$$

Così, per esempio, si ottiene immediatamente

$$\frac{d^4 v_{10}}{da_2^2 da_3^2} = \frac{d^4 v_{10}}{da_1^2 da_2 da_6} = +4! \quad ; \quad \frac{d^7 v_{21}}{da_1 da_3^5 da_5} = \frac{d^7 v_{21}}{da_2^3 da_3^2 da_4 da_5} = -7!$$

$$\frac{d^4 s_{10}}{da_2^2 da_3^2} = \frac{d^4 s_{10}}{da_1^2 da_2 da_6} = +3! \times 10 \quad ; \quad \frac{d^7 s_{21}}{da_1 da_2^5 da_5} = \frac{d^7 s_{21}}{da_2^3 da_3^2 da_4 da_5} = -6! \, 21 .$$

65. La importanza di queste proprietà così semplici si manifesta a *priori* riflettendo che nelle ricerche per avventura dipendenti dalle funzioni v_n ed s_n, sarà sempre possi-

bile di evitarne lo sviluppo col sussidio di quelle proprietà. Noi le abbiamo dedotte dal caso generale della derivazione delle stesse funzioni relativamente a combinazioni di pesi qualunque; ma sono immediata e naturale conseguenza della loro definizione. In effetti, sia $a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda$ una combinazione di peso n; chiamando h il suo coefficiente in v_n, e k quello in s_n, si può supporre

$$v_n = h a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_t^\lambda + \mathrm{M} \quad , \quad s_n = k a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_r^\lambda + \mathrm{N},$$

avendo indicato con M e con N l'insieme di tutti gli altri termini ne' due sviluppi. Ora per la definizione delle funzioni v_n ed s_n, posto per brevità, $\mu = \alpha + \beta + \ldots + \lambda$, si ha (n. 37 e 47)

$$h = (-1)^\mu \frac{\mu!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \quad , \quad k = (-1)^\mu \frac{(\mu-1)!\,n}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!};$$

sostituendo questi valori, e poi derivando rispetto alla combinazione, risulta in conformità delle regole

$$\frac{d^\mu v_n}{da_p^\alpha da_q^\beta \ldots da_t^\lambda} = (-1)^\mu \mu! \quad , \quad \frac{d^\mu s_n}{pa_p^\alpha da_q \ldots da_t^\lambda} = (-1)^\mu (\mu-1)!\,n.$$

66. Le ultime osservazioni si estendono alle derivate di v_n ed a_n, relative a qualunque combinazione di peso n delle s, prese come variabili indipendenti. In effetti, supposto che $s^\alpha_p s^\beta_q \ldots s^\lambda_t$ sia una combinazione di peso n, posto mente alle formole (6) del n.° 51, si vedrà che gli sviluppi di v_n ed a_n si possono ridurre a

$$v_n = \frac{1}{\alpha!\,\beta!\ldots\beta! \times p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda} s_p^\alpha s_q^\beta \ldots s^\lambda_t + \mathrm{P}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda! \times p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda} s_p^\alpha s_q^\beta \ldots s_t^\lambda + \mathrm{Q},$$

avendo messo in evidenza in ciascuno degli sviluppi il solo termine, che contiene la combinazione data, e rappresentato con P tutto il resto dello sviluppo di v_n, e con Q quello di a_n. Derivando ora le due formole rispetto alla combinazione, si ha subito, coerentemente alle regole già dichiarate,

$$\frac{d^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} v_n}{ds_p^\beta ds_q^\alpha \ldots ds_t^\lambda} = \frac{1}{p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda},$$

$$\frac{d^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} a_n}{ds_p^\alpha ds_q^\beta \ldots ds_t^\lambda} = (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} \frac{1}{p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda}.$$

Art. V.

Valori costanti delle derivate de' prodotti di funzioni isobariche.

67. Immaginando più funzioni isobariche formate con elementi qualunque a_1, a_2, a_3, ..., se si prendono questi elementi come variabili indipendenti, si può doman-

dare la derivata del prodotto delle funzioni, relativa ad una data combinazione di elementi. Siffatta ricerca rientra nella teoria generale della derivazione de' prodotti di funzioni ordinarie di più variabili, soggetto, che si troverà completamente sviluppato nella seguente appendice; ma, posto da banda il caso generale, qui dobbiamo arrestarci a considerare il caso importantissimo, in cui la derivata di un prodotto di funzioni isobariche può prendere un valor costante. Ora, siccome questo argomento è connesso con una certa decomposizione delle combinazioni, la quale costituisce per se stessa un fatto interessante, ci sembra opportuno di premettere le nozioni, che la riguardano.

Partizione delle combinazioni.

68. Per indicare di una maniera generale le combinazioni formate in qualunque modo con gli elementi a, useremo la lettera C, variata con indici destinati a significare i loro pesi. Posto ciò, per brevità diremo che due combinazioni C_p e C_q sono *complementari* rispetto ad un'altra combinazione C_n, se moltiplicate tra loro riproducono la stessa C_n; ed in conseguenza si ha

$$C_n = C_p \times C_q .$$

Supponendo conosciuta una delle due combinazioni, e sia per esempio C_p, è conosciuta in pari tempo il complemento C_q, perchè quoziente della divisione di C_n per C_p. Siccome questo complemento è una combinazione di peso $n-p$, si può rappresentare con C_{n-p}; e si ha perciò

$$C_q = C_{n-p} = \frac{C_n}{C_p} .$$

69. Bisogna tener presente che, se una combinazione C_p divide un'altra combinazione C_n, gli elementi della prima non possono essere diversi da quelli della seconda; e l'esponente di un elemento qualunque nella prima non può sorpassare l'esponente dello stesso elemento nella seconda. Viceversa, se queste due condizioni sono soddisfatte, la combinazione C_p è necessariamente un fattore di C_n.

70. Premessi questi chiarimenti, risolveremo la seguente quistione:

Data una combinazione C_n, trovare tutte le maniere nelle quali può essere decomposta in due fattori di pesi assegnati p e q, la di cui somma sia eguale ad n.

Supponendo che C_p e C_q siano due combinazioni, che soddisfano alla quistione, sarà

$$C_n = C_p \times C_q .$$

Le due supposte combinazioni sono adunque complementari rispetto a C_n; e quindi se l'una, per esempio C_p, fosse conosciuta, sarebbe conosciuto anche il suo complemento C_q, quoziente della divisione di C_n per C_p. Ora, siccome gli elementi di C_p non possono essere diversi da quelli di C_n, è manifesto che questa combinazione C_p è necessariamente una delle combinazioni di peso p formate con gli elementi di C_n; e ciò conduce senza più alla regola seguente per risolvere la quistione: *Tra le combinazioni di peso* p, *formate con gli elementi di* C_n, *si scelgano i divisori di* C_n, *e si cerchino i loro complementi alla stessa* C_n; *le coppie di combinazioni*, *composte da ciascuno de' divisori e dal*

suo complemento, dànno tutte le possibili decomposizioni di C_n *secondo le condizioni prescritte.*

71. È quasi superfluo il dichiarare che può la quistione non ammettere alcuna soluzione; e ciò in effetti accade se tra le combinazioni di peso p non esistono divisori di C_n. In generale il numero delle partizioni è appunto eguale a quello de' detti divisori; supposto che questi divisori siano in numero di i, se si dinotano con C'_p, $C''_p, \ldots, C^{(i)}_p$, e siano C'_{n-p}, C''_{n-p}, . . . , $C^{(i)}_{n-p}$ i rispettivi complementi, le partizioni di C_n saranno rappresentate da

$$C_n = (C_p \times C'_{n-p}) = (C''_p \times C''_{n-p}) = \ldots = (C^{(i)}_p \times C^{(i)}_{n-p}) .$$

Applicando la regola, si possono formare, ad arbitrio, o le combinazioni di peso p, o quelle di peso q; ma è naturale che si preferisca il più piccolo de' numeri p, q. Ecco ora alcuni esempii:

Data la combinazione $C_{12} = a^2_1\, a^3_2\, a_4$, si cercano le sue partizioni in due fattori di pesi 4 ed 8. Tra le combinazioni di peso 4, relative agli elementi a_1, a_2, a_4, vi sono tre divisori di C_{12}, cioè $a^2_1\, a_2$, a^2_2, a_4, cui rispondono i complementi $a^2_2\, a_4$, $a^2_1\, a_2\, a_4$, $a^2_1\, a^3_2$; e si hanno quindi tre partizioni

$$a^2_1\, a^3_2\, a_4 = (a^2_1\, a_2 \times a^2_2\, a_4) = (a^2_2 \times a^2_1\, a_2\, a_4) = (a_4 \times a^2_1\, a^3_2) .$$

Cercando le partizioni della combinazione $C_{11} = a^4_1\, a^2_2\, a_3$ in due fattori di pesi 4 e 7, si trovano quattro combinazioni di peso 4, che dividono C_{11}, cioè a^4_1, $a^2_1\, a_2$, a^2_2, $a_1\, a_3$; ed i loro complementi essendo $a^2_2\, a_3$, $a^2_1\, a_2\, a_3$, $a^4_1\, a_3$, $a^3_1\, a^2_2$, si ottengono le quattro partizioni

$$a^4_1\, a^2_2\, a_3 = (a^4_1 \times a^2_2\, a_3) = (a^2_1\, a_2 \times a^2_1\, a_2\, a_3) = (a^2_2 \times a^4_1\, a_3) = a_1\, a_3 \times a^3_1\, a^2_2) .$$

La combinazione $C_{10} = a^2_1\, a^2_4$ ammette una partizione in fattori di pesi 2 ed 8, cioè $(a^2_1 \times a^2_4)$; ma non ne ammetterebbe alcuna in fattori di pesi 3 e 7.

72. È a notarsi il caso in cui la combinazione ha la forma a^m_h. Volendo decomporla in due fattori di pesi p e q, bisogna che sia soddisfatta la condizione

$$hm = p + q ;$$

ma, perchè la decomposizione sia possibile, è necessario che i numeri p e q siano entrambi divisibili per l'indice h, e non può aversi che una sola partizione. Supposto

$$p = p'h \quad , \quad q = q'h ,$$

saranno p' e q' gli esponenti de' due fattori, e si avrà

$$a^m_h = (a^{p'}_h \times a^{q'}_h) .$$

Per esempio, la combinazione a^3_6 può decomporsi in due di pesi 6 e 12; gli esponenti de' due fattori saranno $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{12}{3} = 4$, e si avrà $a^6_3 = a^2_3 \times a^4_3$.

La decomposizione è sempre possibile, se la combinazione ha la forma a^m_1, vale a dire se è potenza dell'elemento a_1. Posto che p e q siano numeri qualunque, ed

$$m=p+q\,,$$

si avrà

$$a^m_1=(a^p_1\times a^q_1)\,.$$

73. Un altro caso merita di esser notato, ed è la decomposizione di una combinazione in due fattori di pesi uguali; ipotesi la quale esige che il peso della combinazione data sia pari. Sia C_{2p} questa combinazione; ammesso che tra le combinazioni di peso p ve ne siano i che dividono la combinazione C_{2p}, e siano

$$C'_p\ \ ,\ \ C''_p\,,\ldots,C^{(i)}_p\,, \tag{1}$$

se si rappresentano i rispetti complementi a C_{2p} con

$$C'_{n-p}\ \ ,\ \ C''_{n-p}\,,\ldots,C^{(i)}_{n-p}\,, \tag{2}$$

la quistione ammetterà le seguenti i soluzioni:

$$C_{2p}=(C'_p\times C'_{n-p})=(C''_p\times C''_{n-p})=\ldots=(C^{(i)}_p-C^{(i)}_{n-p})\,.$$

Intanto, siccome le combinazioni comprese nella serie (1) sono di peso p, al pari di quelle comprese nella serie (2), e sono come queste divisori di C_{2p}, ne segue che le combinazioni della seconda serie riproducono, ma con ordine diverso, quelle della prima serie. Da ciò risulta che nel caso presente le partizioni non sono tutte tra loro distinte, ciascuna dovendo ripetersi due volte, co' fattori in ordine inverso.

Sia data, per esempio, la combinazione $C_{12}=a^4_1\,a^2_2\,a_4$, da decomporre in tutti i modi in due fattori di peso 6. Tra le combinazioni di questo peso i divisori della combinazione data sono quattro:

$$a^4_1 a_2\ \ ,\ \ a^2_1 a^2_2\ \ ,\ \ a^2_1 a_4\ \ ,\ \ a_2 a_4\,,$$

e sono riprodotti con ordine diverso da' rispettivi complementi

$$a_2 a_4\ \ ,\ \ a^2_1 a_4\ \ ,\ \ a^2_1 a^2_2\ \ ,\ \ a^4_1 a_2\,.$$

Si hanno dunque quattro partizioni, cioè:

$$a^4_1 a^2 a_4=(a^4_1 a_2\times a_2 a_4)=(a^2_1 a^2_2\times a^2_1 a_4)=(a^2_1 a_4\times a^2_1 a^2_2)=(a_2 a_4\times a^4_1 a_2)\,;$$

ma, se si domandano le sole partizioni distinte, basta tener conto delle prime due.

È ora evidente che nella ipotesi attuale il numero totale delle partizioni possibili è generalmente pari, dovendo eccettuarsi il caso in cui vi fosse una partizione co' due fattori eguali, il che accade se gli esponenti della combinazione data sono tutti pari. Non

essendo permutabili i due fattori eguali, ne risulta una partizione isolata, ed il numero totale delle soluzioni è in conseguenza dispari.

Per esempio, se è data la combinazione di peso 8, $a^4_1\, a^2_2$, e si debba decomporre in due fattori di peso 4, si troveranno tre soluzioni

$$a^4_1\, a^2_2 = (a^4_1 \times a^2_2) = (a^2_1\, a_2 \times a^2_1\, a_2) = (a^2_2 \times a^4_1)\,.$$

I due fattori della partizione di mezzo sono eguali, e si hanno due partizioni distinte.

74. La ricerca di cui ci siamo occupati, è un caso particolare, ma il più importante, della quistione generale in cui si domandano le partizioni di una combinazione C_n in un dato numero di fattori di pesi assegnati $p, q, r, \ldots, t$, la cui somma sia uguale ad n.

Supponiamo che la combinazione C_n si debba decomporre in tre fattori di pesi p, q, r, e riteniamo per fissar le idee $p < q < r$. Siano C_p, C_q, C_r tre combinazioni atte a risolvere la quistione, in guisa che si abbia

$$C_n = C_p \times C_q \times C_n\,.$$

E qui, come nel caso precedente, si potrà prendere per C_p qualunque combinazione di peso p, la quale divida C_n; ma, oltre a ciò, se si considera il complemento di C_p a C_n, vale a dire la combinazione, che risulta dalla divisione di C_n per C_p, è chiaro che questo complemento, che è di peso $n - p = q + r$, e può rappresentarsi con C_{n-p}, torna equivalente al prodotto delle altre due combinazioni C_q, C_r, di modo che si avrà

$$C_{n-p} = C_q \times C_r\,.$$

Ciò dimostra che, quando le tre combinazioni C_p, C_q, C_r, formano una partizione ternaria di C_n, le due ultime C_q, C_r formano in ogni caso una partizione binaria del complemento di C_p a C_n; ed in conseguenza il completo sistema delle partizioni ternarie può essere ottenuto nel modo seguente:

Si scelgano tutte le combinazioni di peso p, *che dividono* C_n, *e supposto che siano*

$$C'_p\,,\quad C''_p\,, \ldots, C^{(i)}_p\,, \tag{3}$$

si cerchino i loro rispettivi complementi a C_n, *cioè*

$$C'_{n-p}\,,\quad C''_{n-p}\,, \ldots, C^{(i)}_{n-p}\,. \tag{4}$$

Posto ciò, se un complemento qualunque $C^{(h)}_{n-p}$ *si decomponga in tutt'i modi in due fattori di pesi* q *e* r, *ed a ciascuna delle partizioni binarie così ottenute si accoppii, come primo fattore* *), *la combinazione corrispondente* $C^{(h)}_p$, *ne risulterà sempre un sistema di partizioni ternarie per la combinazione* C_n; *ed in conseguenza applicando questo processo a tutt'i complementi, si avrà il completo sistema delle partizioni ternarie, che possono risolvere la quistione.*

*) In questa ricerca è necessario di tener conto dell'ordine, con cui si succedono i fattori; quest'ordine da principio può essere arbitrario; ma, una volta un ordinamento adottato, non è più lecito di alterarlo. La cosa potrebbe essere indifferente finchè sono disuguali i pesi di tutt'i fattori, ma nel caso contrario l'osservanza dell'ordine è condizione indispensabile.

75. Passando alla partizione quaternaria, supporremo che la combinazione C_n sia già decomposta in quattro fattori C_p, C_q, C_r, C_s. Prendendo per C_p qualunque combinazione di peso p, che divida C_n, il complemento di C_p a C_n sarà eguale al prodotto delle altre tre combinazioni C_q, C_r, C_s, le quali adunque formano una partizione ternaria dello stesso complemento. In conseguenza, ritenuto che le combinazioni (3) siano tutte quelle di peso p, che dividono C_n, e che le (4) ne siano i rispettivi complementi, per avere tutte le partizioni quaternarie di C_n, basterà cercare le partizioni ternarie dei complementi e premettere a ciascuna la combinazione corrispondente, come nel caso di poc'anzi. Ma a questo punto è manifesto che il metodo è generale, e servirà qualche esempio a confermarlo.

Sia data la combinazione $C_{12} = a^2{}_1 a^2{}_2 a^2{}_3$, da decomporre in tre fattori di pesi 3, 4, 5. In questo caso si hanno due combinazioni di peso 3, che dividono la data, cioè [a_3 ed $a_1 a_2$], ed hanno per complementi rispettivi le due combinazioni di peso 9 [$a^2{}_1 a^2{}_2 a_3$ ed $a_1 a_2 a^2{}_3$]. Il primo di questi complementi ammette tre partizioni binarie di pesi 4 e 5,

$$a^2{}_1 a^2{}_2 a_3 = (a^2{}_2 \times a^2{}_1 a_3) = (a^2{}_1 a_2 \times a_2 a_3) = (a_1 a_3 \times a_1 a^2{}_2),$$

ed il secondo ne ammette una sola

$$a_1 a_2 a^2{}_3 = (a_1 a_3 \times a_2 a_3);$$

premettendo a_3 a ciascuna delle prime tre la combinazione, ed $a_1 a_2$ all'ultima, si hanno quattro partizioni ternarie, che risolvono la quistione

$$a^2{}_1 a^2{}_2 a^2{}_3 = (a_3 \times a^2{}_2 \times a^2{}_1 a_3) = (a_3 \times a^2{}_1 a_2 \times a_2 a_3) = (a_3 \times a_1 a_3 \times a_1 a^2{}_2) = (a_1 a_2 \times a_1 a_3 \times a_2 a_3).$$

Cercheremo in secondo luogo le partizioni quaternarie di $C_{14} = a^4{}_1 a^3{}_2 a_4$, in fattor di pesi 2, 3, 4, 5. Sono ora entrambe da adottarsi le due combinazioni di peso 2 [$a^2{}_1$ ed a_2], cui rispondono i complementi di peso 12, [$a^2{}_1 a^3{}_2 a_4$ ed $a^4{}_1 a^2{}_2 a_4$]. Il primo ammette due partizioni ternarie in fattori di pesi 3, 4, 5,

$$a^2{}_1 a^3{}_2 a_4 = (a_1 a_2 \times a^2{}_2 \times a_1 a_4) = (a_1 a_2 \times a_4 \times a_1 a^2{}_2),$$

ed il secondo ne ammette tre

$$a^4{}_1 a^2{}_2 a_4 = (a^3{}_1 \times a^2{}_2 \times a_1 a_4) = (a^3{}_1 \times a_4 \times a_1 a^2{}_2) = (a_1 a_2 \times a_4 \times a^3{}_1 a_2);$$

e si hanno in conseguenza cinque soluzioni

$$\begin{aligned} a^4{}_1 a^3{}_2 a_4 &= (a^2{}_1 \times a_1 a_2 \times a^2{}_2 \times a_1 a_4), \\ &= (a^2{}_1 \times a_1 a_2 \times a_4 \times a_1 a^2{}_2), \\ &= (a_2 \times a^3{}_1 \times a^2{}_2 \times a_1 a_4), \\ &= (a_2 \times a^3{}_1 \times a_4 \times a_1 a^2{}_2), \\ &= (a_2 \times a_1 a_2 \times a_4 \times a^3{}_1 a_2), \end{aligned}$$

Per dare ancora un esempio di partizione in cinque fattori, supporremo la com-

binazione $C_{25} = a^3_1\, a^2_3\, a^4_4$ da decomporsi in fattori di pesi 3, 4, 5, 6, 7. In questo caso si hanno due combinazioni di peso 3, che dividono C_{25}, $[a^3_1$ ed $a_3]$, ed hanno per complementi le combinazioni di peso 22, $[a^2_3\, a^4_4$ ed $a^3_1\, a_3\, a^4_4]$. Ora si vede subito che il primo complemento non ammette partizioni quaternarie in fattori di pesi 4, 5, 6, 7, perchè non è divisibile per alcuna combinazione di peso 5. In quanto al secondo, applicando la regola, si trova suscettibile della sola partizione

$$a^3_1\, a^2_3\, a^4_4 = (a_4 \times a_1 a_4 \times a^2_1 a_4 \times a_3 a_4)\,,$$

e quindi la combinazione proposta ammette ancora una sola partizione secondo le condizioni prescritte

$$a^3_1\, a^2_3\, a^4_4 = (a_3 \times a_4 \times a_1 a_4 \times a^2_1 a_4 \times a_3 a_4)\,.$$

DETERMINAZIONE DE' VALORI COSTANTI DELLE DERIVATE DE' PRODOTTI DI FUNZIONI ISOBARICHE.

76. Immaginando delle funzioni isobariche formate con gli elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots$, da prendersi come variabili indipendenti, è chiaro che la derivata del prodotto di queste funzioni, relativa ad una combinazione qualunque, si può sempre esprimere mediante le loro derivate parziali. Il prodotto essendo isobarico, di peso uguale alla somma de' pesi de' fattori, la derivata è anch'essa isobarica (n° 52), di peso uguale alla differenza tra' pesi del prodotto e della combinazione; se questi pesi sono eguali, quello della derivata è nullo, vale a dire il suo valore è costante; e si ha quindi il seguente criterio: *Affinchè la derivata di un prodotto di funzioni isobariche, relativa ad una combinazione qualsivoglia, possa prendere un valor costante è necessario, e basta, che il peso della combinazione sia eguale al peso del prodotto, ossia eguale alla somma dei pesi di tutte le funzioni.*

L'espressione algebrica del valore costante, che prende in siffatte condizioni la derivata del prodotto, è un elemento fondamentale per l'algebra, come sarà mostrato con molte applicazioni, e la sua ricerca forma appunto il soggetto dell'articolo presente.

77. La forma della detta espressione può subito ottenersi indipendentemente dalla teoria generale esposta nell'appendice. Infatti, essa non può contenere termini con funzioni non derivate, senza di che non potrebbe dar luogo a valor costante; così, qualunque termine deve necessariamente risultare dal prodotto di derivate parziali di tutte le funzioni, relative a parziali combinazioni di pesi uguali a quelli delle stesse funzioni; ed è perciò la somma di tanti termini, quante sono le partizioni della data combinazione in fattori di pesi uguali a quelli delle funzioni; ogni termine essendo sempre il prodotto delle derivate parziali di tutte le funzioni relative a' fattori di ugual peso contenuti in ciascuna partizione, fatta naturalmente astrazione da' coefficienti numerici, che resta a determinare.

L'espressione della derivata, adunque, avrà un termine solo, se una è la partizione; ne avrà due, se le partizioni sono due, ecc. ecc.; ed il suo valore sarà nullo, se la partizione è impossibile.

78. Per indicare di una maniera generale la derivata di una funzione isobarica U_p, relativa ad una combinazione C_n, useremo talvolta il simbolo $\left(\frac{U_p}{C_n}\right)$. Posto ciò, se

U_p, V_q, ..., Z, dinotano m funzioni isobariche, e sia n la somma de' loro pesi p, q,..., s, secondo ciò che precede sarà costante la derivata del prodotto delle m funzioni relativa alla combinazione C_n, e si avrà

$$\binom{U_p V_q \ldots Z_s}{C_n} = \text{costante}.$$

Per ottenere l'espressione di questa costante bisogna cercare tutte le partizioni di C_n in m fattori di pesi p, q, ..., s. Ammettiamo dapprima che *una* sia la partizione, e che si abbia

$$C_n = (C_p \times C_q \times \ldots \times C_s);$$

in questa ipotesi l'espressione avrà un termine solo, il quale, a parte un coefficiente numerico k, è il prodotto delle derivate delle m funzioni U_p, V_q, ..., Z_s, prese ordinatamente rispetto a C_p, C_q, ..., C_s, e quindi l'espressione della costante sarà definita dalla formola

$$\binom{U_p V_q \ldots Z_s}{C_n} = k \binom{U_p}{C_p} \binom{V_q}{C_q} \ldots \binom{Z_s}{C_s}. \tag{1}$$

Resta a determinare il valore di k, il quale dipende immediatamente dagli esponenti della combinazione C_n, e quelli de' suoi fattori C_p, C_q, ..., C_s. Prendendo

$$C_n = a^{\beta}_b a^{\gamma}_c \ldots a^{\lambda}_l,$$

è poi lecito di supporre

$$C_p = a_b^{\beta_1} a_c^{\gamma_1} \ldots a_l^{\lambda_1}, \quad C_q = a_b^{\beta_2} a_c^{\gamma_2} \ldots a_l^{\lambda_2}, \ldots, C_s = a_b^{\beta_m} a_c^{\gamma_m} \ldots a_l^{\lambda_m},$$

e si osserverà, che la somma degli esponenti di un elemento qualunque a_i, in tutte le combinazioni C_p, C_q, ..., C_5, deve riprodurre l'esponente dello stesso elemento a_i in C_n; da che risultano le relazioni

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_m, \ldots, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m. \tag{2}$$

Premesso ciò abbiamo dimostrato nell'appendice che, in generale: Il coefficiente di un termine, appartenente allo sviluppo della derivata d'ordine qualunque « del prodotto di funzioni di più variabili, equivale al prodotto de' fattoriali degli espo- « nenti totali di derivazione di tutte le variabili diviso pe' fattoriali di tutt'i loro espo- « nenti parziali ». Nel caso presente gli esponenti totali di derivazione delle variabili sono niente altro che gli esponenti della combinazione C_n, e gli esponenti parziali sono quelli de' suoi fattori C_p, C_q, ..., C_n; dunque il valore del cofficiente k, nella formola (1), è determinato immediatamente da una forma frazionaria, che ha per numeratore il prodotto de' fattoriali di tutti gli esponenti di C_n, e per denominatore il prodotto de' fattoriali degli esponenti di tutt'i suoi fattori C_p, C_q, ..., C_5; e si ha, in conseguenza,

$$k = \frac{\beta!\gamma!\ldots\lambda!}{(\beta_1!\gamma_1!\ldots\lambda_1!)(\beta_2!\gamma_2!\ldots\lambda_2!)\ldots(\beta_m!\gamma_m\ldots\lambda_m!)}. \tag{3}$$

Osservando alle relazioni (2), si vede che questa espressione dà sempre un numero intero, che può farsi risultare per via di semplici soppressioni di fattori comuni al nume-

ratore ed al denominatore, il quale sarà sempre riducibile all'unità. Naturalmente nelle applicazioni è superfluo di aver riguardo ad esponenti eguali ad 1; e può ancora non tenersi conto di quelli, che sono comuni alla combinazione C_n ed a suoi fattori $C_p, C_q, \ldots, C_s$.

79. Quando le funzioni date $U_p, V_q, \ldots, Z_s$ sono differenti, anche differenti sono i fattori del termine espresso dal secondo membro della formola (1); ma può accadere il contrario se vi sono funzioni eguali. Ora la formola (3), che determina il valore del coefficiente k, si rapporta propriamente al caso di funzioni disuguali; se qualcuna delle funzioni è ripetuta, questa formola vuol'essere modificata, com'è prescritto nell'appendice; e la modifica consiste semplicemente nel moltiplicare il secondo membro pel fattoriale dell'esponente di ogni funzione ripetuta, e dividerlo, se ne sia il caso, pel fattoriale dell'esponente di ogni fattore che nel termine può essere ripetuto. Quindi, ammettendo che vi siano più classi di funzioni uguali, e che il termine contenga più classi di fattori eguali, se si dinotano con $m_1, m_2, m_3, \ldots$ gli esponenti delle funzioni ripetute, e con $h_1, h_2, h_3, \ldots$ quelli de' fattori del termine ripetuti, il valore di k sarà determinato dalla formola generale

$$k = \frac{\beta!\gamma!\ldots\lambda!}{(\beta_1!\gamma_1!\ldots\lambda_1!)(\beta_2!\gamma_2!\ldots\lambda_2!)\ldots(\beta_m!\gamma_m!\ldots\lambda_m!)} \times \frac{m_1!m_2!\ldots}{h_1!\,h_2!\ldots}.$$

ESEMPI

I. Siano date due funzioni di pesi 3 e 5, U_3, V_5 e la combinazione $C_8 = a^4{}_1 a^2{}_2$. In questo caso si hanno due partizioni

$$a^4{}_1 a^2{}_2 = (a^3{}_1 \times a_1 a^2{}_2) = (a_1 a_2 \times a^3{}_1 a_2),$$

quindi due termini co' coefficienti $\frac{4!2!}{3!2!} = 4$, $\frac{4!2!}{3!} = 8$, e si ha perciò

$$\binom{U_3 V_5}{a^4{}_1 a^2{}_2} = 4\binom{U_3}{a^3{}_1}\binom{V_5}{a_1 a^2{}_2} + 8\binom{U_3}{a_1 a_2}\binom{V_5}{a^3{}_1 a_2}.$$

II. Supponiamo tre funzioni U_5, V_7, W_9, e la combinazione $C_{21} = a^4{}_1 a^4{}_3 a_5$. Qui si hanno quattro partizioni

$$\begin{aligned} a^4{}_1 a^4{}_3 a_5 &= (a^2{}_1 a_3 \times a_1 a^2{}_3 \times a_1 a_3 a_5), \\ &= (a^2{}_1 a_3 \times a^2{}_1 a_5 \times a^3{}_3), \\ &= (a_5 \times a^4{}_1 a_3 \times a^3{}_3), \\ &= (a_5 \times a_1 a^2{}_3 \times a^3{}_1 a^2{}_3); \end{aligned}$$

di seguito quattro termini co' coefficienti $\frac{4!4!}{2!2!} = 144$, $\frac{4!4!}{2!2!3!} = 24$, $\frac{4!4!}{4!3!} = 4$, $\frac{4!4!}{2!3!2!} = 24$, e si ha in conseguenza

$$\begin{aligned} \binom{U_5 V_7 W_9}{a^4{}_1 a^4{}_3 a_5} = 144\binom{U_5}{a^2{}_1 a_3}\binom{V_7}{a_1 a^2{}_3}\binom{W_9}{a_1 a_3 a_5} + 24\binom{U_5}{a^2{}_1 a_3}\binom{V_7}{a^2{}_1 a_5}\binom{W_9}{a^3{}_3} \\ + 4\binom{U_5}{a_5}\binom{V_7}{a^4{}_1 a_3}\binom{W_9}{a^3{}_3} + 24\binom{U_5}{a_5}\binom{V_7}{a_1 a^2{}_3}\binom{W_9}{a^3{}_1 a^2{}_3}. \end{aligned}$$

III. Siano date le due funzioni differenti, ma di pesi uguali U_4, V_4, e la combinazione $C_8 = a^4_1 a^2_2$. In questo caso si hanno due distinte partizioni

$$a^4_1 a^2_2 = (a^4_1 \times a^2_2) = (a^2_1 a_2 \times a^2_1 a_2)\,;$$

ma essendo permutabili i due fattori della prima, la medesima dà origine a due termini con lo stesso coefficiente $\frac{4!2!}{4!2!} = 1$; l'altra partizione dà luogo ad un termine solo, col coefficiente $\frac{4!2!}{2!2!} = 42$, e quindi risulta

$$\binom{U_4\,V_4}{a^4_1\,a^2_3} = \binom{U_4}{a_4}\binom{V_4}{a^2_2} + \binom{U_4}{a^2_2}\binom{V_4}{a^4_1} + 12\binom{U_4}{a^2_1 a_2}\binom{V_4}{a^2_1 a_2}\,.$$

80. Nelle applicazioni le formole risultanti da questa teoria potranno tradursi in numeri quando si conoscano i valori costanti che prendono le derivate delle funzioni U_p, V_q, ..., Z_s, come accade in particolare a riguardo delle funzioni v ed s, per le quali i detti valori si calcolano immediatamente, secondo le regole date nel n° 64. Ma intorno a ciò richiamiamo tutta l'attenzione sul più semplice de' casi, che presenta questa teoria, vale a dire quando si hanno due sole funzioni sia una v ed una s, sia due s, essendo questo caso il fondamento per la risoluzione di importanti e difficili quistioni. D'altronde in questa ipotesi tutto si semplifica, a cominciare dalla decomposizione delle combinazioni, che va sempre operata in due fattori, il che non esige nè calcolo nè studio; ond'è che i valori numerici delle derivate del prodotto di due funzioni di tal fatta si ottengono ordinariamente quasi a colpo d'occhio. Eccone alcuni esempii, che ormai non hanno bisogno di alcun'altra dichiarazione:

$$\binom{s_3\,v_4}{a_1\,a^3_2} = \frac{3!}{2!}\binom{s_3}{a_1 a_2}\binom{v_4}{a^2_2} = 3(+3.1!)(+2!) = 3.3.2 = 18$$

$$\binom{s_4\,v_6}{a^5_2} = \frac{5!}{2!3!}\binom{s_4}{a^2_2}\binom{v_6}{a^3_2} = 10(4.1!)(-3!) = -10.4.6 = 240$$

$$\binom{s_4\,s_6}{a^2_2\,a^2_3} = \frac{2!2!}{2!2!}\binom{s_4}{a^2_2}\binom{s_6}{a^2_3} = (4.1!)(6.1!) = 4.6 = 24$$

$$\binom{s_3\,s_5}{a^4_1\,a^2_2} = \frac{4!2!}{3!2!}\binom{s_3}{a^3_1}\binom{s_5}{a_1 a^2_2} + \frac{4!2!}{3!}\binom{s_3}{a_1 a_2}\binom{s_5}{a^3_1 a_2} =$$

$$= 4(-3.2!)(-5.2!) + 8(3.1!)(5.3!) = 4.6.10 + 8.3.30 = 960$$

$$\binom{s_5 v_7}{a^4_1\,a^2_2\,a_4} = \frac{4!2!}{3!}\binom{s_5}{a^3_1 a_2}\binom{v_7}{a_1 a_2 a_4} + \frac{4!2!}{2!3!}\binom{s_5}{a_1 a^2_2}\binom{v_7}{a^3_1 a_4} + \frac{4!2!}{3!2!}\binom{s_5}{a_1 a_4}\binom{v_7}{a^3_1 a^2_2} =$$

$$= 8(5.3!)(-3!) + 4(-5.2!)(4!) + 4(5.1!)(-5!) = 4800.$$

Si può osservare che i termini, che compongono i valori numerici di queste derivate, prendono sempre uno stesso segno, il quale è il + o il —, secondochè il grado della combinazione di elementi cui si riferisce la derivata del prodotto è pari o impari.

*

APPENDICE

I.

Sulla Partizione di Lettere.

1. Importanti ricerche di analisi sono fondate sulla ripartizione di un sistema di lettere in un dato numero di gruppi, ciascuno de' quali debba comprendere un numero assegnato di lettere; e lo scopo della teoria è appunto quello di determinare quante e quali sono le maniere nelle quali è possibile di operare la ripartizione in conformità delle condizioni prescritte. Naturalmente in questa ricerca non è a tener conto nè dell'ordine con cui si succedono i gruppi nelle singole *partizioni*, nè dell'ordine delle lettere in uno stesso gruppo; ma allora lo scopo della teoria sarà più preciso, domandandosi: *quante e quali sono le possibili partizioni distinte,* intendendo che due partizioni sono *distinte* quando differiscono almeno per un gruppo.

La quistione non è nuova, se le lettere sono tra loro tutte differenti; ma finora non venne affatto considerato il caso, in cui si ammettono lettere ripetute; ed è questo caso precisamente quello, che costituisce il lato più interessante della ricerca. In questo articolo daremo una risoluzione completa della quistione, e per chiarezza distingueremo due casi, secondochè si tratta di lettere *differenti* o di lettere *ripetute.*

Caso 1° — *Lettere differenti.*

2. Sia n il numero delle lettere, e siano p, q, r, ..., s, t i numeri indicanti quante sono le lettere assegnate a' singoli gruppi, di modo che sarà

$$n=p+q+r+\ldots+s+t.$$

Per rendere la ricerca più chiara, supporremo a' gruppi un ordine definito, del resto arbitrario; e però terremo: *primo,* il gruppo di p lettere; *secondo*, quello di q lettere, ecc. Posto ciò, si potrà comporre una partizione a piacere, formando il primo gruppo con p

lettere qualunque, il secondo con q lettere diverse dalle prime, il terzo con r lettere diverse dalle prime e dalle seconde; e così sino all' ultimo, pel quale restano disponibili t lettere diverse da tutte le precedenti. Dunque il primo gruppo è una combinazione della classe p di tutte le n, o $p+q+r+\ldots+s+t$ lettere; il secondo, una combinazione della classe q di $q+r+\ldots+s+t$ lettere; il terzo, della classe r di $r+\ldots+s+t$ lettere; e così fino all'ultimo, che è l'unica combinazione della classe t di t lettere. Il numero delle partizioni, che soddisfano alle condizioni prescritte, equivale in conseguenza al prodotto de' coefficienti binominali

$$(p+q+r+\ldots+s+t)_p\,,\,(q+r+\ldots+s+t)_q\,,\,(r+\ldots+s+t)_r\,,\ldots,\,(s+t)_s\,,\,(t)_t\,;$$

e però indicandolo con N, e tenendo presente che $(t)_t=1$, si ha la formola

$$\text{(1)}\qquad N=(p+q+r+\ldots+s+t)_p(q+r+\ldots+s+t)_q(r+\ldots+s+t)_r\ldots(s+t)_s\,.$$

Ma si può dare a questa formola una forma simmetrica, indipendente dall'ordine dei gruppi. Infatti, se h ed i sono numeri interi, si ha

$$\text{(2)}\qquad (h)_i=\frac{h!}{i!(h-i)!}\,;$$

trasformando con questa formola i coefficienti binominali, e sopprimendo i fattori, che si elidono, risulta

$$\text{(3)}\qquad N=\frac{(p+q+r+\ldots+t)!}{p!q!r!\ldots t!}=\frac{n!}{p!q!r!\ldots t!}\,.$$

3. Abbiamo tacitamente supposto che non vi fossero gruppi *simili,* cioè gruppi con egual numero di lettere, e quindi disuguali i numeri $p, q, \ldots, t$; ed allora le partizioni, che si ottengono col processo indicato, sono evidentemente *distinte.* Nel caso opposto ogni partizione deve riprodursi un certo numero di volte, col solo divario di un ordine diverso ne' gruppi simili; la formola (3) dà in ogni caso il numero totale delle partizioni, lo dà, cioè, incluse le ripetizioni; ed occorre di modificarla, se si vuole il numero delle sole partizioni distinte.

Supponiamo che nove lettere $a, b, c, \ldots, h, i$ si debbano ripartire in quattro gruppi, tre de' quali, ognuno di due lettere, ed il quarto di tre lettere; si potrà comporre una partizione a piacere, prendendo ad arbitrio pe' gruppi binarî tre delle combinazioni due a due di tutte le lettere, purchè a lettere diverse; per esempio scegliendo le combinazioni ab, cd, ef, si ha la partizione

$$ab\,,\quad cd\,,\quad ef\,,\quad ghi\,.$$

Ora, salvo rimanendo il quarto gruppo, si può dare a' primi tre gruppi una diversa disposizione, e si ha sempre una partizione compresa nel sistema, la quale però non è *distinta* dalla precedente, perchè non ne differisce che nell'ordine de' gruppi, e ne è quindi una ripetizione. Questa ripetizione ha luogo evidentemente tante volte quante sono le maniere nelle quali si possono permutare tra loro i gruppi simili; così la parti-

zione considerata per esempio, e quindi ogni altra partizione del sistema si ripeterebbe 3! volte; ma, in generale, supponendo α gruppi simili, ogni partizione si ripeterà $\alpha!$ volte. Se vi sono più sistemi di gruppi simili, ciascuno darà luogo ad una conseguenza analoga; e però, ammettendo che si abbiano α gruppi di p lettere ognuno, β gruppi di q lettere, γ gruppi di r lettere, ecc. ecc., ogni partizione si ripeterà tante volte quante sono le unità del prodotto $\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots$ Dunque, incluse le ripetizioni, il numero totale delle partizioni, che indicheremo con N′, coerentemente alla formola (3), sarà espresso da

$$N' = \frac{n!}{(p!)^\alpha (q!)^\beta (r!)^\gamma \ldots}; \tag{4}$$

ma, volendosi il numero N delle sole *partizioni* distinte, bisognerà dividere il valore di N′ per $\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots$, e quindi risulta

$$N = \frac{N'}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots} = \frac{n!}{(p!)^\alpha (q!)^\beta (r!)^\gamma \ldots \times \alpha!\beta!\gamma!\ldots}. \tag{5}$$

4. Le formole, che abbiamo ottenute, palesano la relazione esistente tra la quistione, di cui ci siamo occupati, e quella in cui si domandano le permutazioni di n lettere nella ipotesi di lettere ripetute. La formola (3) esprime appunto il numero di queste permutazioni quando si hanno p lettere di una specie, q di un'altra, r di un'altra, ecc.; e non è diverso l'ufficio della formola (4), perchè esprime lo stesso numero, nella ipotesi che si abbiano α diverse specie di lettere, ognuna di q lettere; β specie diverse, ognuna di q lettere, ecc. ecc. Ma un intimo legame esiste infatti tra le due quistioni, essendo evidente che da qualunque delle partizioni, composte secondo le condizioni prescritte, si possa dedurre il completo sistema di queste partizioni, permutando tra loro le lettere in tutt'i modi, ma *da gruppo a gruppo*, senza aver riguardo a permutazioni di lettere, che si trovano nello stesso gruppo; il che risponde alla condizione di non esservi luogo a permutazioni tra lettere di una stessa specie. Ben vero, se vi sono gruppi con egual numero di lettere, con siffatto processo si avrebbero naturalmente tutte le ripartizioni, incluse le ripetizioni; ma, volendo le sole partizioni distinte, nell'operare le permutazioni da gruppo a gruppo, bisognerà escludere quelle che producono permutazioni di gruppi.

Ora da ciò risulta che, se n lettere siano ripartite in α gruppi di p lettere, β di q lettere, ecc. ecc., il numero delle permutazioni diverse delle n lettere *da gruppo a gruppo* è quello definito dalla formola (4), se non si debbano escludere le possibili permutazioni tra gruppi; e, nel caso contrario, è invece quello definito dalla (5).

5. Considerando un sistema di partizioni, se occorra di tenere in vista alcune lettere particolarmente designate, converremo di circondarle di parentesi; per esempio, supposta la partizione

$$uvabc\ ,\quad xyde\ ,\quad zfg\ ,\quad hi\ ,$$

la quale definisce il sistema delle partizioni di quattordici lettere in gruppi di cinque, di quattro, di tre, e di due lettere, scrivendo

$$(uv)abc\ ,\quad (xy)de\ ,\quad (z)fg\ ,\quad hi\ ,$$

avremo designate cinque lettere, due nel primo gruppo, due nel secondo, ed una nel terzo. Ora, se le lettere designate si permutano in qualunque modo tra di loro, da gruppo a gruppo, senza toccare in nulla le altre lettere non designate, e salvo rimanendo il numero delle lettere designate fissato per ogni gruppo, si ha in ogni caso una partizione, la quale differisce dalla proposta solo per una varia disposizione delle lettere designate; e tali sono, per esempio, le due seguenti partizioni:

$$(6) \qquad \begin{array}{l} (xz)abc \;,\; (vy)de \;,\; (u)fg \;,\; hi \;, \\ (vy)abc \;,\; (xy)de \;,\; (u)fg \;,\; hi \;. \end{array}$$

Posto ciò, se si domanda quante sono nel completo sistema le partizioni *distinte,* le quali differiscono tra loro soltanto per una diversa disposizione delle lettere designate, subordinata alle condizioni prescritte, la risposta è facilissima. Se non vi sono gruppi simili di lettere designate, il numero delle dette partizioni è precisamente uguale al numero delle partizioni delle sole lettere designate; ma, nella ipotesi contraria, occorre di distinguere due casi: o i gruppi simili di lettere designate sono accompagnati da altre lettere non designate, come nell' esempio proposto; o non sono affatto accompagnati da altre lettere, come sarebbe se fosse data invece la partizione

$$(uv) \;,\; (xy) \;,\; (z)fg \;,\; hi \;,$$

nella quale i due gruppi simili non sono accompagnati da altre lettere. In entrambo i casi l'esistenza di gruppi simili fa sì che ogni partizione di lettere designate si ripeta un numero determinato di volte, con ordine diverso ne' gruppi simili; ora nel primo de' due casi le partizioni ripetute di lettere designate, accompagnate dalle altre lettere, divengono necessariamente partizioni distinte di tutte le lettere, come di fatto si verifica nelle (6); ma nel secondo caso, le partizioni ripetute di lettere designate restano sempre ripetute nel sistema delle partizioni di tutte le lettere.

Queste considerazioni si riassumono nel canone seguente:

Data una partizione con lettere designate, il numero delle partizioni distinte comprese nel sistema, le quali in niente altro differiscono tra loro che per una varia disposizione delle lettere designate, è uguale al numero delle partizioni delle sole lettere designate, salvo ad includere o ad escludere dal còmputo di questo numero le possibili ripetizioni di partizioni, provvenienti da gruppi simili di lettere designate, secondochè questi gruppi sono o no accompagnati da altre lettere non designate.

6. Ma, applicando le formole precedentemente dimostrate, si può concretare come segue il processo pel calcolo effettivo del numero, che forma il soggetto del canone.

Sia data una partizione con m lettere designate, distribuite tra μ gruppi secondo i numeri, uguali o disuguali, $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$; e sia M il numero delle partizioni comprese nel sistema, le quali differiscono tra loro unicamente per una varia disposizione delle lettere designate, e ferme rimanendo da per tutto le altre lettere non designate. Posto ciò, se tra' μ gruppi di lettere designate non vi sono gruppi simili; o, se, essendovene, sono accompagnati da altre lettere non designate, si ha sempre

$$(7) \qquad \mathrm{M} = \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_\mu!} \;;$$

ma, se tra' gruppi simili di lettere designate ve ne siano p non accompagnati da altre lettere, si avrà

$$(8)\qquad M = \frac{m!}{m_1!m_2!m_3!\ldots m_\mu! \times p!}.$$

Per semplicità abbiamo supposto un sol sistema di gruppi simili, di sole lettere designate; ma, se vi fosse un secondo sistema di q gruppi della stessa natura, poi un terzo di r gruppi, ecc., si avrebbe evidentemente

$$(9)\qquad M = \frac{m!}{m_1!m_2!\ldots m_\mu! \times p!q!r!\ldots}.$$

Supponiamo, per un esempio, la partizione con 14 lettere designate

$$(abc)g \quad (def)hi \quad (st)j \quad (uv)k \quad (wx)l \quad (yz)o\,.$$

In questo caso si ha $m=14$, $m_1=m_2=3$; $m_3=m_4=m_5=m_6=2$; e poichè i gruppi simili di lettere designate sono accompagnati da altre lettere, si avrà

$$M = \frac{14!}{3!3!2!2!2!2!} = \frac{14!}{(3!)^2(2!)^4}.$$

Ammettiamo ora che si abbiano le seguenti partizioni diverse

1ª	(abc)	(def)	$(st)j$	$(uv)k$	$(wx)l$	$(yz)o$
2ª	(abc)	(def)	(st)	(uv)	$(wx)l$	$(yz)o$
3ª	(abc)	(def)	(st)	(uv)	(wx)	$(yz)o$
4ª	(abc)	(def)	(st)	(uv)	(wx)	(yz) .

Per la 1ª, essendo isolati i due gruppi ternarî, si avrà

$$M = \frac{14!}{(3!)^2(2!)^4 \times 2!}.$$

Per la 2ª vi sono inoltre due gruppi binarî isolati, e si ha perciò

$$M = \frac{14!}{(3!)^2(2!)^4 \times 2!2!}.$$

Nella 3ª invece, i gruppi binarî isolati sono tre, e quindi

$$M = \frac{14!}{(3!)^2(2!)^4 \times 2!3!}.$$

Finalmente nella 4ª, essendo isolati anche i quattro gruppi binarî, si ha

$$M = \frac{14!}{(3!)^2(2!)^4 \times 2!4!}.$$

Caso 2° — *Lettere ripetute.*

7. Fin qui le lettere a ripartirsi si sono supposte differenti; resta ad esaminare il caso in cui si ammettono lettere ripetute. In questa ipotesi il sistema delle partizioni è quello che si avrebbe impiegando lettere disuguali, e poscia modificando quelle designate per divenire uguali *); il numero delle partizioni è dunque lo stesso ne'due casi; ma un esempio dichiarerà meglio la natura di questa importante ricerca. Supponiamo che una lettera a sia ripetuta tre volte, un'altra lettera b due volte, e che le cinque lettere a , a , a , b , b debbano ripartirsi in tre gruppi, uno di una lettera, e gli altri due ciascuno di due lettere. In questo caso il numero delle partizioni, per la formola (9), è uguale a $\frac{5!}{1!(2!)^2 2!}$, cioè a 15; impiegando cinque lettere qualunque t , u , v , x , y , le quindici partizioni a lettere disuguali sono le seguenti:

$$
\begin{array}{lllll}
t, uv, xy \;; & u, tv, xy \;; & v, tu, xy \;, & x, tv, vy \;, & y, tu, vx \\
t, ux, vy & u, tx, vy & v, tx, uy & x, tv, uy & y, tv, ux \\
t, uy, vx & u, ty, vx & v, ty, ux & x, ty, uv & y, tu, vx,
\end{array}
$$

e quindi, mutando in a ciascuna delle tre lettere t , u , v , ed in b ciascuna delle altre due x , y , le quindici partizioni corrispondenti all'esempio saranno

$$
\begin{array}{lllll}
a, aa, bb \;; & a, aa, bb \;; & a, aa, bb \;; & b, aa, ab \;; & b, aa, ab \\
a, ab, ab & a, ab, ab & a, ab, ab & b, aa, ab & b, aa, ab \\
a, ab, ab & a, ab, ab & a, ab, ab & b, ab, aa & b, aa, ab.
\end{array}
$$

Queste partizioni, come era da aspettarselo, non sono tutte differenti, e le distinte si riducono a tre (a, aa, bb) , (a, ab, ab) , (b, aa, ab) ; la prima si ripete tre volte, e ciascuna delle altre sei volte. Così la ipotesi di lettere uguali dà origine a due quistioni, delle quali si può domandare la soluzione, indipendentemente dalla formazione del completo sistema delle partizioni, e dal passaggio per lettere disuguali; l'una consiste nella *ricerca diretta di tutte le possibili partizioni distinte;* l' altra, nel *definire direttamente quante volte si ripeterebbe nel sistema una data partizione.* Non ci arrestiamo alla prima di queste due quistioni, che non ha interesse precipuo per le nostre applicazioni, e che, del resto, è sempre di facile risoluzione ne'casi particolari **); e passeremo ad occuparci della seconda, la quale costituisce un importante elemento di analisi.

*) Nella quistione astratta di partizione di lettere, le locuzioni *lettere uguali* e *lettere disuguali* non sarebbero precise; ma qui giova di adoperarle non potendo esservi luogo ad equivoci, e perchè in fin de' conti in tutte le applicazioni le lettere saranno sempre destinate a rappresentare de' numeri.

**) Nell' esempio del testo si tratta della ricerca delle partizioni distinte delle cinque lettere a, a, a, b, b in tre gruppi, uno semplice, cioè di una lettera, e gli altri due binarii. Ora, se si prende per gruppo semplice la lettera a, pei due gruppi binarii si potrà prendere o la combinazione aa, bb, o l'altra ab, ab; prendendo invece per gruppo semplice la lettera b, pe' due gruppi binarii si avrà la sola combinazione aa, ab; e quindi si riproducono le tre partizioni (a, aa, bb) , (a, ab, ab) , (b, aa, ab).

Torna utile di osservare che, in generale, questa quistione può essere considerata sotto un altro punto di vista. Supposto che le lettere $a, b, c, \ldots, l$ debbono essere rispettivamente ripetute $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ volte, il sistema di tutte queste lettere si può rappresentare col monomio $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$; ed allora tanto è cercare le loro partizioni distinte in un dato numero di gruppi formati con numeri determinati di lettere, quanto è cercare tutte le maniere nelle quali è possibile di decomporre il monomio proposto in

8. La seconda quistione ha per oggetto di definire il numero che esprime quante volte una data partizione a lettere uguali si può ripetere nel sistema; per brevità chiameremo questo numero *indice della partizione*.

Ammettendo dapprima che la data partizione contenga una sola specie di lettere uguali, per esempio lettere a, le supporremo distribuite tra ρ gruppi in qualunque maniera, ed in qualunque misura. Posto ciò, se le lettere a si rimpiazzano con lettere differenti, lettere che riguarderemo come *particolarmente designate*, si ha una partizione a lettere disuguali, la quale differisce dalla proposta solo in ciò che ne' detti ρ gruppi le lettere uguali vi sono cangiate in lettere disuguali. Ora, se in questi gruppi le lettere designate si permutano in qualunque modo tra di loro, da gruppo a gruppo, si ha in ogni caso una partizione appartenente al sistema completo, dotata della proprietà di riprodurre la proposta quando vi si rimettono le lettere uguali. Le partizioni dotate di questa proprietà sono adunque tante quante sono quelle che differiscono tra loro sono per una varia disposizione delle lettere designate, ed il loro numero è appunto l'indice della data partizione; il quale in consegnenza è determinato, a seconda de' casi, dalle formole (7), (8), (9). Attualmente i gruppi simili di sole lettere designate si traducono in gruppi identici di sole lettere a; e quindi possiamo enunciare la seguente proposizione:

Sia I_a *l'indice di una data partizione con* α *lettera* a *distribuite tra* ρ *gruppi nella misura di* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\rho$; *se non vi sono gruppi identici di sole* a, *si ha*

$$I_a = \frac{\alpha!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_\rho!},$$

ma, se vi sono sistemi di gruppi identici, come un sistema di A_1 *gruppi, un altro di* A_2, *ecc., sarà*

$$I_a = \frac{\alpha!}{\alpha_1!\alpha_2\ldots\alpha_\rho! \times A_1!A_2!\ldots}.$$

9. Queste formole si possono tradurre in una regola di più immediata e diretta applicazione. In una partizione a lettere uguali chiamiamo *esponente totale* di una lettera il numero che indica quante volte essa è contata nella partizione; ed *esponente parziale* il numero che indica quante volte essa è contata in un gruppo. Se un gruppo di sole

un determinato numero di fattori di gradi assegnati. Così, tornando all'esempio, è quistione di decomporre il monomio a^3b^2 in tre fattori, uno di 1°, e gli altri due di 2° grado; e si trova immediatamente che tre sono le possibili decomposizioni, cioè:

$$a^3b^2 = a.a^2.b^2 = a.ab.ab = b.a^2.ab.$$

Decomponendo le potenze in fattori semplici, si riproducono le tre partizioni ottenute come sopra.

Per dare un altro esempio, supporremo il sistema delle sei lettere a, a, a, b, b, b; e cercheremo le loro partizioni distinte in quattro gruppi, due semplici e due binarii; si tratta adunque di decomporre il monomio di 6° grado a^3b^3 in quattro fattori, due di 1° e due di 2° grado; ora si trova facilmente che le possibili decomposizioni sono quattro, cioè:

$$a^3b^3 = a.a.ab.b^2 = a.b.a^2.b^2 = a.b.ab.ab = b.b.a^2.ab;$$

e quindi si hanno altrettante partizioni distinte (a, a, ab, bb), (a, b, aa, bb), (a, b, ab, ab), (b, b, aa, ab).

Se si domandano le partizioni distinte delle stesse sei lettere in tre gruppi di una, di due e di tre lettere, converrà decomporre il monomio a^3b^3 in tre fattori di 1°, di 2° e di 3° grado, e ciò dà luogo alle sei decomposizioni

$$a^3b^3 = a.a^2.b^3 = a.ab.ab^2 = a.b^2.a^2b = b.b^2.a^3 = b.ab.a^2b = b.a^2.ab^2,$$

donde seguono altrettante partizioni.

lettere uguali è ripetuto più volte, chiameremo ancora *esponente del gruppo* il numero che indica quante volte esso è ripetuto. Poste queste denominazioni, le formole precedenti si traducono nella regola seguente:

L'indice di una partizione, che contiene una lettera ripetuta più volte, equivale al fattoriale dell'esponente totale della lettera diviso pe' fattoriali di tutti gli esponenti parziali e pe' fattoriali degli esponenti de' varii gruppi di sole lettere uguali.

Questa regola dà all'istante e senza calcolo di sorta la forma frazionaria, che esprime l'indice di qualunque partizione con una sola specie di lettere uguali; ed eccone degli esempî:

$$\text{Ind.}\ [aaaaabc\,,\, aaaade\,,\, aaaf\,,\, a\,,\, ghi] = \frac{13!}{5!4!3!1!}$$

$$\text{Ind.}\ [aabe\,,\, aade\,,\, aaf\,,\, aa\,,\, ag\,,\, ah\,,\, a\,,\, ikl] = \frac{11!}{(2!)^4(1!)^3}$$

$$\text{Ind.}\ [aabc\,,\, aa\,,\, aa\,,\, aa\,,\, ag\,,\, a\,,\, a\,,\, ikl] = \frac{11!}{(2!)^4(1!)^3 \times 3!2!}$$

$$\text{Ind.}\ [aa\,,\, aa\,,\, aa\,,\, aa\,,\, a\,,\, a\,,\, a\,,\, ikl] = \frac{11!}{(2!)^4(1!)^3 \times 4!3!}.$$

10. È ora facilissima la risoluzione della quistione nel caso che la data partizione contenga diverse specie di lettere uguali; e perciò basta osservare che nel còmputo dell'indice di una partizione, in cui si è supposta una sola lettera ripetuta, non influiscono per nulla le altre lettere; di modo che, se tra queste si trovasse un'altra lettera b ripetuta più volte, le conchiusioni sarebbero state esattamente le stesse; vale a dire si sarebbe trovato che pel fatto della lettera a la partizione deve ripetersi I_α volte; ma, siccome pel fatto della lettera b la partizione deve trovarsi analogamente ripetuta I_b volte, ne segue che pel fatto di entrambe le due lettere a e b la partizione si ripeterà tante volte quante sono le unità contenute nel prodotto $I_a \times I_b$. In somma, esistendo più lettere ripetute, torna opportuno di distinguere due indici della partizione, l'uno *parziale,* relativo a ciascuna di quelle lettere in particolare, ed è il numero che esprime quante volte la partizione si ripeterebbe pel fatto di questa sola lettera, come se non vi fossero altre lettere ripetute; l'altro *complessivo,* ed è il numero che esprime quante volte la partizione deve ripetersi pel fatto di tutte le diverse specie di lettere uguali. L'indice complessivo è appunto il numero che risolve la quistione; e da ciò che precede risulta, che: *l'indice complessivo equivale al prodotto degl'indici parziali.* Essendo già assicurata la costruzione degl'indici parziali, è in pari tempo assicurata la risoluzione della quistione.

11. Ma resta un'importante osservazione. Nella proposizione che abbiamo enunciata, è implicitamente contemplato il caso de' gruppi, che possono essere ripetuti nella data partizione, però formati da una sola specie di lettere uguali; i quali sono già considerati nella costruzione degl'indici parziali. Ma può darsi che la partizione contenga dei gruppi ripetuti di un altro genere, formati cioè da due o più specie di lettere uguali, per esempio più gruppi come ab, o come abc, ecc. ecc. Ora non occorrono altre dichiarazioni per comprendere che in questi casi, per avere il valore dell'indice complessivo, bisogna dividere il prodotto degl' indici parziali pe' numeri delle permutazioni relative a questi sistemi di gruppi; e quindi, chiamando sempre *esponente di un gruppo*

il numero che indica quante volte esso è ripetuto nella partizione, la risoluzione completa della quistione si riassume nella seguente proposizione:

L'indice complessivo di una partizione che contiene diverse specie di lettere ripetute equivale al prodotto degl'indici parziali relativi alle diverse specie di lettere, salvo a dividere questo prodotto pe' fattoriali degli esponenti de' gruppi, che si ripetono, contenenti almeno due specie di lettere ripetute.

Supposto che la partizione contenga le lettere ripetute $a, b, c, \ldots$, e che $I_a, I_b, I_c, \ldots$ siano i rispettivi indici parziali, se si rappresenta l'indice complessivo con $I_{a,b,c,\ldots}$, e si ammetta inoltre che vi siano de' gruppi ripetuti composti con più di una specie di lettere, e che $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ siano i loro esponenti, la proposizione precedente si tradurrà nella formola

$$I_{a,b,c,\ldots} = I_a I_b I_c \ldots \times \frac{1}{\lambda!\mu!\nu!\ldots},$$

la quale, se $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sono eguali ad 1, si riduce ad

$$I_{a,b,c,\ldots} = I_a I_b I_c \ldots$$

Sia, per esempio, la partizione con tre lettere ripetute $a, b, c,$

$$aabbc \;,\; abcc \;,\; aa \;,\; aa \;,\; bc \;,\; bc \;,\; bc \;,$$

in questo caso vi è il solo gruppo bc con due lettere diverse, che si ripete tre volte, sicchè si ha $\lambda = 3$, e si avrà quindi $I_{a,b,c} = I_a I_b I_c \frac{1}{3!}$. Ma

$$I_a = \frac{7!}{(2!)^3 1!2!} = \frac{7!}{2^4} \;,\quad I_b = \frac{6!}{2!(1!)^4} = \frac{6!}{2} \;,\quad I_c = \frac{6!}{2!(1!)^4} = \frac{6!}{2},$$

dunque risulta

$$I_{a,b,c} = \frac{7!}{2^4} \cdot \frac{6!}{2} \cdot \frac{6!}{2} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{7!6!6!}{2^6 3!}.$$

13. Tuttavolta trattandosi di un elemento che in diverse ricerche avremo bisogno di invocare ad ogni passo, gioverà togliere di mezzo l'intervento degl'indici parziali, ed ogni distinzione tra le specie de' gruppi, che si ripetono, e ridurre il processo pel calcolo dell'indice di qualunque partizione alla seguente semplicissima regola:

L'indice di qualsivoglia partizione è uguale al prodotto de' fattoriali di tutte le lettere, diviso pe' fattoriali di tutt'i loro esponenti parziali, e di quelli de' gruppi ripetuti di qualunque maniera.

Come si vede, questa regola dà immediatamente il valore dell'indice, e si applicherà con maggiore semplicità, non tenendo conto de' fattoriali di esponenti eguali ad 1. Eccone degli esempî che comprendono tutt'i casi:

$$\text{Ind.}(aaaabbb, aaabbc, aabc, ab, bc) = \frac{10!8!3!}{4!3!3!2!2!}.$$ Non vi sono gruppi ripetuti.

$$\text{Ind.}(aabb, aa, aa\,bb, bb, bb, ab, ab) = \frac{8!10!}{2^7 \times 2.3!2}.$$ I gruppi aa, bb, ab hanno rispettivamente gli esponenti 2, 3, 2.

$$\text{Ind.}(aabb, aabb, aabb, bc, bc, bc, bc) = \frac{6!10!4!}{2^6 \times 3!4!}.$$ I gruppi $aabb$, bc hanno il primo l'esponente 3, il secondo l'esponente 4.

$$\text{Ind.}(abc, abc, abc, a, a, a, a, a, b, b) = \frac{8!5!3!}{3!5!2!}.$$ Il gruppo abc ha l'esponente 3 ed i gruppi semplici a e b hanno per esponenti 5 e 2.

14. È osservabile il caso in cui tutte le lettere sono eguali. Sia n l'esponente della lettera a, e $p, q, \ldots, t$ gli esponenti parziali, per modo che

$$n = p + q + \ldots t.$$

In questa ipotesi la partizione può mettersi nella forma $(a^p, a^q, \ldots, a^t)$, avendo scritto per brevità, a^p per figurare il gruppo formato con la sola lettera a ripetuta p volte, ecc. ecc. Ora, se gli esponenti parziali $p, q, \ldots, t$ sono disuguali, secondo la regola precedente, si ha

$$\text{Ind.}\,(a^p, a^q, \ldots, a^t) = \frac{(p+q+\ldots+t)!}{p!\,q!\ldots t!} = \frac{n!}{p!\,q!\ldots t!}.$$

Paragonando questa formola con la (3), si vede che l'indice della partizione attuale coincide col numero delle partizioni di n lettere differenti in gruppi di $p, q, \ldots, t$ lettere; ma questo risultamento è naturale, perchè, divenendo eguali le n lettere, anche eguali divengono le partizioni; di guisa che si ha in effetti una sola partizione distinta, la quale adunque si ripete tante volte quante sono tutte le partizioni del sistema.

Supponendo che il gruppo a^p si ripeta nella partizione α volte, il gruppo a^q, β volte, ecc., in conformità della regola, si avrà

$$\text{Ind.}\,(a^p, a^q, \ldots, a^t) = \frac{n!}{p!\,q!\ldots t! \times \alpha!\,\beta!\ldots};$$

e, salva la scrittura alquanto diversa, il secondo membro di questa formola coincide nella sostanza col secondo membro della (5).

Ci limitiamo in questo articolo alla semplice esposizione della teoria della partizione delle lettere, riserbandoci di mostrarne la importanza con numerose applicazioni. Ma già questa teoria si trova applicata nell'ultimo articolo della precedente memoria, e servirà pure alla ricerca seguente.

II.

Sulla derivata di ordine qualunque del prodotto di funzioni di più variabili.

1. Tra' mezzi più fecondi di analisi dobbiamo annoverare la derivazione de' prodotti di funzioni di più variabili, ed una serie di ricerche relative a diversi punti difficili di algebra superiore e della teoria delle forme, che ci proponiamo di pubblicare, ne dimostrerà la superiore importanza. Ora, siccome siffatta derivazione costituisce un soggetto poco o nulla studiato, ci proponiamo qui di dichiarare le leggi generali dalle quali è regolata, ed a tal effetto andremo a risolvere la seguente quistione:

Trovare lo sviluppo di una derivata parziale d'ordine qualunque del prodotto di funzioni di più variabili, espresso mediante le derivate parziali delle funzioni istesse.

Indicheremo le variabili con $t, u, v, \ldots$, e le funzioni con $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; ed inoltre rappresenteremo le loro derivate parziali mediante la caratteristica D, dandole un indice superiore numerico eguale all'ordine di derivazione, ed un indice inferiore letterale formato dalla combinazione di altrettante variabili, cui si rapportano le derivazioni. Così, scrivendo $D_t\alpha$, $D^2_{tu}\alpha$, $D^3_{ttu}\alpha$, ecc. ecc., intendiamo le derivate di α prese o rispetto alla sola t, o rispetto a t ed u, o due volte rispetto a t ed una volta rispetto ad u, ecc. ecc. Posto ciò distingueremo due casi secondochè le derivazioni sono relative a variabili sempre diverse, o a variabili qualunque; ma la ricerca esige un'altra divisione, secondo che le funzioni date sono o no tra loro differenti.

I. — Funzioni disuguali.

Caso 1° — *Derivazioni relative a variabili sempre diverse.*

2. In questa ipotesi si palesano subito le condizioni dello sviluppo della derivata d'ordine qualunque del prodotto delle date funzioni, esaminando le derivate di alcuni de' primi ordini, calcolate con la regola ordinaria per la derivazione de' prodotti, e ponendo mente al modo come funziona questa regola nel passaggio da un ordine all'altro. Supponendo per fissar le idee tre funzioni α, β, γ, cercheremo le derivate de' primi

tre ordini: e quindi, derivando prima rispetto a t, indi rispetto ad u, e da ultimo rispetto a v, avremo successivamente

$$
\begin{aligned}
D_t(\alpha\beta\gamma) &= (D_t\alpha)\beta\gamma + (D_t\beta)\alpha\gamma + (D_t\gamma)\alpha\beta \\
D^2_{tu}(\alpha\beta\gamma) &= (D^2_{tu}\alpha)\beta\gamma + (D^2_{tu}\beta)\alpha\gamma + (D^2_{tu}\gamma)\alpha\beta + \\
&+ (D_t\alpha . D_u\beta)\gamma + (D_t\alpha . D_u\gamma)\beta + (D_t\beta . D_u\gamma)\alpha + (D_t\beta . D_u\alpha)\gamma + (D_t\gamma . D_u\alpha)\beta + (D_t\gamma . D_u\beta)\alpha \\
D^3_{tuv}(\alpha\beta\gamma) &= (D^3_{tuv}\alpha)\beta\gamma + (D^3_{tuv}\beta)\alpha\gamma + (D^3_{tuv}\gamma)\alpha\beta + \\
&+ \left\{\begin{array}{l}
(D^2_{tu}\alpha . D_v\beta)\gamma + (D^2_{tu}\alpha . D_v\gamma)\beta + (D^2_{tu}\beta . D_v\gamma)\alpha + (D^2_{tu}\beta . D_v\alpha)\gamma + (D^2_{tu}\gamma . D_v\alpha)\beta + (D^2_{tu}\gamma . D_v\beta)\alpha \\
(D^2_{tv}\alpha . D_u\beta)\gamma + (D^2_{tv}\alpha . D_u\gamma)\beta + (D^2_{tv}\beta . D_u\gamma)\alpha + (D^2_{tv}\beta . D_u\alpha)\gamma + (D^2_{tv}\gamma . D_u\alpha)\beta + (D^2_{tv}\gamma . D_u\beta)\alpha \\
(D^2_{uv}\alpha . D_t\beta)\gamma + (D^2_{uv}\alpha . D_t\gamma)\beta + (D^2_{uv}\beta . D_t\gamma)\alpha + (D^2_{uv}\beta . D_t\alpha)\gamma + (D^2_{uv}\gamma . D_t\alpha)\beta + (D^2_{uv}\gamma . D_t\beta)\alpha
\end{array}\right. \\
&+ (D_t\alpha . D_u\beta . D_v\gamma) + (D_t\alpha . D_u\gamma . D_v\beta) + (D_t\beta . D_u\gamma . D_v\alpha) + (D_t\beta . D_u\alpha . D_v\gamma) + (D_t\gamma . D_u\alpha . D_v\beta) + (D_t\gamma . D_u\beta . D_v\alpha) .
\end{aligned}
$$

Abbiamo circondato di parentesi i fattori derivati per tenerli ben distinti da' fattori non derivati.

3. In generale, se le funzioni date sono in numero di m, è evidente che nel 1° ordine la derivata del loro prodotto contiene m termini, ognuno de' quali è di nuovo un prodotto di m fattori; dunque nel 2° ordine la derivata conterrà m^2 termini, ciascuno di m fattori; quindi nel 3° ordine si avranno m^3 termini, ognuno di m fattori; ma a questo punto è manifesto che la derivata d'ordine qualunque n è un polinomio di m^n termini; ed ogni termine è sempre un prodotto di m fattori. Questi m fattori non sono che le stesse m funzioni date, però tutte, o in parte, sottomesse a derivazioni; ed è chiaro che il numero totale delle derivazioni ne' singoli fattori di un termine è costante ed uguale ad n; il che per la notazione adottata equivale a dire che in ogni termine la somma degl' indici numerici delle caratteristiche D è uguale ad n.

4. Un elemento fondamentale in questa ricerca è la *forma* de' termini, la quale è caratterizzata dal numero de' fattori derivati, e dagli ordini rispettivi di derivazione; di guisa che sono *termini di una stessa forma* quelli, ne' quali le derivazioni sono distribuite tra un egual numero di fattori, e nella stessa misura. Così, per esempio, nella derivata di 3° ordine si hanno tre distinte forme di termini: nell' una le tre derivazioni si cumulano sopra un sol fattore; nell' altra si distribuiscono tra due fattori nella misura di due e di una; e nella terza, fra tre fattori, una per ciascuno.

È evidente che, se è dato un termine, sono da riguardarsi come conosciuti tutt' i termini che hanno la stessa sua forma; ed in effetti daremo tra poco il processo per costruirli. Ora ciò vuol dire che la loro somma è una funzione determinata; ma questa proprietà segue direttamente dalla stessa natura della derivata. Cade sott' occhio che le derivate de' primi tre ordini sono funzioni simmetriche, tanto delle funzioni α, β, γ, quanto delle variabili t, u, v, ma è chiaro che il fatto è generale, perchè dipendente unicamente dal principio che l'ordine, con cui si succedono le derivazioni, è indifferente. Trattasi però di funzioni simmetriche multiformi *), perchè composte di termini

*) Diciamo *uniforme* una funzione simmetrica quando è formata di termini di una sola forma, e *multiforme* nel caso contrario. Una funzione simmetrica uniforme è determinata, conoscendone un termine; e se ammette coefficienti numerici, essi saranno necessariamente uguali tra loro. Egli è poi chiaro che una funzione simmetrica multiforme si può scindere in tante funzioni simmetriche uniformi quante sono le diverse forme di termini.

di varie forme; e quindi decomponibili in tante funzioni simmetriche uniformi quante sono le diverse forme di termini. Ora da ciò risulta immediatamente che nella derivata d'ordine qualunque la somma di tutt'i termini di una stessa forma costituisce una funzione simmetrica, la quale, per ciò solo che è uniforme, è determinata, conoscendone un termine qualunque.

Queste considerazioni permettono di ridurre le espressioni delle derivate a forme più concise ed anche più proprie; e per ciò basta che per ciascuna delle forme sia tenuto in evidenza un termine solo al di sotto di un Σ; ed è così, per esempio, che le derivate de' primi tre ordini si possono ridurre alle forme

$$D_u P \quad = \Sigma(D_u \alpha)\beta\gamma$$

$$D^2_{uv} P = \Sigma(D^2_{uv}\alpha)\beta\gamma + \Sigma(D_u\alpha . D_v\beta)\gamma$$

$$D^3_{tuv} P = \Sigma(D^3_{tuv}\alpha)\beta\gamma + \Sigma(D^2_{tu}\alpha . D_v\beta)\gamma + \Sigma(D_t\alpha . D_u\beta . D_v\gamma) .$$

5. Ma per applicare queste forme compendiate è necessario a conoscersi le forme possibili di termini per un ordine qualunque. Ora la forma di un termine dipende dal numero de' fattori derivati e dagli ordini rispettivi di derivazione, e quindi è definita dal sistema degl'indici numerici delle caratteristiche D, o da un simbolo formato dal complesso di tutte queste caratteristiche co' rispettivi indici superiori. Per esempio, se il sistema degl'indici è quello de' quattro numeri (3, 2, 1, 1), vuol dire che si tratta di termini, ne' quali si hanno quattro fattori derivati, uno tre volte, uno due volte, e gli altri due ciascuno una volta, e quindi la loro forma è completamente determinata dal simbolo $(D^3 D^2 DD)$.

Posto ciò, siccome la somma degl' indici superiori delle D è costante per tutt'i termini, ed in generale eguale ad n, segue che questi indici formano una partizione del numero n; e da ciò risulta senza più, che le forme possibili di termini nell'ordine n sono appunto definite dalle partizioni di n. Così nel 3° ordine queste forme sono definite dalle partizioni di 3, cioè [3, 21, 111], o da'simboli $[(D^3)$, (D^2D), $(DDD)]$.

Tuttavolta è a tener conto di una limitazione dipendente dal numero delle date funzioni α, β, γ, ..., numero che abbiamo indicato con m. Siccome ogni termine è un prodotto di m fattori, il numero di fattori derivati è, tutto al più, eguale ad m; e perciò le partizioni di n, le quali determinano le forme de' termini, sono quelle che contengono, o una parte, o due parti, o tre parti, ecc. ecc., fino ad m parti; o, in breve, sono tutte le partizioni di ordine non superiore ad m: e può quindi enunciarsi la seguente proposizione:

Nella derivata parziale d' ordine n *del prodotto di* m *funzioni, relativa ad* n *variabili diverse, le forme de' termini sono definite da tutte le partizioni del numero* n, *d'ordine non superiore ad* m.

6. Potendo essere opportuno un esempio, cercheremo la derivata di 6^o ordine del prodotto di quattro funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, relativa alle sei variabili t, u, v, x, y, z. Se le funzioni date fossero sei, o in qualunque altro numero maggiore di sei, le forme de' termini sarebbero tante quante sono le partizioni di 6 di tutti gli ordini dal 1^o al 6^o; e queste partizioni, in numero di undici, sono quelle che abbiamo notate a fianco, co' corrispondenti simboli letterali. Ora, le funzioni date essendo quattro, bisogna tener conto delle partizioni de' primi quattro ordini, che sono in numero di nove, sicchè restano inoperose le due ultime partizioni, l'una di 5^o l'altra di 6^o ordine; nel caso attuale adunque le forme de' termini si riducono a nove; ed in conseguenza l'espressione della derivata di 6^o ordine del prodotto di quattro funzioni, in forma compendiata, sarà la seguente:

6	(D^6)
51	$(D^5 D)$
42	$(D^4 D^2)$
33	$(D^3 D^3)$
411	$(D^4 DD)$
321	$(D^3 D^2 D)$
222	$(D^2 D^2 D^2)$
3111	$(D^3 DDD)$
2211	$(D^2 D^2 DD)$
21111	$(D^2 DDDD)$
111111	$(DDDDDD)$

$$
\begin{aligned}
&D^6_{tuvxyz}(\alpha\beta\gamma\delta) = \\
&\Sigma(D^6_{tuvxyz}\alpha)\beta\gamma\delta + \Sigma(D^5_{tuvxy}\alpha . D_z \beta)\gamma\delta + \Sigma(D^4_{tuvx}\alpha . D_y \beta . D_z\gamma)\delta + \Sigma(D^3_{tuv}\alpha . D_x \beta . D_y\gamma . D_z\delta) \\
&\qquad + \Sigma(D^4_{tuvx}\alpha . D^2_{yz}\beta)\gamma\delta + \Sigma(D^3_{tuv}\alpha . D^2_{xy}\beta . D_z\gamma)\delta + \Sigma(D^2_{tu}\alpha . D^2_{vx}\beta . D_y\gamma . D_z\delta) \\
&\qquad + \Sigma(D^3_{tuv}\alpha . D^3_{xyz}\beta)\gamma\delta + \Sigma(D^2_{tu}\alpha . D^2_{vx}\beta . D^2_{yz}\beta)\delta .
\end{aligned}
$$

Questa espressione, scritta per esteso, non conta meno di $4^6 = 4096$ termini.

7. Per completare la ricerca resta a vedersi quanti e quali sono i termini compresi sotto una stessa forma. Posto che le m funzioni date siano figurate dalle m lettere, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, e che $t, u, v, x, \ldots, z$ siano le n variabili impegnate nelle derivazioni, si tratta di risolvere la seguente quistione:

Supponendo che il numero n *sia decomposto in* r *parti, uguali o disuguali,* $n_1 n_2, \ldots, n_r$, *ed* r *non maggiore di* m, *costruire tutt'i termini compresi sotto la forma definita dalla partizione* $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, *o dal simbolo corrispondente*

$$
\left(D^{n_1} D^{n_2} \ldots D^{n_r}\right) \cdot
$$

Volendo con questo simbolo formare un termine a piacere, basta sottoporre alle r caratteristiche D, una per parte, r lettere prese ad arbitrio tra le m lettere $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, e quindi dare per indice inferiore alla prima D una combinazione di n_1 variabili qualunque; alla seconda D un'altra combinazione di n_2 variabili diverse dalle prime; e così di seguito. Veramente il termine così formato è incompleto, perchè vi mancano i fattori non derivati, vale a dire le altre $m-r$ lettere φ non incluse nel simbolo; ma, siccome questi fattori possono supplirsi quando si voglia, per semplicità terremo momentaneamente siffatte espressioni come termini perfetti, salvo a completarle a calcolo finito.

Posto ciò, si formino da un lato le disposizioni r ad r delle m lettere $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$; da un altro lato le partizioni *distinte* delle n variabili in r gruppi di $n_1, n_2, \ldots, n_r$ variabili (V. la nota precedente *intorno alla partizione di lettere*), e sia Δ_r il numero delle prime ed N_r quello delle seconde. Ora, per costruire ordinatamente il completo sistema

de' termini, si possono prima applicare al simbolo, una ad una, tutte le Δ_r disposizioni, con che si ottengono i seguenti Δ_r tipi:

$$(D^{n_1}\varphi_1 D^{n_2}\varphi_2 . D^{n_3}\varphi_3 \ldots) \ , \ (D^{n_1}\varphi_2 . D^{n_2}\varphi_1 . D^{n_3}\varphi_3 \ldots) \ , \ (D^{n_1}\varphi_2 . D^{n_2}\varphi_3 . D^{n_3}\varphi_1 \ldots) \text{, ecc. ecc.,}$$

e quindi a ciascuno di questi tipi si applicheranno, una ad una, come indici inferiori, tutte le N_r partizioni di variabili. Per tal modo si ha un sistema di termini, in numero di $\Delta_n \times N_n$; questi termini, completati co' fattori non derivati, sono tutti quelli che possono risolvere la quistione; e che siano tutti risulta immediatamente dal fatto evidente che la loro somma è funzione simmetrica tanto delle m lettere $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, quanto delle altre n lettere $t, u, \ldots, z$.

8. Per indicare il numero de' termini compresi sotto la forma definita dalla partizione $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, o $(n_1 n_2 \ldots n_r)$, useremo il simbolo $T^{(m)}(n_1 n_2 \ldots n_r)$, nel quale la caratteristica T è preposta alla stessa partizione, mentre l'indice superiore m ricorda il numero delle date funzioni, ed in conseguenza di ciò che precede si avrà, in generale,

$$T^{(m)}(n_1 n_2 \ldots n_r) = N_r \Delta_r .$$

In questa formola Δ_r dinota il numero delle disposizioni r ad r di m lettere, e si ha quindi

$$\Delta_r = m(m-1)\ldots(m-r+1) = \frac{m!}{(m-r)!} .$$

Inoltre, siccome N_r indica il numero delle partizioni distinte di n lettere differenti in r gruppi di $n_1, n_2, \ldots, n_r$ lettere, se non vi sono gruppi simili (V. la nota citata), vale a dire se le parti della partizione, $n_1, n_2, \ldots$, sono tra loro disuguali, si avrà

$$N_r = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} , \tag{1}$$

e sarà di seguito

$$T^{(m)}(n_1 n_2 \ldots n_r) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} \times \frac{m!}{(m-r)!} . \tag{2}$$

Ammettendo poi che tra le parti $n_1, n_2, \ldots$, ve ne siano delle eguali, e pongasi ν_1 di una specie, ν_2 di un'altra specie, ecc. ecc., si avrà

$$N_r = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r! \times \nu_1!\, \nu_2! \ldots} , \tag{3}$$

ed in questa ipotesi verrà

$$T^{(m)}(n_1 n_2 \ldots n_r) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r! \times \nu_1!\, \nu_2! \ldots} \times \frac{m!}{(m-r)!} . \tag{4}$$

*

Applicando queste formole alla derivata di 6° ordine del prodotto di quattro funzioni (n.° 6), per cui $n=6$, $m=4$, si ha

$$T^{(4)}(6) = \frac{6!}{6!}\,4 = 1.4 = 4 \quad ; \quad T^{(4)}(411) = \frac{6!}{4!2!}\,4.3.2 = 15.24 = 360$$

$$T^{(4)}(51) = \frac{6!}{5!}\,4.3 = 6.12 = 72 \quad ; \quad T^{(4)}(321) = \frac{6!}{3!2!}\,4.3.2 = 60.24 = 1440$$

$$T^{(4)}(42) = \frac{6!}{4!2!}\,4.3 = 15.12 = 180 \quad ; \quad T^{(4)}(232) = \frac{6!}{2^3.3!}\,4.3.2 = 15.24 = 360$$

$$T^{(4)}(33) = \frac{6!}{3!3!2!}\,4.3 = 10.12 = 120 \quad ; \quad T^{(4)}(3111) = \frac{6!}{3!3!}\,4.3.2.1 = 20.24 = 480$$

$$T^{(4)}(2211) = \frac{6!}{2^2.2.2}\,4.3.2.1 = 45.24 = 1080\,.$$

Addizionando questi numeri, la somma deve riprodurre la 6ª potenza di 4, ed in effetti si trova eguale a $4096 = 4^6$.

Caso 2° — *Derivazioni relative a variabili qualunque.*

9. La forma dello sviluppo della derivata d'ordine n del prodotto di funzioni di più variabili, ottenuto nella ipotesi che le derivazioni si rapportino a variabili sempre diverse, resta evidente immutata se alcune delle variabili si suppongano eguali tra loro, poichè si hanno sempre le stesse forme di termini, e lo stesso numero di termini per ogni forma. Il solo divario tra'due casi sta in ciò che, se le variabili sono diverse, i termini sono tutti tra loro necessariamente dissimili, e non ammettono coefficienti numerici diversi da 1; mentre, nel caso contrario, intervengono generalmente termini simili, e quindi le conseguenti contrazioni daranno origine a coefficienti numerici diversi da 1. Posto ciò, ammessa la ripetizione delle derivazioni rispetto alle stesse variabili, la quistione, che ora ci proponiamo di risolvere è quella di *determinare il coefficiente numerico di un dato termine appartenente a qualunque forma.*

10. Considerando un termine qualunque nella ipotesi delle variabili disuguali, per esempio quello in cui figurano le r funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$, ordinatamente derivate $n_1, n_2, \dots, n_r$ volte rispetto a variabili sempre diverse, è chiaro che questo termine è uno di quelli che nascono immediatamente dal tipo

$$\left(D^{n_1}\varphi_1 D^{n_2}\varphi_2 \dots D^{n_r}\varphi_r\right), \tag{1}$$

applicandogli le partizioni delle n variabili in r gruppi di $n_1, n_2, \dots, n_r$ variabili. Ora, se nella partizione, da cui risulta quel termine, si pongano α variabili uguali a t, β uguali ad $u, \dots, \varepsilon$ uguali a z, ripartite però tra' gruppi, le prime nella misura di $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, le seconde nella misura di $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$, ecc. ecc., la partizione potrà mettersi nella forma

$$t^{\alpha_1}u^{\beta_1}\dots z^{\varepsilon_1}\,,\; t^{\alpha_2}u^{\beta_2}\dots z^{\varepsilon_2}\,,\dots,\; t^{\alpha_r}u^{\beta_r}\dots z^{\varepsilon_r}, \tag{2}$$

avendo scritto per brevità t^{α_1} per significare la lettera t ripetuta α_1 volte, ecc. ecc., e

quindi, se si dinota con k il coefficiente numerico del termine, la sua espressione, completata ancora co' fattori non derivati, sarà

$$k\left(\mathrm{D}^{n_1}_{t^{\alpha_1}u^{\beta_1}\ldots z^{\varepsilon_1}}\varphi_1\times\mathrm{D}^{n_2}_{t^{\alpha_2}u^{\beta_2}\ldots z^{\varepsilon_2}}\varphi_2\times\ldots\times\mathrm{D}^{n_r}_{t^{\alpha_r}u^{\beta_r}\ldots z^{\varepsilon_r}}\varphi_r\right)\varphi_{r+1}\varphi_{r+2}\ldots\varphi_m, \tag{3}$$

o con notazione attualmente più propria

$$k\frac{d^{n_1}\varphi_1}{dt^{\alpha_1}du^{\beta_1}\ldots dz^{\varepsilon_1}}\times\frac{d^{n_2}\varphi_2}{dt^{\alpha_2}du^{\beta_2}\ldots dz^{\varepsilon_2}}\times\ldots\times\frac{d^{n_r}\varphi_r}{dt^{\alpha_r}du^{\beta_r}\ldots dz^{\varepsilon_r}}\varphi_{r+1}\varphi_{r+2}\ldots\varphi_m\,; \tag{4}$$

ed è poi manifesto che, in conformità delle ipotesi, si hanno le relazioni

$$\begin{array}{l} n_1=\alpha_1+\beta_1+\ldots+\varepsilon_1\quad,\quad n_2=\alpha_2+\beta_2+\ldots+\varepsilon_2\,,\ldots,\,n_r=\alpha_r+\beta_r+\ldots+\varepsilon_r\,,\\ \alpha\;=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r\quad,\quad \beta\;=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r\,,\ldots,\,\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_r\,. \end{array} \tag{5}$$

Posto ciò, sia I l'indice della partizione (2), e k il coefficiente del termine (3). Se la partizione non contiene gruppi ripetuti, l'espressione del termine cangia evidentemente di valore, permutandovi in qualunque modo tra loro le lettere $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_r$; ciò vuol dire che il termine non può nascere da alcuno degli altri tipi risultanti da siffatte permutazioni, di modo che si trova esclusivamente tra quelli provvenienti dal tipo (1); e quindi, siccome tra questi termini deve riprodursi tante volte, quante volte si può ripetere la partizione (2) nel sistema completo delle partizioni delle n lettere, cioè I volte *(nota intorno alla partizione di lettere)*, ne segue che nel caso attuale si ha semplicemente $k=\mathrm{I}$; ma per la teoria della partizione di lettere si ha

$$\mathrm{I}=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r)!\,(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r)!\ldots(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots\varepsilon_r)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_r!\times\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_r!\times\ldots\times\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_r!}\,; \tag{6}$$

adunque, osservando alle relazioni (5), risulta che quando nel termine (3) non vi sono indici inferiori ripetuti, il suo coefficiente k è definito dalla formola

$$k=\frac{\alpha!\,\beta!\ldots\varepsilon!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_r!\times\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_r!\times\ldots\times\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_r!}\,. \tag{7}$$

11. Ammettiamo ora che nella partizione (2) vi siano gruppi ripetuti, e supponiamo dapprima che siano eguali solamente i primi λ gruppi; ciò importa che nel termine (3) saranno uguali gl' indici inferiori delle prime λ caratteristiche D, e conseguentemente anche eguali tra loro saranno i corrispondenti indici superiori $n_1,n_2,\ldots,n_\lambda$. Poste queste condizioni, è evidente che l'espressione del termine non cangia di valore comunque si permutino tra loro le lettere $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_\lambda$; il che dimostra che il detto termine si riproduce in tutti i $\lambda!$ tipi risultanti da siffatte permutazioni; ma in ogni tipo deve sempre riprodursi I volte; dunque, in tutto, il termine si ripete $\mathrm{I}\times\lambda!$ volte; e perciò nella ipotesi attuale si ha $k=\mathrm{I}\times\lambda!$. Per semplicità abbiamo supposto che nella partizione (2) vi fosse una sola specie di gruppi ripetuti; ma ora è chiaro che, se vi sono i specie di tali gruppi, e siano $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_i$ i loro esponenti, si avrà in generale

$$k=\mathrm{I}\times\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_i!\,.$$

Nel caso presente, per ottenere l'espressione dell'indice I bisogna dividere il secondo membro della formola (7) pel prodotto $\lambda_1!\lambda_2!..\lambda_i!$; ma siccome per avere il valore di k bisognerebbe moltiplicare il quoziente per lo stesso prodotto, avviene che questo prodotto sparisce, e si giunge così alla conseguenza importante che il coefficiente del termine (3) è in ogni caso definito dalla formola (7).

12. Siccome il coefficiente k costituisce un elemento di calcolo che ha una estesa influenza, tornerà utile di ridurre la sua ricerca ad una regola, che ne dà immediatamente il valore. Chiamando *esponente totale di derivazione* di una variabile il numero complessivo delle derivazioni relative a questa variabile *), ed *esponente parziale* il numero di quelle attribuite ad una singola funzione, la formola (7) si traduce in questo canone:

Il coefficiente di un dato termine, appartenente alla derivata d'ordine qualunque del prodotto di funzioni di più variabili, equivale al prodotto de' fattoriali degli esponenti totali di tutte le variabili, diviso pe' fattoriali de' loro esponenti parziali.

Applicando, per esempio, questo canone al termine

$$D^3_{ttt}\varphi_1 \cdot D^3_{ttt}\varphi_2 \cdot D^2_{uu}\varphi_3 \cdot D_u\varphi_u \cdot D_u\varphi_5 \cdot D_u\varphi_6 = \frac{d^3\varphi_1}{dt^3} \cdot \frac{d^3\varphi_2}{dt^3} \cdot \frac{d^2\varphi_3}{du^2} \cdot \frac{d\varphi_4}{du} \cdot \frac{d\varphi_5}{du} \cdot \frac{d\varphi_6}{du}$$

si osserverà che gli esponenti totali delle variabili t ed u equivalgono rispettivamente a $3+3=6$, e $2+1+1+1=5$; e quindi, non tenendo conto de' fattoriali di esponenti uguali ad 1, pel coefficiente di questo termine si ha subito $k=\frac{6!5!}{3!3!2!}$.

Ancora, supposto il termine

$$D^3_{tuv}\varphi_1 \cdot D^3_{tuv}\varphi_2 \cdot D^2_{tu}\varphi_3 \cdot D^2_{uv}\varphi_4 \cdot D^2_{tv}\varphi_5 = \frac{d^3\varphi_1}{dtdudv} \cdot \frac{d^3\varphi_2}{dtdudv} \cdot \frac{d^2\varphi_3}{dtdu} \cdot \frac{d^2\varphi_4}{dudv} \cdot \frac{d^2\varphi_5}{dtdv},$$

si vede che l'esponente totale di ciascuna delle tre variabili t, u, v è uguale a 4; e, siccome gli esponenti parziali sono tutti uguali ad 1, si ha semplicemente $k=4!4!4!$

13. Se le variabili sono tutte eguali, per esempio a t, il termine (3) può mettersi nella forma

$$(D^{n_1}\varphi_1 D^{n_2}\varphi_2 \dots D^{n_r}\varphi_r)\varphi_{r+1}\varphi_{r+2}\dots\varphi_m, \qquad (8)$$

potendo ora sopprimersi gl'indici inferiori delle caratteristiche D, perchè formati dalla t ripetuta tante volte quante sono le unità contenute nei corrispondenti indici superiori; ma, volendo tenere la variabile in vista, può adottarsi l'altra forma

$$\frac{d^{n_1}\varphi_1}{dt^{n}} \frac{d^{n_2}\varphi_2}{dt^{n_2}} \dots \frac{d^{n_r}\varphi_r}{dt^{n_r}} \varphi_{r+1}\varphi_{r1}\dots\varphi_m. \qquad (9)$$

*) Si può osservare che il termine (3) o (4) appartiene allo sviluppo della derivata d'ordine n del prodotto $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_m$, presa α volte rispetto a t, β volte rispetto ad $u,\dots,\varepsilon$ volte rispetto a z, o, secondo il nostro modo di esprimerci, appartiene allo sviluppo della derivata del detto prodotto relativa alla combinazione di variabili $t^\alpha u^\beta \dots z^\varepsilon$, e che è rappresentata da

$$\frac{d^n(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_m)}{dt^\alpha du^\beta \dots dz^\varepsilon}.$$

Ora è evidente che, per tutt'i termini appartenenti allo sviluppo di questa derivata, gli *esponenti totali* delle variabili $t,u,\dots,z$ sono appunto, e rispettivamente, gli esponenti di $dt, du,\dots,dz$, ovvero gli esponenti delle stesse variabili nella combinazione $t^\alpha u^\beta \dots z^\varepsilon$.

In questa ipotesi per tanto l' esponente totale di derivazione dell'unica variabile t diviene uguale ad $n_1+n_2+\ldots+n_r$, ossia ad n, ed il coefficiente del termine sarà definito dalla formola

$$k=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}\ .$$

Ora questo valore di k è il coefficiente che prende il monomio

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^{n_1}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^{n_2}\cdots\left(\frac{d\varphi_r}{dt}\right)^{n_r}$$

nello sviluppo della potenza $\left(\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{d\alpha_2}{dt}+\ldots+\frac{d\varphi_r}{dt}\right)^n$, e si osserverà che, se i fattori del monomio, cioè le potenze $\frac{d\varphi_1^{n_1}}{dt^{n_1}}$, $\frac{d\varphi_2^{n_2}}{dt^{n_2}}$, ... si mutino rispettivamente nelle derivate $\frac{d_1^{n}\alpha_1}{dt^{n}_1}$, $\frac{d_2^{n}\alpha_2}{dt^{n}_2}$, ..., e quindi il monomio così modificato si moltiplichi per tutte le altre $m-r$ funzioni φ_{r+1}, φ_{r+2}, ... φ_m, che non figurano nello stesso monomio, si ottiene appunto l'espressione (9). Da ciò risulta la proposizione conosciuta che la derivata d'ordine n del prodotto di m funzioni di una variabile t si può esprimere mediante la formola simbolica

$$\frac{d^n(\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_m)}{dt^n}=\left(\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{d\varphi_2}{dt}+\ldots+\frac{d\varphi_m}{dt}\right)^{(n)},$$

a patto che, dopo lo sviluppo le potenze di $\frac{d\varphi_1}{dt}$, $\frac{d\varphi_2}{dt}$, ... siano mutate in derivate di ordini rispettivamente uguali a' gradi delle potenze medesime; e di più che ogni termine ia moltiplicato per le altre funzioni φ, che non figurano nel termine medesimo.

II. — Funzioni qualunque.

14. Sia k il coefficiente del termine (3) nella ipotesi che le funzioni φ siano differenti; se alcune di queste funzioni divengano uguali, il coefficiente del termine diverrà un multiplo di k.

Supponiamo che divengano uguali soltanto μ funzioni, e di più che siano tutte derivate; il termine, che già si ripete k volte per fatto della partizione letterale, dovrà pure ripetersi tra quelli nascenti dalle disposizioni r ad r delle funzioni φ, che differiscono tra loro solo nell'ordine delle μ funzioni, e che sono tante quante sono le permutazioni di μ lettere. Il termine adunque, oltre a ripetersi k volte, si ripeterà ancora $\mu!$ volte; e quindi, indicando nella ipotesi attuale con K il suo coefficiente, si avrà

$$K=k\mu!$$

Però questa formola è vera, se nel termine non vi sono fattori derivati uguali. Ma se un fattore derivato è ripetuto h volte, vuol dire che nella partizione letterale vi è un gruppo di variabili ripetuto altrettante volte; e ciò fa che il termine debba ripetersi $h!$ volte, come provveniente da $h!$ disposizioni (n.° 11). Ora di questa ripetizione si è già tenuto conto nel calcolo di k; e quindi, siccome le $h!$ disposizioni sono comprese tra

le $\mu!$ permutazioni più sopra considerate, ne segue che nel caso presente il valore di K equivale al prodotto di k per $\frac{\mu!}{h!}$; e si ha perciò

$$K = k\frac{\mu!}{h!}.$$

Se vi sono più categorie di fattori derivati uguali, o, meglio, più fattori derivati elevati a potenze, di esponenti $h, h_1, h_2, \ldots$, si avrà uniformemente

$$K = k\frac{\mu!}{h!\,h_1!\,h_2!\ldots}.$$

Ammettendo che tra le μ funzioni eguali ve ne siano η non derivate, si osserverà che le medesime non possono influire alla ripetizione del termine, perchè non vanno permutate; e quindi, ritenute le altre ipotesi, per avere in tal caso il valore di K, bisogna ancora dividere il fattoriale di μ pel fattoriale di η, e si ha in conseguenza

$$K = k\frac{\mu!}{h!\,h_1!\,h_2!\ldots\eta!}.$$

15. A questo punto è evidente che, se vi sono altre categorie di funzioni uguali, ciascuna deve analogamente introdurre elementi uniformi nel valore di K. Si può osservare che nella ipotesi attuale il prodotto di tutte le funzioni è naturalmente un monomio formato di convenienti potenze delle sole funzioni distinte; ed allora la risoluzione completa della quistione si può riassumere come segue:

Sia K *il coefficiente del dato termine;* k *il coefficiente, che prenderebbe lo stesso termine se le funzioni fossero tutte disuguali; e siano inoltre*

$\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ *gli esponenti delle funzioni;*

$h, h_1, h_2, \ldots$ *gli esponenti de' fattori derivati;*

$\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ *gli esponenti delle funzioni non derivate.*

Poste queste indicazioni il valore di K è definito in ogni caso dalla formola

$$K = k\frac{\mu!\,\mu_1!\,\mu_2!\ldots}{h!\,h_1!\,h_2!\ldots\eta!\,\eta_1!\,\eta_2!\ldots},$$

nella quale basta, com'è naturale, di considerare i soli esponenti maggiori di 1.

Siccome il coefficiente K costituisce un elemento importantissimo di analisi, ci sembra utile di renderne il calcolo indipendente da formole, e concretarlo nella regola seguente:

Per ottenere il coefficiente di un dato termine appartenente allo sviluppo di una derivata parziale d'ordine superiore del prodotto di funzioni qualunque di più variabili, bisogna innanzi tutto calcolare il coefficiente, che prenderebbe se tutte le funzioni fossero disuguali, e che risulta dal prodotto degli esponenti totali di derivazione di tutte le variabili, diviso pe' fattoriali de' loro esponenti parziali. Ottenuto questo speciale coefficiente, si moltiplicherà pe' fattoriali degli esponenti delle funzioni ripetute, e si dividerà pe' fattoriali degli esponenti de' fattori derivati ripetuti, e di quelli delle funzioni ripetute, non derivate.

finita stampare il dì 7 gennaio 1880

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DI VARIABILI

MEMORIA

del Socio Ordinario A. DE GASPARIS

letta nell'Adunanza del dì 6 luglio 1878

PARTE SECONDA

1. Abbiasi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{1}$$

e si ponga $x_r = \frac{1}{\xi_r}$. Sostituendo avremo

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0. \tag{2}$$

Ora supponendo

$$(\chi' - \xi_1)\frac{d\varphi}{d\xi_1} + (\chi'' - \xi_2)\frac{d\varphi}{d\xi_2} \ldots + (\chi^{(n)} - \xi_n)\frac{d\varphi}{d\xi_n} = 0$$

indicando con χ_r, come si è praticato nella precedente trasformazione, ciò che diventa $\chi^{(r)}$ quando tutte le altre χ sono zero, viene

$$\left.\begin{array}{l}
\chi_1 \frac{d\varphi}{d\xi_1} = \xi_1 \frac{d\varphi}{d\xi_1} + \xi_2 \frac{d\varphi}{d\xi_2} + \xi_3 \frac{d\varphi}{d\xi_3} \ldots \xi_n \frac{d\varphi}{d\xi_n} \\
\chi_2 \frac{d\varphi}{d\xi_2} = \xi_1 \frac{d\varphi}{d\xi_1} + \xi_2 \frac{d\varphi}{d\xi_2} + \xi_3 \frac{d\varphi}{d\xi_3} \ldots \xi_n \frac{d\varphi}{d\xi_n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\chi_n \frac{d\varphi}{d\xi_n} = \xi_1 \frac{d\varphi}{d\xi_1} + \xi_2 \frac{d\varphi}{d\xi_2} + \xi_3 \frac{d\varphi}{d\xi_3} \ldots \xi_n \frac{d\varphi}{d\xi_n}
\end{array}\right\} \tag{3}$$

quindi per una qualunque delle χ, dividendo pel suo coefficiente entrambi i membri

della equazione corrispondente, è

$$\chi_r = \xi_1 \frac{\frac{d\varphi}{d\xi_1}}{\frac{d\varphi}{d\xi_r}} + \xi_2 \frac{\frac{d\varphi}{d\xi_2}}{\frac{d\varphi}{d\xi_r}} \dots + \xi_r \dots + \xi_n \frac{\frac{d\varphi}{d\xi_n}}{\frac{d\varphi}{d\xi_r}} . \tag{4}$$

Ora dalla (2) si ha

$$\frac{d\varphi}{d\xi_r}\left(\frac{d\xi_r}{d\xi_s}\right) + \frac{d\varphi}{d\xi_s} = 0 ,$$

e tenendone conto nella (4) ed analoghe si ha

$$\left.\begin{array}{l}
\chi_1 = \xi_1 - \xi_2\left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2}\right) - \xi_3\left(\frac{d\xi_1}{d\xi_3}\right) \dots \xi_n \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_n}\right) \\
\chi_2 = \xi_2 - \xi_1\left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1}\right) - \xi_3\left(\frac{d\xi_2}{d\xi_3}\right) \dots \xi_n \left(\frac{d\xi_2}{d\xi_2}\right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\chi_n = \xi_n - \xi_1\left(\frac{d\xi_n}{d\xi_1}\right) - \zeta_2\left(\frac{d\xi_n}{d\xi_2}\right) \dots \xi_{n-1}\left(\frac{d\xi_n}{d\xi_{n-1}}\right)
\end{array}\right\} ; \tag{5}$$

attualmente $\xi_r\ \chi_r$ sono tra loro legate da relazioni della stessa forma di quella che prima lo erano le variabili $x_r X_r$. Salvo che prima per le x_r si verificava $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ed ora la f è rimpiazzata dalla φ, avendosi $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$. Ciò valga anche per quello che sarà in seguito esposto. Ragionando adunque come si è fatto nella prima parte di questo lavoro, si giungerà alle equazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{l}
1 = \frac{\xi_1}{\chi_1} + \frac{\xi_2}{\chi_2} + \frac{\xi_3}{\chi_3} \dots + \frac{\xi_n}{\chi_n} \\
1 = \frac{1}{x_1\chi_1} + \frac{1}{x_2\chi_2} + \frac{1}{x_3\chi_3} \dots + \frac{1}{x_n\chi_n}
\end{array}\right\} , \tag{6}$$

onde

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = \frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{\chi_1} - \frac{1}{\chi_2}\frac{d\frac{1}{\chi_1}}{d\frac{1}{\chi_2}} - \frac{1}{\chi_3}\frac{d\frac{1}{\chi_1}}{d\frac{1}{\chi_3}} \dots - \frac{1}{\chi_n}\frac{d\frac{1}{\chi_1}}{d\frac{1}{\chi_n}} \\
x_2 = \frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{\chi_2} - \frac{1}{\chi_1}\frac{d\frac{1}{\chi_2}}{d\frac{1}{\chi_1}} - \frac{1}{\chi_3}\frac{d\frac{1}{\chi_2}}{d\frac{1}{\chi_3}} \dots - \frac{1}{\chi_n}\frac{d\frac{1}{\chi_2}}{d\frac{1}{\chi_n}} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n = \frac{1}{\xi_n} = \frac{1}{\chi_n} - \frac{1}{\chi_1}\frac{d\frac{1}{\chi_n}}{d\frac{1}{\chi_1}} - \frac{1}{\chi_2}\frac{d\frac{1}{\chi_n}}{d\frac{1}{\chi_2}} \dots - \frac{1}{\chi_{n-1}}\frac{d\frac{1}{\chi_n}}{d\frac{1}{\chi_{n-1}}}
\end{array}\right\} . \tag{7}$$

2. Si è veduto nella prima parte che fra le $x_1 x_2 \dots x_n$ e le $X_1 X_2 \dots X_n$ hanno luogo $n+1$ equazioni, le quali sono

$$X_1 \frac{df}{dx_1} = X_2 \frac{df}{dx_2} = X_3 \frac{df}{dx_3} \dots = X_n \frac{df}{dx_n}$$

che sono $n-1$ in numero; si ha ancora

$$X_1 X_2 X_3 \dots X_n = x_1 X_2 X_3 \dots X_n + X_1 x_2 X_3 \dots X_n + \dots + X_1 X_2 \dots X_{n-1} x_n ,$$

la quale è lineare rispetto alle x; e finalmente si ha la $f(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = 0$. Ora espresse le x in funzione delle X colle n equazioni precedenti, ove se ne faccia la sostituzione in quest'ultima scritta, risulterà

$$F(X_1, X_2, X_3 \dots X_n) = 0, \tag{8}$$

e questa, per brevità di linguaggio, chiameremo la *dedotta* della $f=0$.

Dalla *primitiva* $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ si sono ricavate nel modo esposto, le due altre $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$, $F(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$. Ora è scopo di questo lavoro di ricercare le relazioni che sorgono, trattando le varie equazioni in modo uniforme a quello tenuto nella prima parte. È sotto questo punto di vista che potremo operare sulla $F=0$ come si è fatto sulla $f=0$ ed eseguire novelle trasformazioni introducendo novelle variabili.

Posto adunque

$$(\psi' - X_1) \frac{dF}{dX_1} + (\psi'' - X_2) \frac{dF}{dX_2} \dots (\psi^{(n)} - X_n) \frac{dF}{dX_n} = 0$$

indicando con ψ_r ciò che diventa $\psi^{(r)}$ allorchè le rimanenti ψ si annullano, viene

$$\left.\begin{array}{l}
\psi_1 \frac{dF}{dX_1} = X_1 \frac{dF}{dX_1} + X_2 \frac{dF}{dX_2} \dots + X_n \frac{dF}{dX_n} \\
\psi_2 \frac{dF}{dX_2} = X_1 \frac{dF}{dX_1} + X_2 \frac{dF}{dX_2} \dots + X_n \frac{dF}{dX_n} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\psi_n \frac{dF}{dX_n} = X_1 \frac{dF}{dX_1} + X_2 \frac{dF}{dX_2} \dots + X_n \frac{dF}{dX_n}
\end{array}\right\}, \tag{9}$$

ed in seguito avremo le altre

$$\left.\begin{array}{l}
\psi_1 = X_1 - X_2 \frac{dX_1}{dX_2} - X_3 \frac{dX_1}{dX_3} \dots - X_n \frac{dX_1}{dX_n} \\
\psi_2 = X_2 - X_1 \frac{dX_2}{dX_1} - X_3 \frac{dX_2}{dX_3} \dots - X_n \frac{dX_2}{dX_n} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\psi_n = X_n - X_1 \frac{dX_n}{dX_1} - X_2 \frac{dX_n}{dX_2} \dots - X_{n-1} \frac{dX_n}{dX_{n-1}}
\end{array}\right\}; \tag{10}$$

*

come ancora sarà

$$1 = \frac{X_1}{\psi_1} + \frac{X_2}{\psi_2} + \frac{X_3}{\psi_3} \dots + \frac{X_n}{\psi_n}, \tag{11}$$

ed oltre queste, si otterranno alla stessa maniera anche le seguenti

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{X_1} &= \frac{1}{\psi_1} - \frac{1}{\psi_2}\,\frac{d\frac{1}{\psi_1}}{d\frac{1}{\psi_2}} - \frac{1}{\psi_3}\,\frac{d\frac{1}{\psi_1}}{d\frac{1}{\psi_3}} \dots - \frac{1}{\psi_n}\,\frac{d\frac{1}{\psi_1}}{d\frac{1}{\psi_n}} \\
\frac{1}{X_2} &= \frac{1}{\psi_2} - \frac{1}{\psi_1}\,\frac{d\frac{1}{\psi_2}}{d\frac{1}{\psi_1}} - \frac{1}{\psi_3}\,\frac{d\frac{1}{\psi_2}}{d\frac{1}{\psi_3}} \dots - \frac{1}{\psi_n}\,\frac{d\frac{1}{\psi_2}}{d\frac{1}{\psi_n}} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{1}{X_n} &= \frac{1}{\psi_n} - \frac{1}{\psi_1}\,\frac{d\frac{1}{\psi_n}}{d\frac{1}{\psi_1}} - \frac{1}{\psi_2}\,\frac{d\frac{1}{\psi_n}}{d\frac{1}{\psi_2}} \dots - \frac{1}{\psi_{n-1}}\,\frac{d\frac{1}{\psi_n}}{d\frac{1}{\psi_{n-1}}}
\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

3. Come dalla $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ si è passato all'equazione $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) = 0$ che diremo *inversa* della *primitiva*, mediante la sostituzione $\xi_r x_r = 1$, così dalla $F(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$ passeremo alla equazione inversa $\Phi(\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n) = 0$ sostituendo alle X della F le Ξ, collo stabilire la relazione $X_r \Xi_r = 1$.

Con procedimento pari ai precedenti, introducendo le variabili K, troveremo

$$\left.\begin{aligned}
K_1 \frac{d\Phi}{d\Xi_1} &= \Xi_1 \frac{d\Phi}{d\Xi_1} + \Xi_2 \frac{d\Phi}{d\Xi_2} \dots + \Xi_n \frac{d\Phi}{d\Xi_n} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
K_n \frac{d\Phi}{d\Xi_n} &= \Xi_1 \frac{d\Phi}{d\Xi_1} + \Xi_2 \frac{d\Phi}{d\Xi_2} \dots + \Xi_n \frac{d\Phi}{d\Xi_n}
\end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

alle quali è da aggiungere l'altra

$$1 = \frac{\Xi_1}{K_1} + \frac{\Xi_2}{K_2} \dots + \frac{\Xi_n}{K_n}. \tag{14}$$

Ora le equazioni (13) conducono alle

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= \Xi_1 - \Xi_2 \frac{d\Xi_1}{d\Xi_2} - \Xi_3 \frac{d\Xi_1}{d\Xi_3} \dots \Xi_n \frac{d\Xi_1}{d\Xi_n} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
K_n &= \Xi_n - \Xi_1 \frac{d\Xi_n}{d\Xi_1} - \Xi_2 \frac{d\Xi_n}{d\Xi_2} \dots \Xi_{n-1} \frac{d\Xi_n}{d\Xi_{n-1}}
\end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

e da queste sorgono le analoghe alle precedenti

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\Xi_1} &= \frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\frac{d\frac{1}{K_1}}{d\frac{1}{K_2}} - \frac{1}{K_3}\frac{d\frac{1}{K_1}}{d\frac{1}{K_3}}, \ldots - \frac{1}{K_n}\frac{d\frac{1}{K_1}}{d\frac{1}{K_n}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{\Xi_n} &= \frac{1}{K_n} - \frac{1}{K_1}\frac{d\frac{1}{K_n}}{d\frac{1}{K_1}} - \frac{1}{K_2}\frac{d\frac{1}{K_n}}{d\frac{1}{K_2}} \ldots - \frac{1}{K_{n-1}}\frac{d\frac{1}{K_n}}{d\frac{1}{K_{n-1}}}
\end{aligned}\right\} . \tag{16}$$

La prima delle (15), mediante l'equazione $X_r \Xi_r = 1$, dà

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2}\frac{d\frac{1}{X_1}}{d\frac{1}{X_2}} - \frac{1}{X_3}\frac{d\frac{1}{X_1}}{d\frac{1}{X_3}} \ldots - \frac{1}{X_n}\frac{d\frac{1}{X_1}}{d\frac{1}{X_n}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
K_n &= \frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_1}\frac{d\frac{1}{X_n}}{d\frac{1}{X_1}} - \frac{1}{X_2}\frac{d\frac{1}{X_n}}{d\frac{1}{X_2}} \ldots - \frac{1}{X_{n-1}}\frac{d\frac{1}{X_n}}{d\frac{1}{X_{n-1}}}
\end{aligned}\right\} . \tag{1}$$

Paragonando le equazioni (17) colla equazione (23) della 1ª parte si rileva che $x_r K_r = 1$ e questa combinata colle (16) dà l'equazione già nota, e che è la penultima della 1ª parte, cioè

$$X_r = x_r - x_1\frac{dx_r}{dx_1} - x_2\frac{dx_r}{dx_2} \ldots - x_{r-1}\frac{dx_r}{dx_{r-1}} - x_{r+1}\frac{dx_r}{dx_{r+1}} \ldots - x_n\frac{dx_r}{dx_n} \tag{18}$$

e le altre $n-1$ analoghe a questa, ponendo $r=1, =2, =3 \ldots = n$.

E così dopo alcune trasformazioni fra *primitive, dedotte* ed *inverse* si è giunti alla relazione rimarchevole $x_r K_r = 1$ (19) che stabilisce una dipendenza fra le K che figurano nella dedotta della $\Phi = 0$ e le x della equazione primitiva.

4. È facile scorgere che la moltiplicità de' simboli per rappresentare le diverse funzioni, e le variabili che in queste si trovano, è di ostacolo alla ricerca di altre relazioni, a motivo della confusione che ne nasce. Deve al certo tornare utile adottare un sistema uniforme di simboli per contrassegnare funzioni e loro variabili, e nel caso attuale il modo più semplice mi è sembrato quello di adoperare la stessa lettera f con un indice variabile per distinguere l'una funzione dall'altra, e la stessa lettera x con due indici per contrassegnare le variabili. Il primo indice mostra la funzione in cui si trova, ed il secondo indice serve a distinguerla fra le variabili della stessa funzione. Così, ove più variabili $x_1 x_2 x_3 \ldots$ entrino nella $f_m = 0$, si scriverà $f_m(x_{1m} x_{2m} x_{3m} \ldots) = 0$. Indican-

do adunque con $f_0=0$ la equazione primitiva e con $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$ le successive dedotte, e con $f_{-1}=0$, $f_{-2}=0$, $f_{-3}=0$ quelle che precedono la $f_0=0$ in senso opposto ma con la stessa legge, e ritenendo per semplicità, tre variabili, avremo i seguenti sistemi di equazioni. Si pone $x_{01}\xi_{01}=x_{02}\xi_{02}=x_{03}\xi_{03}=1$ (20)

$$\left.\begin{aligned}
x_{-21} &= x_{-31}-x_{-32}\frac{dx_{-31}}{dx_{-32}}-x_{-33}\frac{dx_{-31}}{dx_{-33}}\ldots=\frac{1}{\xi_{21}}\\
x_{-22} &= x_{-32}-x_{-31}\frac{dx_{-32}}{dx_{-31}}-x_{-33}\frac{dx_{-32}}{dx_{-33}}\ldots=\frac{1}{\xi_{22}}\\
x_{-23} &= x_{-33}-x_{-31}\frac{dx_{-33}}{dx_{-31}}-x_{-32}\frac{dx_{-33}}{dx_{-32}}\ldots=\frac{1}{\xi_{23}}
\end{aligned}\right\}\qquad (c)'$$

$$\left.\begin{aligned}
x_{-11} &= x_{-21}-x_{-22}\frac{dx_{-21}}{dx_{-22}}-x_{-23}\frac{dx_{-21}}{dx_{-23}}\ldots=\frac{1}{\xi_{11}}\\
x_{-12} &= x_{-22}-x_{-21}\frac{dx_{-22}}{dx_{-21}}-x_{-23}\frac{dx_{-22}}{dx_{-23}}\ldots=\frac{1}{\xi_{12}}\\
x_{-13} &= x_{-23}-x_{-21}\frac{dx_{-23}}{dx_{-21}}-x_{-22}\frac{dx_{-23}}{dx_{-22}}\ldots=\frac{1}{\xi_{13}}
\end{aligned}\right\}\qquad (b)'$$

$$\left.\begin{aligned}
x_{01} &= x_{-11}-x_{-12}\frac{dx_{-11}}{dx_{-12}}-x_{-13}\frac{dx_{-11}}{dx_{-13}}\ldots=\frac{1}{\xi_{01}}\\
x_{02} &= x_{-12}-x_{-11}\frac{dx_{-12}}{dx_{-11}}-x_{-13}\frac{dx_{-12}}{dx_{-13}}\ldots=\frac{1}{\xi_{02}}\\
x_{03} &= x_{-13}-x_{-11}\frac{dx_{-13}}{dx_{-11}}-x_{-12}\frac{dx_{-13}}{dx_{-12}}\ldots=\frac{1}{\xi_{03}}
\end{aligned}\right\}\qquad (a)$$

$$\left.\begin{aligned}
x_{11} &= x_{01}-x_{02}\frac{dx_{01}}{dx_{02}}-x_{03}\frac{dx_{01}}{dx_{03}}\ldots=\frac{1}{\xi_{-11}}\\
x_{12} &= x_{02}-x_{01}\frac{dx_{02}}{dx_{01}}-x_{03}\frac{dx_{02}}{dx_{03}}\ldots=\frac{1}{\xi_{-12}}\\
x_{13} &= x_{03}-x_{01}\frac{dx_{03}}{dx_{01}}-x_{02}\frac{dx_{03}}{dx_{02}}\ldots=\frac{1}{\xi_{-13}}
\end{aligned}\right\}\qquad (b)$$

$$\left.\begin{aligned}
x_{21} &= x_{11}-x_{12}\frac{dx_{11}}{dx_{12}}-x_{13}\frac{dx_{11}}{dx_{13}}\ldots=\frac{1}{\xi_{-21}}\\
x_{22} &= x_{12}-x_{11}\frac{dx_{12}}{dx_{11}}-x_{13}\frac{dx_{12}}{dx_{13}}\ldots=\frac{1}{\xi_{-22}}\\
x_{23} &= x_{13}-x_{11}\frac{dx_{13}}{dx_{11}}-x_{12}\frac{dx_{13}}{dx_{12}}\ldots=\frac{1}{\xi_{-23}}
\end{aligned}\right\}\qquad (c)$$

$$\left.\begin{aligned}
x_{31} &= x_{21}-x_{22}\frac{dx_{21}}{dx_{22}}-x_{23}\frac{dx_{21}}{dx_{23}}\ldots=\frac{1}{\xi_{-31}}\\
x_{32} &= x_{22}-x_{21}\frac{dx_{22}}{dx_{21}}-x_{23}\frac{dx_{22}}{dx_{23}}\ldots=\frac{1}{\xi_{-32}}\\
x_{33} &= x_{23}-x_{21}\frac{dx_{23}}{dx_{21}}-x_{22}\frac{dx_{23}}{dx_{22}}\ldots=\frac{1}{\xi_{-33}}
\end{aligned}\right\}.\qquad (d)$$

Dal precedente sistema si può, per quel che si è esposto, passare all'altro

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{x_{-31}} &= \frac{1}{x_{-21}} - \frac{1}{x_{-22}} \frac{d\frac{1}{x_{-21}}}{d\frac{1}{x_{-22}}} - \frac{1}{x_{-23}} \frac{d\frac{1}{x_{-21}}}{d\frac{1}{x_{-23}}} \;\ldots = \xi_{31} \\
\frac{1}{x_{-32}} &= \frac{1}{x_{-22}} - \frac{1}{x_{-21}} \frac{d\frac{1}{x_{-22}}}{d\frac{1}{x_{-21}}} - \frac{1}{x_{-23}} \frac{d\frac{1}{x_{-22}}}{d\frac{1}{x_{-23}}} \;\ldots = \xi_{32} \\
\frac{1}{x_{-33}} &= \frac{1}{x_{-23}} - \frac{1}{x_{-21}} \frac{d\frac{1}{x_{-23}}}{d\frac{1}{x_{-21}}} - \frac{1}{x_{-22}} \frac{d\frac{1}{x_{-23}}}{d\frac{1}{x_{-22}}} \;\ldots = \xi_{33}
\end{aligned}\right\} \quad (c$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{x_{-21}} &= \frac{1}{x_{-11}} - \frac{1}{x_{-12}} \frac{d\frac{1}{x_{-11}}}{d\frac{1}{x_{-12}}} - \frac{1}{x_{-13}} \frac{d\frac{1}{x_{-11}}}{d\frac{1}{x_{-13}}} \;\ldots = \xi_{21} \\
\frac{1}{x_{-22}} &= \frac{1}{x_{-12}} - \frac{1}{x_{-11}} \frac{d\frac{1}{x_{-12}}}{d\frac{1}{x_{-11}}} - \frac{1}{x_{-13}} \frac{d\frac{1}{x_{-12}}}{d\frac{1}{x_{-13}}} \;\ldots = \xi_{22} \\
\frac{1}{x_{-23}} &= \frac{1}{x_{13}} - \frac{1}{x_{-11}} \frac{d\frac{1}{x_{-13}}}{d\frac{1}{x_{-11}}} - \frac{1}{x_{-12}} \frac{d\frac{1}{x_{-13}}}{d\frac{1}{x_{-12}}} \;\ldots = \xi_{23}
\end{aligned}\right\} \quad (b$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{x_{-11}} &= \frac{1}{x_{01}} - \frac{1}{x_{02}} \frac{d\frac{1}{x_{01}}}{d\frac{1}{x_{02}}} - \frac{1}{x_{03}} \frac{d\frac{1}{x_{01}}}{d\frac{1}{x_{03}}} \;\ldots = \xi_{11} \\
\frac{1}{x_{-12}} &= \frac{1}{x_{02}} - \frac{1}{x_{01}} \frac{d\frac{1}{x_{02}}}{d\frac{1}{x_{01}}} - \frac{1}{x_{03}} \frac{d\frac{1}{x_{02}}}{d\frac{1}{x_{03}}} \;\ldots = \xi_{12} \\
\frac{1}{x_{-13}} &= \frac{1}{x_{03}} - \frac{1}{x_{01}} \frac{d\frac{1}{x_{03}}}{d\frac{1}{x_{01}}} - \frac{1}{x_{02}} \frac{d\frac{1}{x_{03}}}{d\frac{1}{x_{02}}} \;\ldots = \xi_{13}
\end{aligned}\right\} \quad (a$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{x_{01}} &= \frac{1}{x_{11}} - \frac{1}{x_{12}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{11}}}{d\,\frac{1}{x_{12}}} - \frac{1}{x_{13}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{11}}}{d\,\frac{1}{x_{13}}}\ \ldots = \xi_{01}\\
\frac{1}{x_{02}} &= \frac{1}{x_{12}} - \frac{1}{x_{11}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{12}}}{d\,\frac{1}{x_{11}}} - \frac{1}{x_{13}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{12}}}{d\,\frac{1}{x_{13}}}\ \ldots = \xi_{02}\\
\frac{1}{x_{03}} &= \frac{1}{x_{13}} - \frac{1}{x_{11}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{13}}}{d\,\frac{1}{x_{11}}} - \frac{1}{x_{12}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{13}}}{d\,\frac{1}{x_{12}}}\ \ldots = \xi_{03}
\end{aligned}\right\}\qquad (b$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{x_{11}} &= \frac{1}{x_{21}} - \frac{1}{x_{22}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{21}}}{d\,\frac{1}{x_{22}}} - \frac{1}{x_{23}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{21}}}{d\,\frac{1}{x_{23}}}\ \ldots = \xi_{11}\\
\frac{1}{x_{12}} &= \frac{1}{x_{22}} - \frac{1}{x_{21}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{22}}}{d\,\frac{1}{x_{21}}} - \frac{1}{x_{23}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{22}}}{d\,\frac{1}{x_{23}}}\ \ldots = \xi_{12}\\
\frac{1}{x_{13}} &= \frac{1}{x_{23}} - \frac{1}{x_{21}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{23}}}{d\,\frac{1}{x_{21}}} - \frac{1}{x_{22}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{23}}}{d\,\frac{1}{x_{22}}}\ \ldots = \xi_{13}
\end{aligned}\right\}\qquad (c$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{x_{21}} &= \frac{1}{x_{31}}\quad \frac{1}{x_{32}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{31}}}{d\,\frac{1}{x_{32}}} - \frac{1}{x_{33}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{31}}}{d\,\frac{1}{x_{33}}}\ \ldots = \xi_{21}\\
\frac{1}{x_{22}} &= \frac{1}{x_{32}} - \frac{1}{x_{31}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{32}}}{d\,\frac{1}{x_{31}}} - \frac{1}{x_{33}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{32}}}{d\,\frac{1}{x_{33}}}\ \ldots = \xi_{22}\\
\frac{1}{x_{23}} &= \frac{1}{x_{33}} - \frac{1}{x_{31}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{33}}}{d\,\frac{1}{x_{31}}} - \frac{1}{x_{32}}\,\frac{d\,\frac{1}{x_{33}}}{d\,\frac{1}{x_{32}}}\ \ldots = \xi_{23}
\end{aligned}\right\}\qquad (d$$

Per le equazioni (20) la $f_0(x_{01} x_{02} x_{03}) = 0$ diventa $\varphi_0(\xi_{01}\, \xi_{02}\, \xi_{03}) = 0$ e questa, trattata come la $f_0 = 0$, dà origine ai sistemi qui appresso

$$\left.\begin{array}{l}
\xi_{-21} = \xi_{-31} - \xi_{-32} \dfrac{d\xi_{-31}}{d\xi_{-32}} - \xi_{-33} \dfrac{d\xi_{-31}}{d\xi_{-33}} \ldots = \dfrac{1}{x_{21}} \\
\xi_{-22} = \xi_{-32} - \xi_{-31} \dfrac{d\xi_{-32}}{d\xi_{-31}} - \xi_{-33} \dfrac{d\xi_{-32}}{d\xi_{-33}} \ldots = \dfrac{1}{x_{22}} \\
\xi_{-23} = \xi_{-33} - \xi_{-31} \dfrac{d\xi_{-33}}{d\xi_{-31}} - \xi_{-32} \dfrac{d\xi_{-33}}{d\xi_{-32}} \ldots = \dfrac{1}{x_{23}}
\end{array}\right\} \qquad (C)'$$

$$\left.\begin{array}{l}
\xi_{-11} = \xi_{-21} - \xi_{-22} \dfrac{d\xi_{-21}}{d\xi_{-22}} - \xi_{-23} \dfrac{d\xi_{-21}}{d\xi_{-23}} \ldots = \dfrac{1}{x_{11}} \\
\xi_{-12} = \xi_{-22} - \xi_{-21} \dfrac{d\xi_{-22}}{d\xi_{-21}} - \xi_{-23} \dfrac{d\xi_{-22}}{d\xi_{-23}} \ldots = \dfrac{1}{x_{12}} \\
\xi_{-13} = \xi_{-23} - \xi_{-21} \dfrac{d\xi_{-23}}{d\xi_{-21}} - \xi_{-22} \dfrac{d\xi_{-23}}{d\xi_{-22}} \ldots = \dfrac{1}{x_{13}}
\end{array}\right\} \qquad (B)'$$

$$\left.\begin{array}{l}
\xi_{01} = \xi_{-11} - \xi_{-12} \dfrac{d\xi_{-11}}{d\xi_{-12}} - \xi_{-13} \dfrac{d\xi_{-11}}{d\xi_{-13}} \ldots = \dfrac{1}{x_{01}} \\
\xi_{02} = \xi_{-12} - \xi_{-11} \dfrac{d\xi_{-12}}{d\xi_{-11}} - \xi_{-13} \dfrac{d\xi_{-12}}{d\xi_{-13}} \ldots = \dfrac{1}{x_{02}} \\
\xi_{03} = \xi_{-13} - \xi_{-11} \dfrac{d\xi_{-13}}{d\xi_{-11}} - \xi_{-12} \dfrac{d\xi_{-13}}{d\xi_{-12}} \ldots = \dfrac{1}{x_{03}}
\end{array}\right\} \qquad (A)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\xi_{11} = \xi_{01} - \xi_{02} \dfrac{d\xi_{01}}{d\xi_{02}} - \xi_{03} \dfrac{d\xi_{01}}{d\xi_{03}} \ldots = \dfrac{1}{x_{-11}} \\
\xi_{12} = \xi_{02} - \xi_{01} \dfrac{d\xi_{02}}{d\xi_{01}} - \xi_{03} \dfrac{d\xi_{02}}{d\xi_{03}} \ldots = \dfrac{1}{x_{-12}} \\
\xi_{13} = \xi_{03} - \xi_{01} \dfrac{d\xi_{03}}{d\xi_{01}} - \xi_{02} \dfrac{d\xi_{03}}{d\xi_{02}} \ldots = \dfrac{1}{x_{-13}}
\end{array}\right\} \qquad (B)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\xi_{21} = \xi_{11} - \xi_{12} \dfrac{d\xi_{11}}{d\xi_{12}} - \xi_{13} \dfrac{d\xi_{11}}{d\xi_{13}} \ldots = \dfrac{1}{x_{-21}} \\
\xi_{22} = \xi_{12} - \xi_{11} \dfrac{d\xi_{12}}{d\xi_{11}} - \xi_{13} \dfrac{d\xi_{12}}{d\xi_{13}} \ldots = \dfrac{1}{x_{-22}} \\
\xi_{23} = \xi_{13} - \xi_{11} \dfrac{d\xi_{13}}{d\xi_{11}} - \xi_{12} \dfrac{d\xi_{13}}{d\xi_{12}} \ldots = \dfrac{1}{x_{-23}}
\end{array}\right\} \qquad (C)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\xi_{31} = \xi_{21} - \xi_{22} \dfrac{d\xi_{21}}{d\xi_{22}} - \xi_{23} \dfrac{d\xi_{21}}{d\xi_{23}} \ldots = \dfrac{1}{x_{-31}} \\
\xi_{32} = \xi_{22} - \xi_{21} \dfrac{d\xi_{22}}{d\xi_{21}} - \xi_{23} \dfrac{d\xi_{22}}{d\xi_{23}} \ldots = \dfrac{1}{x_{-32}} \\
\xi_{33} = \xi_{23} - \xi_{21} \dfrac{d\xi_{23}}{d\xi_{21}} - \xi_{22} \dfrac{d\xi_{23}}{d\xi_{22}} \ldots = \dfrac{1}{x_{-33}}
\end{array}\right\}, \qquad (D)$$

al quale fa seguito l'altro sistema

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\xi_{-31}} &= \frac{1}{\xi_{-21}} - \frac{1}{\xi_{-22}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-21}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-22}}} - \frac{1}{\xi_{-23}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-21}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-23}}} \;\ldots = x_{31} \\
\frac{1}{\xi_{-32}} &= \frac{1}{\xi_{-22}} - \frac{1}{\xi_{-21}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-22}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-21}}} - \frac{1}{\xi_{-23}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-22}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-23}}} \;\ldots = x_{32} \\
\frac{1}{\xi_{-33}} &= \frac{1}{\xi_{-23}} - \frac{1}{\xi_{-21}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-23}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-21}}} - \frac{1}{\xi_{-22}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-23}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-22}}} \;\ldots = x_{33}
\end{aligned}\right\} \quad (C'$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\xi_{-21}} &= \frac{1}{\xi_{-11}} - \frac{1}{\xi_{-12}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-11}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-12}}} - \frac{1}{\xi_{-13}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-11}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-13}}} \;\ldots = x_{21} \\
\frac{1}{\xi_{-22}} &= \frac{1}{\xi_{-12}} - \frac{1}{\xi_{-11}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-12}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-11}}} - \frac{1}{\xi_{-13}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-12}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-13}}} \;\ldots = x_{22} \\
\frac{1}{\xi_{-23}} &= \frac{1}{\xi_{13}} - \frac{1}{\xi_{-11}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-13}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-11}}} - \frac{1}{\xi_{-12}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{-13}}}{d\,\frac{1}{\xi_{-12}}} \;\ldots = x_{23}
\end{aligned}\right\} \quad (B'$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\xi_{-11}} &= \frac{1}{\xi_{01}} - \frac{1}{\xi_{02}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{01}}}{d\,\frac{1}{\xi_{02}}} - \frac{1}{\xi_{03}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{01}}}{d\,\frac{1}{\xi_{03}}} \;\ldots = x_{11} \\
\frac{1}{\xi_{-12}} &= \frac{1}{\xi_{02}} - \frac{1}{\xi_{01}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{02}}}{d\,\frac{1}{\xi_{01}}} - \frac{1}{\xi_{03}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{02}}}{d\,\frac{1}{\xi_{03}}} \;\ldots = x_{12} \\
\frac{1}{\xi_{-13}} &= \frac{1}{\xi_{03}} - \frac{1}{\xi_{01}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{03}}}{d\,\frac{1}{\xi_{01}}} - \frac{1}{\xi_{02}}\,\frac{d\,\frac{1}{\xi_{03}}}{d\,\frac{1}{\xi_{02}}} \;\ldots = x_{13}
\end{aligned}\right\} \quad (A$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\xi_{01}} &= \frac{1}{\xi_{11}} - \frac{1}{\xi_{12}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{11}}}{d\frac{1}{\xi_{12}}} - \frac{1}{\xi_{13}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{11}}}{d\frac{1}{\xi_{13}}} \;\ldots = x_{01}\\
\frac{1}{\xi_{02}} &= \frac{1}{\xi_{12}} - \frac{1}{\xi_{11}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{12}}}{d\frac{1}{\xi_{11}}} - \frac{1}{\xi_{13}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{12}}}{d\frac{1}{\xi_{13}}} \;\ldots = x_{02}\\
\frac{1}{\xi_{03}} &= \frac{1}{\xi_{13}} - \frac{1}{\xi_{11}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{13}}}{d\frac{1}{\xi_{11}}} - \frac{1}{\xi_{12}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{13}}}{d\frac{1}{\xi_{12}}} \;\ldots = x_{03}
\end{aligned}\right\} \quad (B$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\xi_{11}} &= \frac{1}{\xi_{21}} - \frac{1}{\xi_{22}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{21}}}{d\frac{1}{\xi_{22}}} - \frac{1}{\xi_{23}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{21}}}{d\frac{1}{\xi_{23}}} \;\ldots = x_{-11}\\
\frac{1}{\xi_{12}} &= \frac{1}{\xi_{22}} - \frac{1}{\xi_{21}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{22}}}{d\frac{1}{\xi_{21}}} - \frac{1}{\xi_{23}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{22}}}{d\frac{1}{\xi_{23}}} \;\ldots = x_{-12}\\
\frac{1}{\xi_{13}} &= \frac{1}{\xi_{23}} - \frac{1}{\xi_{21}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{23}}}{d\frac{1}{\xi_{21}}} - \frac{1}{\xi_{22}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{23}}}{d\frac{1}{\xi_{22}}} \;\ldots = x_{-13}
\end{aligned}\right\} \quad (C$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\xi_{21}} &= \frac{1}{\xi_{31}} - \frac{1}{\xi_{32}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{31}}}{d\frac{1}{\xi_{32}}} - \frac{1}{\xi_{33}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{31}}}{d\frac{1}{\xi_{33}}} \;\ldots = x_{-21}\\
\frac{1}{\xi_{22}} &= \frac{1}{\xi_{32}} - \frac{1}{\xi_{31}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{32}}}{d\frac{1}{\xi_{31}}} - \frac{1}{\xi_{33}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{32}}}{d\frac{1}{\xi_{33}}} \;\ldots = x_{-22}\\
\frac{1}{\xi_{23}} &= \frac{1}{\xi_{33}} - \frac{1}{\xi_{31}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{33}}}{d\frac{1}{\xi_{31}}} - \frac{1}{\xi_{32}}\,\frac{d\frac{1}{\xi_{33}}}{d\frac{1}{\xi_{32}}} \;\ldots = x_{-23}
\end{aligned}\right\}. \quad (D$$

5. Premessi i precedenti sistemi di equazioni, restano a giustificarsi le eguaglianze poste al finire di ogni rigo. Ora si vede che i secondi membri delle equazioni (*a* sono la stessa cosa, rispettivamente, de' secondi membri delle equazioni (B); e lo stesso avviene pe' secondi membri delle equazioni (*b*) relativamente ai secondi membri, rispettivamente, delle equazioni (A. Quindi si deduce $x_{-11}\xi_{11}=x_{-12}\xi_{12}=x_{-13}\xi_{13}=1$, come ancora $x_{11}\xi_{-11}=x_{12}\xi_{-12}=x_{13}\xi_{-13}=1$. Si scorge facilmente avvenire tutto ciò a cagione della prima relazione stabilita $x_{01}\xi_{01}=x_{02}\xi_{02}=x_{03}\xi_{03}=1$. Fatto questo primo passo, si riconosce che i secondi membri delle (*b'* equivalgono, rispettivamente, ai secondi termini delle (C), e quindi $x_{-21}\xi_{21}=x_{-22}\xi_{22}=x_{-23}\xi_{23}=1$; come ancora per potersi dire altrettanto dei secondi membri delle (*c*) riguardo ai secondi membri delle (B' viene $x_{21}\xi_{-21}=x_{22}\xi_{-22}=x_{23}\xi_{-23}=1$. Infine per essere, rispettivamente, eguali i secondi membri delle (D) e delle (*c'* si ricava $x_{-31}\xi_{31}=x_{-32}\xi_{32}=x_{-33}\xi_{33}=1$, come pure si trae essere $x_{31}\xi_{-31}=x_{32}\xi_{-32}=x_{33}\xi_{-33}=1$ essendovi eguaglianza fra i tre secondi membri delle (C' ed i tre secondi membri delle (*d*) ciascuno a ciascuno. Dal fin qui esposto possiamo adunque in generale stabilire, col procedere alla stessa maniera che fra le x e le ξ si verificano le relazioni $x_{mn}=\frac{1}{\xi_{-mn}}$, e $x_{-pq}=\frac{1}{\xi_{pq}}$ (21).

6. Pel caso di tre variabili, nella prima parte di questo lavoro, si sono dimostrate le tre equazioni

$$\frac{x_2}{x_1}=-\frac{d\frac{1}{X_1}}{d\frac{1}{X_2}}, \quad \frac{x_3}{x_1}=-\frac{d\frac{1}{X_1}}{d\frac{1}{X_3}}, \quad \frac{x_3}{x_2}=-\frac{d\frac{1}{X_2}}{d\frac{1}{X_3}},$$

e sono propriamente quelle che seguono le (20).

Ora tali equazioni equivalgono alle altre

$$\frac{x_2}{x_1}=-\frac{X^2{}_2\,dX_1}{X_1{}^2\,dX_2}, \quad \frac{x_3}{x_1}=-\frac{X^2{}_3 dX_1}{X_1{}^2 dX_3}, \quad \frac{x_3}{x_2}=-\frac{X^2{}_3 dX_2}{X_2{}^2 dX_3}$$

e queste ultime, per aversi in generale $X_r+X_q\frac{dx_r}{dx_q}=0$ [vedi equazione (16) prima parte], diventano

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{dx_2}{dx_1}\,\frac{X_2}{X_1}\,\frac{dX_1}{dX_2}, \quad \frac{x_3}{x_1}=\frac{dx_3}{dx_1}\,\frac{X_3}{X_1}\,\frac{dX_1}{dX_3}, \quad \frac{x_3}{x_2}=\frac{dx_3}{dx_2}\,\frac{X_3}{X_2}\,\frac{dX_2}{dX_3}$$

ovvero

$$\frac{x_2\,dx_1}{x_1\,dx_2}=\frac{X_2\,dX_1}{X_1\,dX_2}, \quad \frac{x_3\,dx_1}{x_1\,dx_3}=\frac{X_3\,dX_1}{X_1\,dX_3}, \quad \frac{x_3\,dx_2}{x_2\,dx_3}=\frac{X_3\,dX_2}{X_2\,dX_3},$$

le quali, per la notazione testè adottata, si cangiano nelle altre

$$\frac{x_{02}\,dx_{01}}{x_{01}\,dx_{02}}=\frac{x_{12}\,dx_{11}}{x_{11}\,dx_{12}}, \quad \frac{x_{03}\,dx_{01}}{x_{01}\,dx_{03}}=\frac{x_{13}\,dx_{11}}{x_{11}\,dx_{13}}, \quad \frac{x_{03}\,dx_{02}}{x_{02}\,dx_{03}}=\frac{x_{13}\,dx_{12}}{x_{12}\,dx_{13}}. \qquad (22)$$

Questa serie di relazioni che si verificano pel sistema delle tre equazioni (b) è chiaro che conduce a serie di equazioni analoghe per gli altri sistemi. Inoltre, come nello stesso sistema possono, con ragionamento analogo stabilirsi le equazioni

$$\frac{x_{-22}dx_{-21}}{x_{-21}dx_{-22}}=\frac{x_{-12}dx_{-11}}{x_{-11}dx_{-12}}=\frac{x_{02}dx_{01}}{x_{01}dx_{02}}=\frac{x_{12}dx_{11}}{x_{11}dx_{12}}=\frac{x_{22}dx_{21}}{x_{21}dx_{22}}=\frac{x_{32}dx_{31}}{x_{31}dx_{32}}$$

si vede che si ha in generale la relazione

$$\frac{x_{mp}dx_{mq}}{x_{mq}dx_{mp}}=\frac{x_{np}dx_{nq}}{x_{nq}dx_{np}}. \tag{23}$$

Quest'ultima equazione conduce a rimarchevoli conseguenze. Infatti, consideriamo le prime equazioni dei tre sistemi (a) (b) (c)

$$x_{01}=x_{-11}-x_{-12}\frac{dx_{-11}}{dx_{-12}}-x_{-13}\frac{dx_{-11}}{dx_{-13}}$$

$$x_{11}=x_{01}-x_{02}\frac{dx_{01}}{dx_{12}}-x_{03}\frac{dx_{01}}{dx_{03}}$$

$$x_{21}=x_{11}-x_{12}\frac{dx_{11}}{dx_{12}}-x_{13}\frac{dx_{11}}{dx_{13}}.$$

Moltiplicando ambo i membri della prima per x_{01}, quelli della seconda per x_{-11} poi sottraendo, viene $x_{-11}x_{11}=x^2_{01}$, avendosi come precedentemente si è dimostrato

$$\frac{x_{-12}dx_{-11}}{x_{-11}dx_{-12}}=\frac{x_{02}dx_{01}}{x_{01}dx_{02}}\quad,\quad \text{e}\quad \frac{x_{-13}dx_{-11}}{x_{-11}dx_{-13}}=\frac{x_{03}dx_{01}}{x_{01}dx_{03}},$$

così ancora si dimostra che

$$x_{01}x_{21}=x^2_{11}. \tag{24}$$

7. Volendo darne una piccola applicazione, sia

$$o=f_o=\frac{x^2_{01}}{a^2}+\frac{x^2_{02}}{b^2}+\frac{x^2_{03}}{c^2}-1 \tag{25}$$

si ricava in primo luogo

$$\frac{dx_{01}}{dx_{02}}=-\frac{a^2}{b^2}\frac{x_{02}}{x_{01}}\quad;\quad\frac{dx_{01}}{dx_{03}}=-\frac{a^2}{c^2}\frac{x_{03}}{x_{01}}\quad;\quad\frac{dx_{02}}{dx_{03}}=-\frac{b^2}{c^2}\frac{x_{03}}{x_{02}};$$

sostituendo tali valori nelle (b), si trova

$$x_{11}=x_{01}+\frac{a^2}{b^2}x^2_{02}+\frac{a^2}{c^2}x^2_{03}=\frac{a^2}{x_{01}}$$

$$x_{12}=x_{02}+\frac{b^2}{a^2}x^2_{01}+\frac{b^2}{c^2}x^2_{03}=\frac{b^2}{x_{02}}$$

$$x_{13}=x_{03}+\frac{c^2}{a^2}x^2_{01}+\frac{c^2}{b^2}x^2_{02}=\frac{c^2}{x_{03}}$$

e perciò

$$f_1 = 0 = x^2_{11} x^2_{12} x^2_{13} - a^2 x^2_{12} x^2_{13} - b^2 x^2_{11} x^2_{13} - c^2 x^2_{11} x^2_{12} . \qquad (26)$$

Volendo adesso ricavarci la forma di $f_{-1} = 0$, dovremo evidentemente servirci del sistema (a) o meglio dell'altro (a nel quale si trovano ancora le $x_{-11} x_{-12} x_{-13}$, le $x_{01} x_{02} x_{03}$ e di più le derivate esplicitamente rispetto a queste ultime, e che sonosi ottenute dalla $f = 0$, dalla quale si suppone che si parta. Tali equazioni (a diventano nel caso attuale dopo aver rispettivamente sostituito a $d\frac{1}{x_{01}}$, $d\frac{1}{x_{02}}$, $d\frac{1}{x_{03}}$ rispettivamente $-\frac{dx_{01}}{x_{01}^2}$, $-\frac{dx_{02}}{x^2_{02}}$, $-\frac{dx_{03}}{x^2_{03}}$,

$$\frac{1}{x_{-11}} = \frac{1}{x_{01}} + \frac{a^2}{b^2}\frac{x^2_{03}}{x^3_{01}} + \frac{a^2}{c^2}\frac{x^2_{03}}{x^3_{01}} = \frac{a^2}{x^3_{01}}$$

$$\frac{1}{x_{-12}} = \frac{1}{x_{02}} + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2_{01}}{x^3_{02}} + \frac{b^2}{c^2}\frac{x^2_{03}}{x^3_{02}} = \frac{b^2}{x^3_{02}}$$

$$\frac{1}{x_{-13}} = \frac{1}{x_{03}} + \frac{c^2}{a^2}\frac{x^2_{01}}{x^3_{03}} + \frac{c^2}{b^2}\frac{x^2_{12}}{x^3_{03}} = \frac{c^2}{x^3_{03}}$$

ove ora si sostituiscano nella (25) invece di $x_{01} x_{02} x_{03}$ i loro valori in $x_{-11} x_{-12} x_{-13}$ si deduce

$$0 = f_{-1} = \left(\frac{x_{-11}}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x_{-12}}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x_{-13}}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 .$$

Intanto poichè si è trovato

$$x_{11} = \frac{a^2}{x_{01}} \quad , \text{ e } \quad x_{-11} = \frac{x^3_{01}}{a^2}$$

$$x_{12} = \frac{b^2}{x_{02}} \quad , \text{ e } \quad x_{-12} = \frac{x^3_{12}}{b^2}$$

$$x_{13} = \frac{c^2}{x_{03}} \quad , \text{ e } \quad x_{-13} = \frac{x^3_{13}}{c^2}$$

si vede che di fatto si verifica

$$x_{-11} x_{11} = x^2_{01} \quad , \quad x_{-12} x_{12} = x^2_{12} \quad , \quad x_{-13} x_{13} = x^2_{13}$$

come doveva essere.

L'essersi trovato che la x_{01} è media proporzionale fra x_{-11} e x_{11}, e che la x_{11} è media proporzionale fra x_{01} ed x_{21} conduce alla conseguenza che la serie delle variabili x_{p1} costituisce una serie geometrica, e che basterebbe conoscerne due qualunque, per conoscere tutte le altre. Ciò che si è detto per le variabili aventi tutte lo stesso secondo indice 1, può chiaramente dirsi di quello che hanno identico il secondo 2, o il secondo indice 3, ed allorchè si dice che basta conoscere due valori di variabili aventi lo stesso secondo indice, per avere il valore delle altre variabili di secondo indice identico, s'in-

tende che si conosca pure il *posto* che quelle variabili occupano, cioè che sia dato il valore numerico del primo indice.

Inoltre ove nella prima delle (a) si tien conto aversi $x_{01} = \sqrt{x_{-11}}\sqrt{x_{11}}$, si ha

$$\sqrt{x_{-11}}\sqrt{x_{11}} = \sqrt{x_{-11}}\sqrt{x_{-11}} - \sqrt{x_{-12}}\sqrt{x_{-12}}\,\frac{2\sqrt{x_{-11}}\,d\sqrt{x_{-11}}}{2\sqrt{x_{-12}}\,d\sqrt{x_{-12}}}$$

$$-\sqrt{x_{-13}}\sqrt{x_{-13}}\,\frac{2\sqrt{x_{-11}}\,d\sqrt{x_{-11}}}{2\sqrt{x_{-13}}\,d\sqrt{x_{-13}}}$$

che immediatamente si ottiene tenendo presente che $dx = 2\sqrt{x}\,d\sqrt{x}$. Sopprimendo il fattore comune $\sqrt{x_{-11}}$ l'equazione diventa

$$\sqrt{x_{11}} = \sqrt{x_{-11}} - \sqrt{x_{-12}}\,\frac{d\sqrt{x_{-11}}}{d\sqrt{x_{-12}}} - \sqrt{x_{-13}}\,\frac{d\sqrt{x_{-11}}}{d\sqrt{x_{-12}}} \tag{26}$$

ed allo stesso modo sarebbe stato agevole dedurre le altre due

$$\sqrt{x_{12}} = \sqrt{x_{-12}} - \sqrt{x_{-11}}\,\frac{d\sqrt{x_{-12}}}{d\sqrt{x_{-11}}} - \sqrt{x_{-13}}\,\frac{d\sqrt{x_{-12}}}{d\sqrt{x_{-13}}}$$

$$\sqrt{x_{13}} = \sqrt{x_{-13}} - \sqrt{x_{-11}}\,\frac{d\sqrt{x_{-13}}}{d\sqrt{x_{-11}}} - \sqrt{x_{-12}}\,\frac{d\sqrt{x_{-13}}}{d\sqrt{x_{-12}}}\,.$$

Risultati analoghi si ottengono ove si parta dal sistema (b) o altri della stessa serie, di guisa che si può alla (26) dare una forma più generale scrivendola

$$\sqrt{x_{p+2,1}} = \sqrt{x_{p1}} - \sqrt{x_{p2}}\,\frac{d\sqrt{x_{p1}}}{d\sqrt{x_{p2}}} - \sqrt{x_{p3}}\,\frac{d\sqrt{x_{p1}}}{d\sqrt{x_{p3}}}\,. \tag{27}$$

Come si è fatto pe' sistemi (a) (b) (c)... potremo trovare analoghe relazioni operando nei sistemi (a (b (c, o sugli altri (A) (B) (C)... (A (B (C...

Le equazioni della forma della (27) si prestano, come quelle in cui non figurano radicali, a fornire altre relazioni ch'è importante di mettere in mostra.

Avendosi così le due

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{x_{n+2,1}} &= \sqrt{x_{n1}} - \sqrt{x_{n2}}\,\frac{d\sqrt{x_{n1}}}{d\sqrt{x_{n2}}} - \sqrt{x_{n3}}\,\frac{d\sqrt{x_{n1}}}{d\sqrt{x_{n3}}}\\
\sqrt{x_{n+4,1}} &= \sqrt{x_{n+2,1}} - \sqrt{x_{n+2,2}}\,\frac{d\sqrt{x_{n+2,1}}}{d\sqrt{x_{n+2,2}}} - \sqrt{x_{n+2,3}}\,\frac{d\sqrt{x_{n+2,1}}}{d\sqrt{x_{n+2,3}}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Moltiplicando la prima per $\sqrt{x_{n+2,1}}$, e la seconda $\sqrt{x_{n1}}$, viene sottraendo la seconda dalla prima

$$\sqrt{x_{n+4,1}}\sqrt{x_{n1}}-\sqrt{x_{n+2,1}}\sqrt{x_{n+2,1}}$$

$$=\sqrt{x_{n1}}\sqrt{x_{n+2,2}}\frac{d\sqrt{x_{n+2,1}}}{d\sqrt{x_{n+2,2}}}-\sqrt{x_{n+2,1}}\sqrt{x_{n2}}\frac{d\sqrt{x_{n1}}}{d\sqrt{x_{n2}}} \tag{28}$$

$$+\sqrt{x_{n1}}\sqrt{x_{n+2,3}}\frac{d\sqrt{x_{n+2,1}}}{d\sqrt{x_{n+2,3}}}-\sqrt{x_{n+2,1}}\sqrt{x_{n3}}\frac{d\sqrt{x_{n1}}}{d\sqrt{x_{n3}}}.$$

Ora il primo rigo del secondo membro. per essere $d\sqrt{x}=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$, diventa

$$\frac{\sqrt{x_{n1}}}{\sqrt{x_{n+2,1}}}x_{n+2,2}\frac{dx_{n+2,1}}{dx_{n+2,2}}-\frac{\sqrt{x_{n+2,1}}}{\sqrt{x_{n1}}}x_{n2}\frac{dx_{n1}}{dx_{n2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x_{n1}}}{\sqrt{x_{n+2,1}}}\left\{x_{n+2,2}\frac{dx_{n+2,1}}{dx_{n+2,2}}-\frac{x_{n+2,1}}{x_{n1}}x_{n2}\frac{dx_{n1}}{dx_{n2}}\right\}$$

$$=\sqrt{x_{n1}}\sqrt{x_{n+2,1}}\left\{\frac{x_{n+2,2}\,dx_{n+2,1}}{x_{n+2,1}\,dx_{n+2,2}}-\frac{x_{n2}\,dx_{n1}}{x_{n1}\,dx_{n2}}\right\}.$$

Si scorge che ciò che si trova fra le parentesi, va a zero a causa della equazione (23). Altrettanto si trova pel secondo rigo del secondo membro della equazione (28) la quale, perciò si muta nell' altra

$$\sqrt{x_{n+4,1}}\sqrt{x_{n1}}=\sqrt{x_{n+2,1}}\sqrt{x_{n+2,1}}.$$

Ove si tenga conto di questa relazione nella prima delle (28)* è facile vedere che viene

$$\sqrt[4]{x_{n+4,1}}\sqrt[4]{x_{n1}}=\sqrt[4]{x_{n1}}\sqrt[4]{x_{n1}}-\sqrt[4]{x_{n2}}\sqrt[4]{x_{n2}}\frac{d(\sqrt[4]{x_{n1}})^2}{d(\sqrt[4]{x_{n2}})^2}-\sqrt[4]{x_{n3}}\sqrt[4]{x_{n3}}\frac{d(\sqrt[4]{x_{n1}})^2}{d(\sqrt[4]{x_{n3}})^2},$$

ed in quest' ultima eseguendo le operazioni indicate, e le riduzioni che si presentano, si trova finalmente

$$\sqrt[4]{x_{n+4,1}}=\sqrt[4]{x_{n1}}-\sqrt[4]{x_{n2}}\frac{d\sqrt[4]{x_{n1}}}{d\sqrt[4]{x_{n2}}}-\sqrt[4]{x_{n3}}\frac{d\sqrt[4]{x_{n1}}}{d\sqrt[4]{x_{n3}}},$$

e qui pongo termine alla seconda parte.

finita stampare il dì 12 agosto 1878

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

MYCETUM IN ITINERE BORNEENSI LECTORUM A CL. OD. BECCARI

ENUMERATIO

curis VINCENTII CESATI s. o.

(Exhibita die 13 Jul. 1878)

Cum jamdiu in Actis hujusce Academiae enumerationem Filicum tradiderim botanicis, quas strenuus viator italicus Beccari in bino itinere ad insulas Majores Aequoris Indici ac Malensis colligerat, tertium nunc hic offero tentamen de collectionibus ejus Mycetum agmen illustrans, pro maxima parte in ditione Sarawak insulae Borneensis coadunatum, pro caetero ex insulae Ceylaniae regionibus Pedrotallagalla, Nuwara Ellya, Paradenya etc.; opus parvae molis sed improbe laboriosum factum e causis complurimis, de quibus amplius locutus sum in Diario hodierno Academiae ipsius. Non resonabunt hic quaerulae voces. Tantummodo pauca addam verba de ordine, quem in redigendis his notulis praediligere placuit. Facile a Neotericis serierum sat trita coordinatio et expositio, generum imprimis singulorum minus acuta distinctio, redarguendae forent. Sed facili censurae facile quippe mihi prodest responsum.

In opere quotidiano genera huc usque accepta subtilioribus argumentis in plura dirimendi eo ventum est, ut saepe saepius vix judicium ferre liceat in determinandis speciminibus, nisi habeamus prae oculis totam eorum evolutionis seriem, a spora germinanti usque ad sporam alterius ordinis, integrum speciei determinatae cyclum, seu verum, seu non infrequenter sane hypoteticum, recludentem. Quanta in phytographicis negotiis utilitate hoc possit perduci, quoties illustrentur specimina a viatoribus per plagas remotas, nondum exploratas, inhospitas, frequenti vitae discrimine afflictis, vix est qui intelligere non valeat. Quod si insuper generum nimia dissectio haud raro jam patefiat infesta, ubi de majori formarum mole agatur, eo magis planiorem synthesim turbat, dum manipulus sat exilis exhibeatur, in quo diffracta solummodo et sparsa singulorum ordinum membra in conspectum veniant.

Syllabum meum exinde in praesenti controversia hic proponere licitum sit. Hodiernae scientiae incessum ultra antiquatos phytographiae aridae nudissimae limites expan-

sum toto corde admiror proboque et prosequor. Sed in tanta novitiarum, quae nobis proponuntur, farragine et phantasmagoria, in tanta novatorum libidine ad captandam famam, ad arripiendas sedes vilioraque lucra indenda, plaudentibus oviculis asseclis turbisque adeoecatis, sanioris mentis propositum esse censeo, considerate accipere judicia, caute judicia ferre. Argutiae, et sint alte conclamatae, non efficiunt scientiam; sat vicium ad nugas pueriles, nisi vexatorias, devertunt. Valete! [1].

HYMENOMYCETES

Agaricus (Tricholoma) sub-gambosus, Nob.

Pileus ex inflexo conicus tandem umbonato-expansus, pallide umbrinus, siccus?, carne alba ad marginem extenuata; stipes superne albus fibrillosus? cylindraceus, inferne lividus sensim incrassatus, basi attenuata, intus albus farctus; lamellae albae, angustae, rotundato-liberae, margine integerrimo.

Sarawak.

Ad iconem Beccarianam descriptus.

— **(Clitopilus?) orcellarius**, Nob.

Habitus omnino *Agarici Orcellae*, et speciem *A. Pseudo-Orcellae*, Fr. in Epicr. ed. II, p. 198, valde affinem suspicor.

Pileus primitus inflexo-ovoideus velo fugaci cingulatus, dein lobato-expansus in disco depressus infundibularis, albidus, squamulis brunneolis sericeis conspersus, in stipitem tenuiorem curvum basi subincrassata album farctum abiens, lamellis decurrentibus undulatis flaccidis, pallide carneis, margine furfuraceo-denticulato. Sapor haud ingratus. — Ad iconem et notulas Beccarianas descriptus.

Matang, junio 1866.

— **(Pleurotus) semisupinus**, B. Br. Journ. Linn. Soc. XI, p. 529.

Sarawak.

Agaricus (Omphalia) micromeles, B. Br. Journ. Linn. Soc. XIV 527.

Etich River in ditione Sarawak.

— **(Flammula) paupercula**, Nob. — *A. goniosporo*, B. Br. Fungi Zeyl. in Linn. Soc. Journ. XI, p. 541, affinis, praesertim ex basi stipitis in discum orbicularem tomentosum expansa. Sed obstant sporae ovoideae minime angulatae: diametro majori =0066^{mm}. Concolor, totus cinnamomeus; pileus semipollicaris convexus levis; lamellae decurrenti-adnatae; stipes pileum aequans, ad apicem incrassatus. — Nisi tria pauperula individua praestant, haud concinne determinanda. — Lignatilis.

Sarawak.

— **(Naucoria) Myosotis**, Fr. Miserrimum individuum vix alibi quaerendum in systemate.

Sarawak.

— **(Crepidotus) mollis**, Schaeff.

Sarawak.

— **(Crepidotus) proteus**, Kalchbr.

Collatus cum specimine a dom. Mac Owan lecto, et a cl. de Thümen benevole communicato, convenit.

Paradenya: ad fructus ignoti putamen.

— **(Crepidotus) flavomarginatus**, B. Br. Jour. Linn. Soc. XI, p. 546.

Ceylon, ad Pedrotallagalla; majo 1865.

— **(Crepidotus) pezizula**, B. Br. l. c. XIV, p. 32.

Ceylon, ad Pedrotallagalla: majo 1865.

[1] Cum factum sit, et tentamina quotidiana mihi suaserint facillime fieri continuo, quod mensiones micrographicae numeros saepe saepius nimis discrepantes pro una eademque specie exhibuerint, sive variae methodi auctorumque in observationibus peritiae, sive differentiae causa, quae inter singulas compages dioptricas intercedit, observationes directas ope *micrometri* sic dicti *objectivi* instituere mihi libuit, quod *quintam* millimetri partem exactissime *centies aequilate* divisam offert. Hinc mensura sequenti modo expressa: 50×5 indicabit longitudinem objecti $^{50}/_{500}$ m., latitudinem vero $^{5}/_{500}$ m. amplecti. Cum autem clarissimus et amicissimus Mycologus D. Cooke benevole mensurationes partium fructificationis ab ipso institutas ad hodiernam normam apud plures species hic descriptas communicaverit in litteris, obsequenter et grate referentur suis locis.

Ingenue me profiteor dissentientem ab Auctoribus cryptogamologicis, qui, in statuenda dignitate specierum minutissimas, et haud raro forsan complicatas mensiones momenti justo majoris faciunt. Sinite mihi libere sententiam meam patefacere: argutam censeo methodum; sed nimis argutam, hinc minus probam.

Clarissimis viris, Rev. Berkeley et D. Cooke, gratias quam maximas hic agere sanctum mihi oficium est, propterea quod difficultates ex adminiculorum inopia mihi exortas humanissime dirimere iis placuerit.

Agaricus (Panaeolus) papilionaceus, Bull.?

Forma pumila, vix tute determinanda.

Sarawak.

Marasmius (Collybia) oreades, Fr.?

Unicum individuum, haud probum.

Sarawak.

— **(Mycena) galericula**, Nob.

Subfuniculatus, lignicolus. Stipes tres pollices metiens filiformis, corneus, rigidus, brunneus, flexuosus (nec tortus), levis, vix pulverulentus s. pruinatus, sed opacus. Pileus campanulatus, diametro pollicari, colore in sicco lurido, adspectu Agarici e serie *Mycenarum rigipedum*, senio deformatus; lamellis, quatenus judicium ferre licet, latis pallidis...— Ex stipitis indole de *Marasmio* suspicatus sum.

Paradenya in H. Botanico.

— **(Mycena) arachnoideus**, B. et C.

Borneo (Sarawak), ad Monocotyleae ignotae petiolum emarcidum.

ANTHRACOPHYLLUM, Nob. n. gen.

Genus *Marasmiis* affine, hymenio extus intusque nigrescenti, lamellis arescentibus, exsiccatione immutatis et ipsi cultro duris corneis. Pileus suborbicularis sessilis, vix pollicaris diametri, sat explanatus, supra sulcatus (more *Schizophylli*) fulvellus adustus et fere pulverulentus; lamellae distantes, acie acuta integerrimae, inaequales, 2-3 mill. latae, attingentes, ad centrum attenuatae.

A. Beccarianum, Nob.

Ceylon, in H. B. Peradenyae, ad ramulos.

Heliomyces pauciradiatus, Nob.

Proximus *H. eleganti*, Lév. Stipes 2-3— pollicaris, tenuis, compressiusculus, aequalis, tortus striatusque, glaber. Pileus diametro pollicem et semis metiens, expansus, lamellis 5-6 aequilongis filiformibus vix conspicuis. Totus concolor, ex ochraceo fuscescens.

Sarawak, in M. Mattang, 1866. Foliorum et stipitum marcescentium videtur incola. Singulum specimen.

Cantharellus bicolor, Nob.

Minutus, e sessili v. subsessili resupinatus; pileo coriaceo e caesio cinereo, sat explanato; hymenio albido lamellis subtilibus distantibus.

Sarawak.

Panus copulatus, Ehrbg. in Hor. Phys. Berol. p. 86, tab. 81, fig. V!

Fungus noster omnino convenit cum descriptione iconeque Ehrenbergianis, si magnitudinem praetermittas, quae in speciminibus borneensibus alterius quadruplum et quintuplum, i. e. diametrum bipollicarem et ultra attingit. Ast observandum venit nostra specimina singulos pileos adultos libere et optime explicatos offerre, dum ex descriptione Ehrenbergii coloniam sat juvenilem prae oculis ei adfuisse elucet.

Sarawak.

Lentinus dactyliophorus, Lév. voy. Bon. p. 168, tab. 136, fig. 2!

Sarawak.

— **glandulosus**, Nob.

Ad singulum specimen, idque senio paullisper defiguratum.—Pileus e chartaceo coriaceus, eximie infundibuliformis, fere bipollicaris, rufulus, glaberrimus, azonus. Stipes semipollicaris, tenuis, lamellaeque inaequales, acie integra, ad latera glandulis conspersae, concolores.—An *L. exilis* Fr. ep. 393?

Sarawak.

— **Beccarianus**, Nob.

Diu haesitavi num ad *L. cladopodum*, Lév., num ad *L. cornucopioidem* Kl. remitterem fungum nostrum. A primo colore pilei fuscescenti, imo badio in fungo adultiore (saltem in sicco), neque albo, stipiteque fibrilloso excoriato nec glabro, etsi subinde e basi ramoso, differt species hic oblata; ab altero iterum stipite nec glabro neque sulcato, lamellisque angustis confertissimis, neque latis distantibusve. Stipiticola.

Sarawak.

— **setiger**, Lév. voy. Bon. p. 170, tab. 136, fig. 4!

Exacte medius inter speciem Léveillei, quam refert setis, aptius dicerem strigis, marginem pilei ossidentibus, et *L. velutinum*, Fr. stipite setis omnino carente et tantummodo molliter velutino.

Sarawak.

— **leucochrous**, Lév. l. c. p. 172?

Valde incertus haereo, in tanto Lentinorum agmine, num novam speciem addam. Basim stipitis bulbillosam fungus noster, forsan a matrice minus apte divulsus, non fert. Colore potius ad *L. albidum* Berk. in *Lond.*

journ. Vol. II (1843), p. 633 accedit, sed pileum excentricum nullimode adpellare licet. *Lentinus glabratus* Montg. magis distat.

Sarawak.

Xerotus? dasypus, Nob.

Singulum specimen, pusillum, carie consumtum, analysi subjicere nefas fuisset; neque licebat fungillum perbelle distinctum praeterire. Num *Cantharelli* sp. potius dicendus? — Pileus centralis neque pollicem diametro attingens, integer, centro depressus, setulosus; hymenio flabellatim ramose venoso, venarum acie integra obtusa. Stipes ultra pollicaris, tenuis, setulosus, setis in costulas longitudinales confluendo Carduacearum pedunculos alatos fingentibus.—Totus concolor e gilvo lutescens.

Sarawak.

Lenzites brunneola, Berkl. in litt.

Sarawak.

— **repanda,** Fr. epicr. p. 404.

Sarawak.

Boletus (Viscipellis) longicollis, Nob.

Pileo, stipite et annulo viscosissimis. Pileus ex hemisphaerico expansus, tripollicaris rufus, levis, margine acuto. Stipes quatuor-vel quinquepollicaris, tenuis, e basi ad apicem sensim attenuatus, solidus, pileo concolor, ad apicem pallidus, levis annulo luteolo distanti. Tubuli flavidi, a stipite sejuncti, poris amplis irregularibus. Pellicula pilei vix secernenda; caro tam pilei quam stipitis flavida, immutabilis.

Matang, jul. 1866.

Descriptio ad iconem et schedam Beccarianas.

— **(Viscipellis) subtomentosus,** L.?

Ex icone, nulla descriptione adjecta.

Matang.?

— **(Calopus Recedens) Mandarinus,** Nob.

Pollices decem usque altus. Pileus campanulatus in umbonem conicum porrectus, quadripollicaris, levis, siccus, sanguineus. Stipes elatus, e basi sub-bulbosa attenuatus, diametro pollicari in media parte paullisper incrassata, e sanguineo fuscescens, punctis reticuloque nullis, solidus. Tubuli a stipite sejuncti, flavissimi, poris rotundis. Caro flavida.

Matang-Poe, m. aug. 1866

Ad iconem Beccarianam.

Polyporus (Pleuropus) Amboinensis, Fr. Epicr.

Singapore, jun. 1865.

— **(Pleuropus) mastoporus,** Lév. voy. de la Bon. (Botan. I, p. 176) tab. 137, fig. 1! Pororum forma distinctissima species, caeteris characteribus *P. lucido* approximanda.

Sarawak, 1865.

— **(Pleuropus) Lingua,** Nees.

Sarawak.

— **(Pleuropus) Beccarianus,** Nob.

Proximus *P. vario* et *picipedi*, nec non *eleganti*, ab illis poris non decurrentibus, minutissimis, rotundis, ab hoc colore nigro primitus caesio-pruinato, stipiteque concolori discrepans. Adfines species amplitudine pilei adaequat. Hymenium alutaceum. Forsan ex affinitate *Polypori tephromelanos*, Montgn.

Sarawak.

— **(Pleuropus) rhipidius** Berkl. l. c. 1847, p. 319.

Sarawak.

— **(Pleuropus) eriopus,** Nob.

Totus fungus tres pollices altus, pileo erecto, reniformi, repando-lobato, ad stipitis subaequalis cinereo-velutini insertionem infundibulari, spadiceo fere nigricanti, radiatim striatulo, caeterum levi, glabro, opaco. Substantia tenuis coriacea valde rigida, marginis attenuati zona angustissima nuda. Hymenium ex alutaceo cinereum, poris minutissimis aequalibus rotundis.

Sarawak.

— **(Pleuropus) polychrous,** Nob.

Pileus chartaceus rigidus, primitus subinfundibiliformis mesopus, cito definite lateralis verticalis, ex umbilicato flabelliformis, usque tripollicaris, rufus vel castaneus nitens zonis pallidioribus, interdum ochraceo fuscis, aliis obscurioribus, marginali badia, alternantibus; junior fugaciter pruinosus; haud raro linea concentrica mediana asperitatibus notata. Marginis pagina inferior nuda. Hymenium alutaceum, poris minutissimis, rotundis, aequalibus, paullisper descendentibus in stipitem nunc brevissimum, nunc pollicarem et bipollicarem, tenuem, cylindraceum basi disciformi, sublaccatum, versicolorem, pallidum semper.

Formas sequentes distinguere lubet:

I. Forma **mesopoda**

Syn: **P. Katui**, Ehrbg. hor. phys. Berol. p. 93, tab. XVIII, fig. 12.

— **xanthopus**, Fr. Obs. II, p. 255.—Epicr. ed 1ª p. 437.

II. Forma **pleuropoda**

1. var. **rufo-aurata**

Syn: **P. affinis**, Nees. Nov. Act. Acad. Caes. Leop. XIII, p. 18, tab. IV.

— **luteus**, Nees., l. c. p. 16, tab. IV.

— **perula**, Fr. epicr. ed. 1ª p. 437.

subvarietate: **irregularis**, pileo magis flabellato in stipitem reductum attenuato.

2. var. **pallida**

— — α. **longistipitata**

— — β. **brevistipitata.**

Sarawak.

Polyporus (Pleuropus) flabelliformis, Kltz. in Linn. VIII (1833) p. 483; Fr. ep. p. 444.—Adsunt formae magis glabratae, margine vix sterili, neque stipite nigro etc.—Var. glabrata concolor.

Pulo-Penang; Sarwaak.

— **(Pleuropus) grammocephalus**, Berkl. in Hook. Journ. 1842 p. 148, cum *varietate* fuscescenti, attenuata, petalode. — Ipse ill. Auctor speciem erga haesitationes meas determinavit.

Pulo-Penang, 29 maj 1865, Sarawak.

— **(Pleuropus) incompletus**, Nob.

Subsessilis, 2-pollicaris, profunde lobatus lobis undulatis, glaberrimus, obsolete longe versum sulcatus, supra lutescens, hymenio (pro maxima parte sterili in unico, quod adest, specimine) pallidiore. Pori perpauci qui prostant irregulares, sed typice videntur rotundi, caetero substantia tenui concolori sublaccata obducti. Substantia suberoso-coriacea, e luteo fulva. Forsan prioris forma sterilescens.

Sarawak.

— **(Pleuropus) squamaeformis**, Berkl. in Hook. Journ. 1852, p. 139.

Formae variae; alterutra forsan secernenda; sed e singulis speciminibus, in hoc grege proteiformi, non ausim.

Sarawak.

— **(Placodermeus) piceus**, Nob. An *P. australis var. applanata* Fr. ep. p. 464?

Pileus 3-pollicaris deplanatus, piceus, sublaccatus, concentrice sulcatus, obsolete tuberculosus, durissimus, margine inferiore zona angustissima sterili, obtusato. Caro tenuis, dura, cinnamomea, obsolete (specimen junius) stratosa. Hymenium extus brunneum compactum, tubulis brevibus poris minutissimis, subangulosis, acie plana; sporidia ochracea.

Sarawak.

Polyporus (Placodermeus) ungulatus, Bull.

Pulo-Penang: 29 maj 1865.

— **(Placodermeus) fulvus**, Fr. juvenilis.

Ceylon ad Pedrotallagalla; Sarawak.

— **(Placodermeus) rufo-flavus**, B. et C. in Journ. of Linn. Soc. X. p. 310.

Specimina juvenilia pileum cuticula quadam rufa secernibili obtectum ostendunt, sub qua latet crusta laccata coloris sanguinei; hymenium pallide citrinum. Speciminis adulti pileus totus laccatus sulcisque concentricis profundioribus; hymenium intense flavum.

Singapore, jun. 1865. — Sarawak — Colombo.

— **(Placodermus) semitostus** Berkl. in Hook. Journ. 1852, p. 143.

Forma resupinata.

Sarawak.

— — **bubidus** Berkl? in Hook. Journ. 1847, p. 500.

Ceylon.

— **(Placodermeus) Aurora**, Nob.

Totus fungus, quoque contextu, colore amoene rosello pruinato gaudens. Pileus usque tres pollices et dimidium latus irregularis, deplanatus, tenuis, subvelutinus, parce zonatus, margine acuto reflexo; poris minutissimis acie obtusa, tubulis brevissimis—*Trametem* suspicor.

Sarawak.

— **(Placodermeus) cremorinus**, Nob.

Totus plus minus pallide gilvus; contextus magis fulvescens. Pileus suborbicularis, planus, 2-3 pollicaris, glaberrimus, nitens, concentrice sulcatus, margine acuto. Hymenium planum poris minutis rotundis, acie obtusata.

Sarawak.

— **(Placodermeus) caliginosus**, Nob.

Pileus semiorbicularis, usque tres pollices

latus, plus minus convexus margine acuto subinflexo, opacus, nigrescens, zonatus, in speciminibus junioribus hinc inde lineola pallidiori, radiatim rugose-sulcatus. Contextus tenuissimus, cum tubulis flexibilibus concolor rhabarbarinus. Pori minutissimi, acie obtusa, rotundi. — Diceres pileum *P. rugosi*, Nees.

Sarawak.

Poylporus (Placodarmeus) pusiolus, Nob.

Minutus, magnitudine Pisi dimidiati, omnino resupinatus, centro adfixus, *Poroniae punctatae* formam fere simulans. Pileus fuscellus, lineolis concentricis notatus, glaber, margine acutissimo. Contextus pallidior, ad gilvum vergens, uti hymenium planum vel concavum, poris microscopicis acie tenui acuta.

Sarawak.

— **(Placodermeus) sanguinarius,** Kl. in Linn. VIII, p. 484.

Specimen exoletum. Pileus concentrice rugoso-sulcatum se exhibet.

Sarawak.

— **(Placodermeus) melanoporoides,** Nob.

A *P. melanoporo* (Mtgn.) pileo non sulcato, sed omnino inaequabili, differt. Facies lurida; totus, etiam contextu, e violaceo nigricans, poris minutissimis acie obtusa.

Sarawak.

— **(Placodermeus) zonalis,** Berkl. forma resupinata.

Sarawak.

— **(Placodermeus) crocitinctus,** B. et C. in Journ. Linn. Soc. X, p. 311.

Ejus forma juvenilis, ex integro tomentosa. — Potius *Inodermeis* hoc statu si libet, quam ad *Placodermeos*, inscribendus.

Sarawak.

— **(Inodermeus) caesiellus,** Nob.

Semiorbicularis, pollicem et dimidium latus, valde tenuis, totus e rufescente caesius, glabratus, concentrice striatus, margine extenuato sterili. Tubuli ferruginei, poris microscopicis, rotundis, ore obtuso caesio. — Pro varietate *Polypori versicoloris* haberes, nisi obstaret color contextus.

Sarawak.

— **(Inodermeus) dermatodes,** Lév. voy, d. la Bonite p. 180, tab. 138, fig. 2!

Sarawak.

Polyporus (Inodermeus) zonatus, Fr. cum var. pygmaea.

Ceylon ad Pedrotallagalla; Nuwara Ellya; varietas ex Sarawak.

— **(Inodermeus) confundens;** Nob.

Pileus subspathulatus diametro vix pollicari, chartaceus, fuscescens, sericellus, zonatus zonis obsolete cristatellis, margine attenuato repando, hymenio pallidiori, poris minutissimis sub-rotundis. — Basis sterilis nunc inconspicua, nunc paullisper producta.

Sarawak.

— **(Inodermeus) Peradeniae,** B. Br! Journ. Linn. Soc. XIV, p. 51.

Forma omnino resupinata, hymenio laete citrino.

Sarawak.

— **(Inodermeus) bivalvis,** Pers.

Pusillum, pallidum, zonatum, glabrum, bivalve, valvis reniformibus in sicco vix hiantibus, marginibus abrupte inflexis. — Sparsum, interdum singulis individuis e basi binatis; itemque hymenio facile obliterato, ut *Stereum* fere reddat.

Sarawak.

— **(Inodermeus) personatus,** B. Br! Journ. Linn. Soc. XIV, p. 51.

Una et forma resupinata.

Sarawak, 1865.

— **(Inodermeus) vilis,** Nob.

Specimina tantummodo exoleta prae oculis habemus. Facies tota *Sterei* cujusdam magis plebei; pileus luride castaneus zonis pallidioribus, *P. versicoloris* specimina senio deturpata simulans. Hymenium in unico individuo aptiori pallide gilvum poris tam microscopicis, ut nisi lente vitrea acutiori discriminari possint.

Sarawak.

— **(Inodermeus) hirsutus,** Fr. poris laceris.

Nuwara Ellya (Ceylon).

— **(Inodermeus) velutinus,** Fr.

Forma resupinata, lutescens.

Sarawak.

— **(Inodermeus) Hasskarlii,** Lév. Ann. Sc. Nat. 1844, II, p. 190.

Sarawak.

— **(Resupinatus) Ravenalae,** B. Br.! Journ. Linn. Soc. XIV, p. 53.

Sarawak, et Singapore.

Polyporus (Resupinatus) luctuosus, Nob.

Forma valde suspecta; forsan, si typice exculpta sit, in aliena serie quaerendus.

Subiculum nunc sulphureum, nunc albidum, semper tenuissimum et spumeum, marginans, hymenium luride tabacinum fert e tubulis compactis, subtilibus, obliquis compositum: pori minutissimi concolores rotundi acie tenui integra.

Sarawak.

— **(Resupinatus) cinerascens,** Schwz.

Forma omnino resupinata. Contextus et margo e rosello gilvi.

Sarawak.

— **(Resupinatus) sarawacensis,** Brkl. in litt.!

Poris obliquis et fere ex toto hiantibus.

Sarawak.

Daedalea lenzitiformis, Nob.

Pallide gilva s. alutaceo-albida, usque quatuor pollices lata, utrinque plana; pileo supra subtiliter et adpresse velutino, fere glabrato, concentrice zonis depressis notato, margine tenui. Hymenium stipatissime poroso-lamellatum ita, ut fere diceres zonas pororum rotundorum lamellarum zonis alternare, lamellis tenuibus confertis strictis; hymenium vere intermedium hinc typico Lenzitis, illinc typico accedens Daedaleae; adspectus speciem priori generi adpropinquans, nisi pori in uno alterove specimine absolute marginales de indole Daedalina mihi suasissent. Fungus *Lenziti deplanatae* forsan accedens, nec *Trameti gibbosae.*

Sarawak; Pulo-penang.

— **platypoda,** Lév?

Stipes in speciminibus, quae sub oculis habemus, minus exacte congruit cum illo ab Auctore suae speciei adscriptum; quod vero a minus perfecto statu individuorum pendere mihi fingo.

Sarawak.

— **sanguinea,** Kl. in Linn. VIII, p. 481.— Lév. voy. Bonit. p. 186, tab. 33, fig. 3! Fr. epicr. 1ª, p. 493.

Paradenya; Pulo-Penang: Sarawak.

— **imponens,** Nob.

Pileus suberoso-stuposus, magnus (usque 8-pollicaris) dimidiato-sessilis, flabelliformis, supra umbrinus ad centrum, caetero ligneus, zonis concentricis, concoloribus, radiatim rugoso-fibrosis, margine adpresse strigoso strigis fere ramosis, imo palmatis, obsito. Hymenium primitus fuscum, serius cinereum pruinosum, ad marginem pallide gilvum, lamellis ligneis tenuibus undulatis, demum laceratis, poros maximos ad centrum elongatos, ad basim et marginem integros sistentibus.

Sarawak.

Daedalea pruinosa, Lév. voy. Bon. p. 185, tab. 136, fig. 1!

Hymenium amplis poris subhexagonis in speciminibus juvenilibus *Hexagoniam* mentitur.

Sarawak.

— **? vetulina,** Nob.

Utrumque aeque tenet genus, *Trametis* atque *Daedaleae,* hic fungus, cujus unicum specimen adest.— Pileus suborbicularis, ultra bipollicaris, planus margine acuto, e lutescenti ochraceus, velutinus, zonis nitentibus et sulcis angustis concentricis signatus. Hymenium concolor, lamellis pulverulentis sinuosis hinc inde anastomizantibus, acie rotundata.

Pedrotallagalla; maio 1865.

Trametes colliculosa, Berkl. in Hook. Lond. Journ 1847.

Sarawak, 1865.

— **ludificans,** Nob.

Sessilis, pileo dimidiato, gibberulo, toto concolori cremorino (in sicco), compacto, e spongioso suberoso, colliculoso, zonis nullis, contextu albo, margine attenuato subrepando, poris linearibus angustis, immixtis brevioribus subrotundis, plus minus plicatulis.— Diametro bipollicari et ultra.— Species valde affinis *Tr. gibbosae,* attamen distincta, sicut monet cl. Berkeleyus in litt.

Sarawak.

— **versatilis,** Berkl. Lond, journ. Bot. II, 150 — (Polyporus fimbriatus), Lév. voy. Bon. tab. 138, fig. 1!—non Fr.; — P. versatilis, Lév. l. c. in textu, p. 182.

Sarawak.

Appendicis modo ad Polyporeorum gregem mentionem faciam fungi adspectu insignis, quem sub nomine *Polypori sanguineo-marginati,* pro interim sumere fas es-

set. Corticem arboris ignotae obducens, stratum centimetrum et semis crassum, extus intusque pallide gilvum, contextu compactum suberosum ligneae duritiei efficiens, superficie pseudo-porosa seu melius dicenda irregulariter obiterque scrobiculata, aequabili. Margo (ex vegetatione praecedenti?) e sanguineo nigrescens, extenuatus.

Sarawak.

Hexagonia subaculeata, Nob.

Pileus 2-3 pollicaris coriaceus, planus, colore ligneo zonis brunneis, sulcisque concentricis aculeolis adpressis coronatis, radiatim rugosus. Contextus fere concolor, subgilvus, suberosus. Margo acutus. Hymenium colore pilei, alveolis sat conspicuis hexagonis, interdum dissepimentorum parietibus transverse corrugatis, acie nigrescente integerrima.

Ab. *H. aculeata* Mtgn. Syll. p. 169 pileo tenuiori pallido, setis sulcorum rarioribus adpressis vix pungentibus differt.

Iohore, 11 jun. 1865.

— **polygramma**, Mtgn.

Sarawak.

— **vitellina**, Nob.

Resupinata, nunc orbicularis, nunc effusa. Pileo supra molliter tomentello, tenui, margine extenuato, cervino; hymenio citrino, poris sat amplis, superficialibus.—Pro forma abnormi *Polypori Peradeniae* lubenter habuissem, etsi color hymenii congruus non sit visus.

Sarawak.

— **Cesatii**, Berkl. in litt.!

« Tenuis, orbicularis, lignicolor; pileo zo-
« nato, zonis concoloribus; poris postice he-
« xagonis (1/108), antice concentricis an-
« gustioribus ». Berkl. in litt.

Sarawak.

Favolus (Mesopus) cillario, Mntg. Cent. IV, N. 82, tab. 15, fig. 2. — Syll. p. 170.

Quatenus e speciminibus semidestructis judicium ferre licet. Alveoli e lacero fimbriati; stipes tomentellus s. velutinus.

In H. B. Peradeniae.

— **(Pleuropus) tesselatus**, Mntgn Cent. IV N. 84. — Syll. p. 171.

Sarawak.

— **(Pleuropus) scaber**, Berkl., var. fusca, Nob.

Forma typicum *F. scabrum* arctius connectens praecedenti, cui similem jam Auctor ipse in *Linn. Soc. Journ.* XIV, p. 57, speciem suam dixit.—Specimen nostri fungi a forma typica Berkeleyana, quam benevolentiae inclyti Mycologi Londinensis debemus, differt colore toto fusco pilei radiatim striati lineolis sub lente scabridis, praecipue ad basim. Alveoli adamussim cum illis praecedentis speciei tam forma, quam amplitudine et tenuitate et margine minute denticulato, concordant. Sed in nostro sculpturae pilei bulloso-tessellatae nullum vestigium.

Singapore.

Favolus (Pleuropus) scaber, Berkl. var. caespitosa, apoda.

Rambode.

— **(Apus) papulosus**, Nob.

Parvulus, $^1/_2$ pollicem latus, subreniformis, pileo tenuissimo glabro bullato (bullis singulis alveolis respondentibus), alveolis mediocribus, dissepimentis crispis acie fimbriato-lacera. Color ochraceo-fulvus, hymenio pallidiori.

Sarawak?

— **(Apus) auriculaeformis**, Nob.

Pileus reniformis, horizontalis, 3-pollicaris, valde tenuis sed in sicco rigidus, humectus flaccidus, glaberrimus levissimusque, e fulvo cervinus, disco adfixus. Hymenium e gilvo luteolum, a pileo fere indistinctum, alveolis subhexagonis valde superficialibus, sterilibus, dissepimentis rigidis integerrimis. Characteribus incertis genera plura tangit, neque ulteriorem sententiam de consilio meo ferre vellem.

Sarawak.

— **(Apus) cucullatus**, Montgn.

Pileus irregularis ex orbiculari flabellatus, basi in expansionem discoideam desinenti, consistentia chartacea, margine extenuato, lacerato, sterilescenti; levissimus glaberrimusque, unicolor cervinus fascia marginali hinc inde interrupta adusta. Hymenium pallidum alveolis mediocribus versus marginem subrotundo-hexagonis, regione intermedia elongato rhomboideis, parietibus tenuibus facile laceris setulosis. — *Favolo flaccido* Fr. in Linn. V, p. 511 maxime affinem existimo.

Paradenya.

Favolus (Apus) transiens, Nob.

Ex mente cl. Berkeleyi in litteris potius *Hexagonia*. Pulchella species! Pileus 2-3 pollicaris, e sub-reniformi flabellatus, margine obtuse lobato, papyraceus etiam in sicco flexilis, brunneus, velutinus zonis concentricis vix discoloribus densis. Hymenium paullisper pallidius, alveolis potius irregulariter hexagonis, *evidenter ad schema zonarum circinnantium*, ut *Cyclomycis* lamellae, dispositis; dissepimentis tenuibus margine subalbicanti denticulato, sub microscopio composito setulosis. Sporas videre non contigit. Dispositio alveolorum concentrica, et *Cyclomycem* reclamans, evidentissima tunc praecipue fit, cum hymenium sensu obverso, i. e. a margine ad basim, conspiciamus.

Sarawak.

Cyclomyces Beccarianus, Nob.

Nitida species, in singulari genere, ni fallor, tertia. — Fungus totus concolor brunneus, omnino apus mihi visus, etsi basis vix integra a matrice avulsa fuerit. Pileus subreniformis, pollicaris vel sesquipollicaris, convexo-planus, inaequabilis, velutinus, ad marginem zonatus obiterque sulcatus. Hymenii planissimi lamellae concentrice decurrentes, alveolos angustissimos sinuosos efficientes poris brevioribus vel omnino rotundatis saepe interruptos. Dissepimentorum margo albicans, una parietibus pulverulentus. Ascos nullos vidi. Contextus floccosus.

Forma pilei et compages lamellarum minime continuarum pro *Cyclomyce fusco* Fr. in Linn. V, p. 512, tab. XI, fig. 3 sumere fungum nostrum vetuerunt, etsi coloris diversitatem negligere possimus.

Sarawak.

Laschia lurida, Nob.

Sessilis, orbicularis, colore luride cinereo, gelatinosa, glabra; hymenio crasse plicato-poroso. — Cl. Berkeley *L. tremellosae* nimis proximam existimat.

Ceylon; Sarawak.

Merulius similis, B. Br.? Iourn. Linn. Soc. XIV, pag. 58.

Specimina vetusta me dubiosum linquunt.

Pedrotallagalla, majo 1865.

— **Crocicreas**, Nob.

Effusus, ligno innascens extus intusque croceus, ambitu albo determinato; plicis tenuissimis parallelis stipatis. Singularis!

Sarawak.

Hydnum (Mesopus) ferrugineum, Fr.

Ceylon; Sarawak.

— **(Apus) Ravakense**, Pers.

Sarawak.

— **(Resupinatum) glabrescens**, Bkl. et Rav.? Journ. Linn. Soc. XIV, p. 59.

Speciminulum microscopicum.

Singapore.

— **(Resupinatum) Cesatii**, Berkl. in litt.

Effusum, tenuissimum, adglutinatum absque margine libero, albido-ochraceum, aculeis isabellinis filiformi-subulatis, interdum ad medium oedematosis, usque 5 mill. longis; nonnullis ad basim coalitis.

Ad corticem trunci.—Cum *H. membranaceo*, Fr. comparandum.

Sarawak.

Irpex (Resupinatus) depauperatus B. Br. Journ. Linn. Soc. XIV, 61.

Specimen unicum, exoletum.

Pedrotallagalla.

Grandinia crustosa, Pers.

Ceylon.

— **(Apus) glabrescens**, B. Rav.

Speciminulum microscopicum, juvenile, caeteris carie consumtis.

Sarawak.

Odontia? farinacea, Nob. An *Hydni farinacei* speciminulum?

Subiculum fugax granulos minutissimos cristatulos fert. Color e sicco alutaceus.

Sarawak.

Radulum mirabile, B. Br.? nisi potius Hypocreae initia. Status juvenilis ad folia herbae cujusdam repentis.

Gunong Leyon a Linga; novembr. 1867.

Beccariella, Nob. n. gen.—Hymenium inferum, costulis flabellatim a stipite ad marginem decurrentibus, constitutis ex aculeis minimis verruciformibus compressiusculis acutis apice integro vel fimbriato cristatis.— Pileus, pariter ac stipes in illum continuus, e duplici strato constans: externo fomentario molli superficie velutina; interno altero longitudinaliter fibroso discolori.—Totus fungus gilvus, hymenio ad centrum in speciminibus adultis rufescenti; pileo ab 1-6 pollices diametro me-

tienti orbiculari, centro nunc plano, nunc depresso, concentrice zonato zonis cristato-laceris, margine quoque lobato extenuato lobis fimbriatim incisis; in stipitem centralem continuum pollicarem, tres vel quatuor lineas crassum, hymenio producto sensim descendenti. — Fungum maxime evolutum diceres Hydnum mesopodum hymenio sub-Odontoideo; Thelephoreis adscribendum censeo.

Beccariella insignis, Nob. — An **Cladoderris dendritica** (Pers.) Berkl. in Lond. Journ. of Bot. I (1842), p. 152, var. hymenio scabro?

Idem forsan typus fungi a Cumingio in exsiccatis suis sub n.° 2036, qui nobis non suppetit, distributi.

Sarawak.

Cladoderris dendritica, (Pers.) Berkl.

Sarawak.

Craterellus spathularius, Berkl. C.

Unicum miserrimum specimen.

Sarawak.

— **cornucopioides**, Pers.

Specimen vix rite evolutum; totum concolor; substantia tenuis.

Ceylon.

— **hypolyssoides**, Nob.

Sparsus in facie inferiori folii cujusdam coriacei, pusillus (4 mill. stipes, totidemque pileus cupularis), basi insititia puberula sub lente; totus cinerascens, glaberrimus.

Primo intuitu crescendi modo, nec non pilei forma, *Hypolyssum* in mentem revocat, cujus pileus vero solidus est.

Sarawak, 1865.

Thelephora multipartita, Fr. var. fuscella.

Sarawak; Ceylon.

— — var. soluta.

Pilei partitionibus lineari-multifidis.

Sarawak.

— — var. isarioides, sterilis.

Unicum speciminulum, totum cinereum in lacinias lobosque cylindraceo-subulatos fissum.

Sarawak.

Stereum (Mesopus) spathulatum, Berkl.

Ceylon.

— **(Apus) Berkeleyanum**, Nob.

Contextus e rufo umbrinus; pileus tenuis, sulcatus, tomentosus, inaequabilis rugosus-ve, colore e rufo brunneo; hymenium (in sicco) sub-papillosum nigrescenti-cinereum. *Stereo membranaceo* Fr. adfine existimo.

Sarawak.

— **(Apus) rubiginosum**, Fr.

Sarawak.

Stereum (Apus) ochraceo-flavum, Ellis.

Pedrotallagalla, majo 1865.

— **(Apus) ochroleucum**, Fr. ed. II, p. 639.

Sarawak.

— **(Apus) ferrugineum**, Fr.?

Unicum individuum, neque optimum profecto.

Pedrotallagalla.

Auricularia sordescens, Nob,

Ad corticem effusa, margine pileolatim lobato inflexo; supra cervina tomentella; hymenio sordide melleo obiter plicato.

Sarawak 1865.

Auricularia? An A. lobata, Sommf.?

Specimen vix determinandum.

Rambode.

Hymenochaete depallens, B. Br. in Journ. Linn. Societ. XIV, p. 68, n.° 616!

Singapore; Pedrotallagalla.

Corticium (Himantia) lacteum Fr.

Pedrotallagalla.

— **Berkeleyanum**, Nob.

Lignicolum. Crusta effusa, indeterminata, ex helvolo luteola, superficie aequabili, a matrice non solvenda. — Forsan status abnormis alienae speciei.

Sarawak.

— **Peradeniae**, B. Br. in Journ. Linn. Societ. XIV, p. 69!

Pedrotallagalla.

Hypochnus ruberrimus, Nob. (Stereum Berkl.).

Pulvinuli sat crassi, depressi, orbiculares saepius confluentes, ex toto laete coccinei, margine obtuso concolori, nullo hyphasmatis discoloris vel saltem byssoideo-radiantis vestigio.

Sarawak.

Guepina Spathularia, Fr. - Berkl. fung. ceyl. exs! — *Ellis* fung. Am. Sept. exs!

Pedrotallagalla.

— **fissa**, Berkl. Ann. of Nat. Hist. X, p. 383.

Sarawak.

— **Palmiceps**, Berkl. l. c.

Mattang, januar. 1866.

— **sp. n.?**

Pulo-penang, 29 maj. 1865.

Clavaria intricata, Nob.

Ochrospora, cervina, unciam et semis alta, caespitosa, ramosissima, ramis tenuibus flexuosis intricatis, apicibus saepius penicillatis.

In H. B. Peradeniae (Ceylon).

— **Thwaitesii,** Berkl. et Br.

Forma ramis undulatis apice acutis?

Singapore.

Hirneola hispidula, Berk. Ann. Nat. Hist. III, p. 396? Specimen pauperculum.

Pedrotallagalla.

Dacrymyces varius, Nob.

Lutescens, expallens; nunc clavatus, nunc distentus heteromorphus.—Imperfectus.

Ad lignum senio dealbatum.

Pedrotallagalla.

DISCOMYCETES

Paucissimi fungilli ex hoc ordine extantes in collectione Beccariana vix tute determinandi, quia eorum fructificatio omnino deest vel nimis saltem se exhibet imperfectam. Specimina insuper valde misera.

Peziza (Discina) sarmentorum, B. Br.

Pedrotallagalla.

— **(Geopyxis) Hindsii,** Berkl. var. Beccariana, Nob.

Cupula ultra-pollicaris patellaeformis, margine tenui ciliolato ciliis caducis, stipite semiunciali tenui suffulta; tota glaberrima, concolor, colore melleo.

Lignicola.— Tenuitate stipitis, superficie levi, colore tam disci quam cyathi melleo (in sicco) differt a descriptione typicae formae apud cl. Berkeley in Lond. journ. of bot. I, p. 450.

Ceylon.

— — **crocina,** Mtgn., syll. 186.

Singapore; jun. 1865.

— **(Helotium) lenticularis,** Bull.

Ceylon, ad Pedrotallagalla.

— — **epiphylla,** Pers.

Nisi prioris forma omnino sessilis et tenuior?

Sarawak.

Peziza (Niptera) cinerea, Batsch.

Pedrotallagalla.

Peziza (Dasyscypha) simillima, B. Br. fung. Ceyl. p. 105.

Sarawak.

Helotium agaricicola, B. Br.?

Specimen inane.

Ceylon.

Cyphella scariosa, Nob.

Cupulae minutissimae helvolae subiculo tenuissimo concolori fugaci stipatim insidentes, membranaceae scariosae. Basidiosporam certissime vidi. Ad corticem Monocotyledoneae *Hysterio* indeterminato adsociata.

Sarawak.

Ascobolus leiocarpus, B. Br. Journ. Linn. Soc. XIV, p. 109.

In fimo bubalino.

Ceylon.

— **sp.,** nondum rite determinata.

In fimo bubalino.

Ceylon.

— **cenangioides,** Nob.

Cupulae gregariae, 1 — 1 $^1/_2$ mill. latae, margine involuto, extus ferrugineae, disco brunneo, glabrae. Sporidia fere opaca, nigrescentia, levia mihi visa, oblonga, e latere paullisper curvula, obtusissima, 9-10×3-4; paraphyses numerosissimae filiformes vix sursum incrassatae obscure septatae.

E serie Lignicolorum, parasiticus in *Xylaria cupressiformi*.

Sarawak.

Patellaria? Tympanis?

Tota aterrima, erumpens per greges lineares e ligno, primitus turbinata clausa, serius patellaris margine incrassato interdum crenulato. Fructificatio ascospora compacta, sed caeterum incerta. Spora una alterave in lucem prodiit ex typo *Diplodiae*; et tunc eorum memini, quae de *T. Ligustri* citat Cooke (*Handb. of Brit. Fung.* II, p. 723): « *In the same hymenium the fruit of a Diplodia and that of a Tympanis were present* ».

Etich River in ditione Sarawak.

Tympanis vermicularis, Nob.

Caespites nigrescentes, usque 6 mill. diametro, *Myriangium* sat bene revocantes. Perithecia sub-carnosa stromate discoideo tenui applanato nunc circinnatim, nunc gregatim

emergentia, obverse pyriformia, nonnunquam compressiuscula, millimetrum et semis alta, e purpurascenti brunnea, sub lente minute granulosa s. pulverulenta, ostiolo punctiformi impresso; nucleo pallidiori. Asci longe pedicellati, e cylindraceo clavati, 32-34/500 mill. longi, tetraspori; sporidia vermicularia, saepius uno alteroque fine redunca, pluriseptata, hyalina, 12/500 mill. long. — Ad lignum decorticatum.

Sarawak.

GASTEROMYCETES

Hymenophallus indusiatus, Cda Icon. V. 73 tab. VIII, fig. 51. — *Dictyophora speciosa* Mey. apud Klotzsch. Nov. Act. Cur. XIX. suppl. I, 339, tab. VI forma peridii apiculati differt. Certe iconi *Phalli Daemonum*, Rumph. non respondet.

Ceylon: H. B. Paradenya.

— **roseus**, Nob.

Pollices quinque circiter altus. Volva ovato-conica, squamuloso-pilosa, vix lobata. Stipes cylindraceus albus. Pileus ovatus, lacunoso-cellulosus, sporidiorum massa e viridi lutescente oblinitus, vertice pervio. Indusium roseum, infra pileum exoriens (ut in *Dictyophallo bicampanulato* Montg.) et usque ad volvam fere descendens, retis interstitiis rotundis amplis. — Ad iconis simulacrum notis concomitatum auctore egr. Beccari.

Matang? 3 febr. 1866.

Mutinus? borneensis, Nob.

Totus digitum altus, tres v. quatuor lineas crassus; receptaculo conico, impervio(?), cum stipite albo continuo, transversim ruguloso, sanguineo. Volva ovoidea, persistens, alba. — Foetidissimus.

Matang, jun. 1866.

Ex icone Beccariana, adjectis notula et specimine exsiccato quoad receptaculum minus completo.

Splanchnomyces luteus, Cda.

Sarawak.

Cyathus byssisedus (Jungh.), Tul. ann. sc. nat. 1844, I. p. 71.

Sarawak, ad Mattang; jun. 1866.

Tulostoma pusillum, Berkl?

Rigidum, corneum, 18 millim. altum, badium, indumento furfuraceo luteo detergibili in peridio verruculas fingenti obductum. Stipes 14 millim. longus, vix ultra dimidium crassus, setulis rigescentibus undique exasperatus, sensim in peridium globosum, 4 mill. diametro metiens, vertice minute mammillato, abiens. Cavitas diaphragmatibus pelliculosis percursa. Sporae subangulosae, 00015. Habitu *Tulostomatis exasperati*, Montg., sed triplo minus.

Sarawak, m. aug. 1865, ad ramulos.

Lycoperdon pusillum, Bull.

Ceylon: Peradenya.

— **scrobiculatum**, Nob.

Parvulum, magnitudinis et faciei *Lycogalactis epidendri*, ad culmos putrescentes. — Subsphaericum, badium, scrobiculatum; intus sporidiorum gleba fusca fere ex toto repletum; basi sterili inconspicua. Sporidia globosa, levia, luteola, nucleo centrali obscuriori; 0,00005. Nonne status juvenitis *L. alveolati*, Lév?

Sarawak.

Scleroderma columnare, B. Br.

Sarawak.

Alterum specimen adest, jam effoetum et mihi paullisper incertum, extus intusque citrinum. e Sarawak.

— **anomalum**, Nob.

Stipitatum, stipite lignescenti solido extus lacunoso. Peridium extus (in sicco) umbrinum, adpresse squamulosum, intus lutescens, coriaceum. Gleba umbrina. Sporidia granulata, globosa; 00003.

Gunong Poe.

Stegasma pallidum, Nob.

Peridia gregaria pallidissime alutacea. Sporae flavae sed pallidiores, quam in *Stegasmate australi* nostro, cujus peridia e fulvo castanea in omni vitae stadio, sporaeque intense aureae, a praesenti speciem distinguunt.

Sarawak.

Geaster minimus, Schw.

Specimen miserum, *Sphaeroboli* adspectu, vix tute, nisi comparatione, determinandum.

Sarawak.

Husseia insignis, Berkl. Lond. journ. of bot. vol. VI, 1847, p. 508, tab. XVIII, fig. 3.

Sarawak.

Husseia pachystelis, Nob. — An H. insignis var?

Peridium duplex: exterius sessile, crassum, coriaceum, leve, glaberrimum, tandem reflexum, lobatumque; — interius globosum, papyraceum? *stipite crasso columnari intus cavernoso* suffultum, ore mammoso stellatim fisso dentibus conniventibus. Color? — Gleba sporifera totum peridium replens in fungo juvenili vel adhuc clauso; Columellae nullum indicium. — Peridii externi aperti diameter 2-3 pollicaris, interni pollicem non adtingit. Stipes sesquipollicem altus, dimidium crassus. — Ad iconem Beccarianam.

Sarawak.

Mitremyces Junghuhnii, Schldl. et Müll. bot. Zeit. 1844, Vol. II, p. 401, tab. III.

Gunong Poe: m. aug. 1866.

Trichocoma paradoxum, Jungh. Fl. crypt. Javan. p. 10, fig. 7.

Rambode.

Lycogala? Vix determinandum.

Sarawak.

Arcyria punicea, Pers.

Sarawak.

Enteromyxa cerebrina, Nob. Gen. nov. pr. interim.

Mycelium plasmodicum xylostromoide papyraceum nitens stratosum pallide-alutaceum, ramulos et frustula lignea mucida involvens et undique penetrans, tandem superficie tuberculis obsitum, nunc singulis, nunc seriatim dispositis, nunc omnino applanatis confluentibus, plerumque Pisi magnitudine, anfractibus cerebrinis notatis, gleba helvola sporarum repletis. Sporae simplicissimae, globosae $^{1}/_{5000}$ mm.; nucleo nullo; capillitio nullo intertexto.

Sarawak, 1865.

PHACIDIACEI

Phacidium dentatum, Fr.

Vix aliena species censendum, etsi fructificatio senio obsoleta ascos sporidiaque rite distinguere non concesserint.

Sarawak.

Hypoderma pusillum, Nob.

Erumpens, minutum, sparsum; perithecia ovalia, turgida, nigra, obtusiuscula; labiis crassis, disco pallido, nucleo albido. Asci cylindracei, 80×6; sporidia e cylindrico curvula, sordide viridula, 12×5; paraphyses capillares ad apicem paullisper incrassatae, fuscellae.

Ceylon.

Lophodermium sp.

Sarawak, Singapore.

— sp.

Ceylon.

Neutrum rite determinandum, quia utrumque discum inane praebet; foliorum coriaceorum incolae, peritheciis ellipticis, in priori specie magis obtusatis, arcte clausis, labiis subtilissimis fere in cristam elevatis. Tertia species adest, quoque e Sarawak, foliicola, peritheciis minutis subrotundis brunneis nitidis, omnino vacua et sedis valde incertae. Aequo jure Phacidium diceres.

Angelina Beccariana, Nob.

Ad Monocotyleae cujusdam ignotae petiolum ni fallor.—Perithecia erumpentia, sparsa; singula interdum connata; 1 — 1 $^{1}/_{2}$ mill. longa, e brunneo virentia, opaca, levia, plus minus flexuosa apicibus acutis, turgida, labiis introflexis, disco brunneo. Asci lineares, graciles, 60×6, sporidia arcte amplectentes; paraphyses ascos superantes, capillares, adglutinatae, apicibus crassioribus coloratis; sporidia difformia, uniserialia, cylindrica vel subclavata, recta vel curvula, continua vel pluries constricta, opaca, triseptata, $12 — 15 \times 5 — 6$ lat.

Ceylan.

Hysterium serpens, Nob.

E cortice erumpens. Perithecia stipata, linearia, obtusa, flexuosa, opaca, nigra, levia. Asci subclavati, $^{30}/_{500}$ longi tetraspori; sporidia biserialia, cylindracea, utrinque obtusa, leniter curvula, viridi-fuscella, triseptata, $^{1}/_{500}$ longa.

Sarawak.

— **Berkeleyanum**, Nob.

Stipiti marcescenti monocotyleo innatum, peritheciis sat confertis, $^{1}/_{2}$-$^{2}/_{3}$ mill. longis ovalibus, convexiusculis, nitidis, brunneis, rima aequali et marginibus levibus hiantibus. Fructificatio jam ejaculata.

Sarawak.

Aylographum vagum, Lib.

Fructificatio nulla.

Ad corticem spinescentem caulis filicini.

Ceylan, ad Nuwara Ellya.

— **spilomoide**, Nob.

Peritheciis ovali-linearibus in maculas atramentosas congestis, aliis (spermogoniis?) punctiformibus immixtis. Contextus pachydermaticus. Epiphyllum in foliis coriaceis arboris ignotae. Fructificatio nulla distincta.

Sarawak.

PYRENOMYCETES

Torrubia myrmecophila, (Ces.) Tul.

In exuviis *Coleopteri* cujusdam.

Sarawak.

— **gentilis**, Nob.

Entomophyta ad *Sphecoidem* quemdam. Stipes 2-3 pollicaris probabiliter varians ex situ matricis altius vel profundius inter quisquilias sepultae, filiformis, flexuosus, nigrescens, levis, glabratus, in clavulam abiens cylindraceam, centimetrum et dimidium longam, duo millimetra crassam, acutiusculam, pallidissime alutaceam, levem, ostiolis obscurioribus punctiformibus notatam. Fructificatio ignota quia nimis immatura.

Sarawak, ad Gunon Balan. Majo 1867.

— **ophioglossoides**, (Ehrh.) Tul.

Sarawak.

— **Barnesii**, (Thw.) Nob.

In H. B. Peradeniae (Ceylon), 1865.

— **adpropinguans**, Nob.

Specimina hujus fungi nonnulla ex icone a cl. Beccari delineata, adjecta notula brevissima, *Hymenophalli* tunc e terra erumpentis parasitica fuissent. Clavulae caespitosae (nonne unica e basi ramosa?) certe evolutione abnormi irregulares, contortae, colore *T. militarem* omnino simulantes. Stipes brevissimus ad basim subvelutinus, pallide cinereus. Suspicio me tenuit, num de *Cordycipite larvata* (Montgn. syll. p. 200) agatur, quae ad cortices reperta fuit.

Sarawak, Mattang. 1866-67.

— **militaris**, (Fl. Dan.) Tul. Clavulae fragmentum e Borneo?

Hypocrea rhytidospora, Nob.

Sparsa, orbicularis, convexa, corrugata, ostiolis peritheciorum emergentibus granulata, colore e melleo brunnescente. Nucleus stromatis durus, in sicco corneus, flavidus; stratus corticalis pyrenophorus saturatius coloratus. Perithecia dense stipata, minuta, globosa ostiolis mamillatis paullisper protusis. Paraphyses legitimae nullae, sed asci sterilescentes hinc inde paraphysum faciem mentientes. Asci anguste cylindracei, 50×4, basi angustata. Sporidia octona, unica serie disposita, ovalia, episporio corrugato, flavida, 6×4. Ex cl. Cooke, 016—017×009.

Ad corticem et ad Polyporum quemdam in cortice effusum. — Singuli pulvinuli a 2-7 mill. metiuntur.

Sarawak, 1865.

Hypocrea gelatinosa, cum var. **umbrina** Fr. Ad ligna et cortices vetustos.

Pedrotallagalla (Ceylon); Sarawak.

— **rufa**, Fr.

Ceylon.

— **scutula**, Cooke in Grevillea, n.° 41.

In foliis *Myristicae* (ni fallor) omnino superficialis.

Ceylon.

Ad normam speciminis autenthici!—Specimina nostra sterilia exsudationis cujusdam resinosae imaginem reddunt.

Poronia Oedipus, Montgn.

Specimina graciliora, stromate compresso in individuis nonnullis.

Suasum mihi habeo, quod *Sphaeria* (*Cordyceps*) *pileiformis*, Berkl. in *Lond. Journ. of Botany*, 1842, vol. I, p. 155, tab. VII, fig. 6, ducenda sit ad *Poroniae Oedipi* varietatem *cladonioidem* meam in *Comment. Soc. Critt. Ital.* Vol. I, p. 70, tav. IV, fig. IV.

Sarawak.

Sphaerostilbe incerta, Nob.

Perithecia libera, globosa, fuscella; ascis cylindraceis octosporis, sporidiis oblongis, 10-12×5, obtusis, endochromate granuloso, non septatis. Conidiophora rigida, fuliginea, subulata, capitulum ochraceum sphaericum gerentia, e conidiis minutis, ellipsoideis, hyalinis, vix 1 $^1/_2$ longis constans.

Forsitan status *Sphaerostilbis variabilis?* sed apicula ad polos sporarum nulla videre contigit, neque septum.—Hujus forsan

loci *Nectria macrospora*, Becc., cujus solum nomen schedae, inter alias notulas vagantis, inscriptum reperi unacum adumbratione. Asci 8-spori late-clavati, sporarum ellipticarum 1-septatarum endochromate granuloso, nulla vero adjecta commensurationis indicatione.

Pedrotallagalla, in ins. Ceylon; ad ramulum non determinandum.

Nectria tabacina, Nob.

Perithecia minutissima, conferta, obovata ostiolo acuto, demum fusco-ochracea, collapsa. Asci nulli adsunt, sed tantum sporidia oblonga, 00025, obscure septata? hyalina.

Ad Polypori? frustula.—*Nectriae pezizae* haud dissimilis. Vix *N. suffulta* BBr.

Ceylon.

— **haematococca**, B. Br.?

Perithecia, jam evacuata, contextum laxe vesiculosum sanguineum exhibent. — Cl. Beccari observaverat sporidia oblonga, utrinque obtusa, medio constricta, uniseptata, unica serie ascis lineari-cylindraceis inclusa. Dimensiones ignotae.

Sarawak.

— **cinnabarina**, Fr.

De *N. pytirode*, Montg. suspicatus sum, quae autem ascos clavatos 4-sporos gerit, sporidiaque magis cymbiformia.

Pedrotallagalla in ins. Ceylon.

— **sanguinea**, Fr.?

Imperfecta; aeque dici posset *N. episphaeria*, Fr., sed sporidia mihi continua visa sunt.

Ceylon.

— **myriadea**, Nob.

Perithecia minutissima, conferta, ovata, demum collapsa, pallide aurantia, tenuiter granulosa. Asci lineares, 0018 longi. Sporidia oblique monosticha, naviculaeformia, continua, 1-guttulata, 5×3. Secundum mensuram Cookii = 016×008.

Ad lignum nudum.

Ceylon.

— **coccinea**, Fr.

Sarawak.

Xylaria massula, Nob.

Xylariae cupressiformi aliquantulum similis. Clavulae gregariae, dimidium centimetrum ad summum altae, ovatae in stipitellum abrupte attenuatae, obtusae, rugosae, atrae. Asci lineares, sporidiis cymbiformibus alternatim versis, uniseriatis, utrinque obtusis, continuis, e virenti fuscidulis sub-opacis, 8×5.

Sarawak, ad Mattang; in corticibus et ligno denudato.

Xylaria Rhizomorpha, Montg.

Sarawak, ad Mattang.

— **acicula**, Nob.

Sparsa in petiolis foliisque coriaceis exsiccatis, stipite capillari 1-3 centimetra alto glabro, abrupte abeunti in clavulam globosam, vel obovatam vix millimetrum et semis diametro metientem, asperitatibus obsitam, atram. — Fructificatio ignota.

Sarawak.

— **aristata**, Mtgn.

Sparsa, in foliis coriaceis insititia. Stipes simplex, e basi parum crassiori filiformis, ultra pollicem et dimidium longus, rigidus, interdum paullisper flexuosus, desinens in clavulam oblongam, 3-4 mill. longam, $2^1/_2$ crassam, ostiolis exasperatam, mucronatam. Totus fungus umbrinus, glaber, levis.—Fructificatio nulla in speciminibus nostris.

Sarawak.

— **phyllophyla**, Nob.

Abunde paginam utramque foliorum arboris mihi ignotae obsidens. Stipes pollicem usque pollicem et semis longus, filiformis, ater, glaber, in longitudinem striatus. Clavula tenuis, cylindracea, dimidii centimetri usque centimetrum et ultra longa, umbrina, torulosa, apiculata, immo aristata.

— An *A. Phyllocharis*, Mntg.?

Sarawak, Mattang.

— **axifera**, Mtgne?

Senio evacuata, hinc paululo incerta.

Sarawak.

— **dichotoma**, Kze.

Sarawak.

— **caespitulosa**, Nob.; an H. scopiformis var.? Dense caespitosa, caespitibus pollicem altis e stipite basi ramoso, ramis erectis vel adscendentibus filiformibus, compressis, in clavulam tenuem cylindraceam torulosam apice sterili producto desinentibus. Tota brunnea glabrata. Sporidia ex Cookio 012×0035.

Ex mente cl. Berkeleyi ad verum *H. scopiformem* reduci posset: dissentit cl. Cooke.

Sarawak.

Xylaria scopiformis, (K z e) F r. var. elatior.

Clavulis elongatis crasse torulosis.

Ceylon.

— **rhizocola**, M t g.

Individuum singulum, *X. Guepini* habitu et colore haud improbe referens. Perithecia sparsa, protuberantia, minuta, globosa, atra; nucleo ex megmate hyphoideo (ascis abortivis?) hyalino constitutò.

E radice herbae cujusdam adsurgit stipes teres, brunneus, opacus, in longitudinem striatus, tres pollices altus, totidem millimetra crassus, sensim in clavulam subpollicarem lanceolatam compressiusculam obtusam cervinam ex ostiolis punctiformibus nigro punctatam abiens. Clavula itemque stipes intus albidi.

Sarawak.

— **exalbata**, B. B r.

Iunior tota albido-pruinosa, clavulis intus cavis, saepius sulco mediano in longitudinem bipartitis.

Ceylon.

— **gigantea**, (Z i p p. mss. L é v.), N o b.

Clavulae ultra tres pollices longae, dimidium crassae, quandoque, dum compressae fiunt, usque pollicem latae, in stipitem brevissimum attenuatae, caeterum cylindraceae, vel linguaeformes, vel clavatae, semper obtusae; fulvae ostiolis obscurioribus punctatae; senio nigrefactae longitudinaliter lacerantur et cavas se praebent. Stroma albidum.

Sarawak, ad Mattang; jun. 1866.

— **allantoidea**, B k l,

Sarawak.

— **intermedia**, N o b.

Hinc *Xylariae massulae*, N o b., illinc *Hypoxylo pauxillo*, N o b., forma adproximans. Sporidia $= 3 \times 2$. — Pulvilli irregulariter globosi, 2 mill. diametro, atri, superficie rudi, intus albidi, compacti.

Sarawak a Kutein.

— **plebeja**, N o b.

Haud dissimilis a *X. digitata* pro qua primitus eam habui; nunc, monente cl. B e r k e l e i o, distinguo. Media intercedit dictae speciei et X. *polymorphae*. — Plus minus caespitosa, curta, pollicem et semis alta, clavulis compressis rudibus', lacunoso-rugosis, nunc simplicibus, nunc digitatis, peritheciis stipatis ostiolo obtuso prominente. Fructificatio ob aetatem nimis provectam ignota,

Sarawak.

Xylaria complanata, N o b.

Tres pollices alta, ad basim interdum ramosa, brunnescenti nigra, glabra, stipite brevissimo; clavulis utrique attenuatis, complanatis, tortis, peritheciis stipatissimis ostiolo obtuso prominentibus. Eheu! specimina nimis evoluta, evacuata.

Sarawak.

— **Hypoxylon var. mucronata**, B e r k l.?

Stipite glabrato (et altiori) reapse differret a speciminibus cl. Auctoris; sed singulum individuum e tribus mecum benevole communicatis quoque glabrescens se praebet. Sed forsitan semper forma *X. scopiformis*.

Sarawak.

— **polymorpha**, G r e v.

Ceylon; Sarawak.

— **fissilis**, N o b.

Caespitosa, clavulis nigrescenti brunneis, linearibus, duas uncias altis, quatuor usque quinque millimetra latis, stipitatis, torulosis et transverse rugosis, obtusis, saepius longitversum sulco dimidiatis. Stroma carbonaceum, intus secernibile filamentosum. Perithecia brunnea, depresso-globosa, ostiolis vix prominulis. Sporidia, ex Cookii sententia $= 02 \times 005$.—Ad ligna muscosa vel putrescentia.

Sarawak.

— **rhopaloides** (M n t g n.) B e r k l! ad specimen humanissime communicatum.

Ceylon; Peradenya.

— **Gardneri**, B e r k l.

Ceylon; im H. B. Peradenya 1865.

— **melanaxis**, N o b.

Sparsa, nigra, quatuor usque quinque pollices alta, pro 2 $^1/_2$ ad stipitem saepius tortuosum, pro residuo ad clavulam spectantes. Stipes angulosus, glaber, nitens, sensim in clavulam abiens cylindraceam, obtusam, longitudinaliter rugosam, ostiolis emergentibus exasperatam. Stroma extus carbonaceum, intus fuscescens, axi filiformi nigro percursum.

Sarawak.

Xylaria Guepini (Fr. el. II, 59 sub Sphaeria), in Comm. Critt. I, p. 74, tab. V.

Ceylon, in H. Peradenyae; Sarawak. Pro maxima parte sterilis: ramosa, colore carneo.

— **corniformis**, (Fr. l. c. sub Sphaeria), Montg. Conidia, monente cl. Berkeley in literis, minora quam in speciminibus britannicis.

Ceylon, Sarawak.

— **cupressiformis**, (Fr. ut supra) Fr. — Cl. Berkeley monet speciminum nostrorum sporidia jure ampliora esse. Nonnullis clavulis *Ascoboli* n. sp. insidet.

Sarawak.

Hypoxylon chalybaeum, Berkl! fide speciminis ab ill. Auctore humanissime, simul ac aliis complurimis, communicati.

Synonymon certissimum exhibet *Rosellinia nitens* nostra (Note botaniche di vario argomento. Napoli 1872, p. 13, in Act. Acad. Scient. Physicar. et Math. Neapol. Ser. alt. Vol. V, N. 21), de qua, in diagnosi ad specimen imperfecte evolutum quoad organa reproductionis, ut sequitur scribebam: « Membrana weigeliana brunnescens, glebam albidam includens e filamentis mu- « cilaginosis hyalinis granula minutissima « 1-seriata foventibus simplicibus laxe in- « tertextis efformatam. — Ascorum spora- « rumve nulla adumbratio; nulla attamen « ratio mihi elucet cur de genere ferendum « sit dubium: specimina, quae subjacent, pro « forma pycnidica habeo speciei perbelle in « posteris distinguendae » — Cl. Cooke in specimine ipsi communicato sporidia deprehendit: 008 — 0012 × 0045.

Caeterum et in praesenti nitidum hunc pyrenomycetem pro vera *Rosellinia* habeo, propterea quod subiculum tenuissimum pulveraceum vel velutinum cui perithecia insident, nullimode stromati compacto carbonaceo vel suberoso vel denique lignoso Hypoxylorum comparari queat, imo neque compagi densae tomentosae alias Rosellinarum species involventis simile se praebeat. Erit hinc mihi semper *Rosellinia nitens* (nomine specifico prioritatis jure, ni fallor, gaudenti), tribus distinctis formis se offerens;

a) typica, peritheciis majoribus in glebas effusas coalitis, singulis hinc inde sparsis. (Syn. Hypoxylon chalybaeum B. Br.!)

b) congesta: peritheciis in acervulos convexos (e 7-8 individuis constantes) coalitis; facie magis hypoxyloidea;

c) minor: peritheciis dimidio minoribus arctius coacervatis et subiculo densiore obvallatis. Simillima *Hyp. marginato*. et *H. annulato*, sporidiorum dimensionibus differens. Specierum nostratum *H. Michelianum* Ces. et DN. in Erb. Critt. Ital. ed. I, N.° 783, ed. II, N.° 145; Rabh. fung. Eur. N.° 637; DN. sfer. ital. p. 16, N.° 13, tab. XIII, fungi polynesiaci imaginem reddit.

Hypoxylon microsporum, Nob.

Pulvinuli nigri, opaci, late effusi, minuti 3-4 mill. lati, rarius confluentes, orbiculares, depressi, peritheciis 10-20 minutissimis nisi ostiolis punctiformibus emergentibus. Asci lineares, $^{10}/_{500}$ long.; sporidiis monostichis, ovoideis opacis $^{1}/_{500}$ longis; ad Cookii mensuras = 006 — 007 × 003$^{m/m}$. — Ad lignum nudum durum.

Sarawak.

— **Pseudo-tubulina**, Nob.

Acervuli atri, e subiculo concolori tenui hypophloeode per corticem ramorum, ad arborem mihi ignotam spectantium, erumpentes, Sphaeriam e serie Connatarum (Fries olim), putes *Sph. serpentem* vel *confluentem*, sat bene sistunt. Singulae glebae applanatae, circumscriptae, elongatae, obtusae, saepius rimosae magisque sensu longitudinis, omnino *Tubulinam* praemature exsiccatam referunt. Sporidia ex Cookii mensuris 035×013$^{m/m}$; me fugit fructificatio.

Sarawak.

— **marginatum**, Schw. fide speciminis Berkeleyani! Exemplum vero ex I. B. Ellis. fung. amer. exsicc. mutuatum longe differt.

Sarawak.

— **stigmoideum**, Nob.

Glebae tenues, complanatae, determinatae, nigrae, e cortice erumpentes, ostiolis latentibus. Sporae ovoideae, utrinque obtusae, 5×2. Ad corticem mollem, pseudosuberosum.

Sarawak.

— **glebulosum**, Nob.

Stromatis effusi vix vestigium. Tubercula stipata et stipitellata, e grani cannabini ad pisi magnitudinem, umbrina, levia, glebulosa

e peritheciis amplis globosis protundentibus; ostiola e conica basi punctiformia nitida. Asci anguste clavati, $^{35}/_{500}$ longi, sporidia includentes octona, biseriatim disposita, lanceolata, dissimetrica, interdum curvula, opaca, 12×5—6 (Cookio sunt = 03—032×0075^{mm}). Tuberculorum substantia alutaceo-albida; stipitellus haud raro obsoletus.

Primitus pro varietate *apoda Hypoxyli coenopi* (Berkl. Linn. Soc. Journ. of Botany, vol. XIV, p. 120) nostrum fungillum determinaveram; fructificationis characteres dissuaserunt. Omnimode inter dictam Sphaeriaceam et *Sphaeriam (Hypoxylon) Clavus* Fr. (Linnaea 1830, vol. V, p. 543) inserenda erit. — Ad corticem vetustum.

Ceylon, ad Pedrotallagalla. m. majo 1863.

Hypoxylon serpens, Fr.

Sarawak.

— **approximans**, Nob.

Precedenti, cujus forsan varietas minor, simplicior, valde affine, differt tuberculis magis applanatis sessilibusque, ostiolis minime exertis, ascis 45-50/500 longis, sporidiis uniseriatis spadiceis irregulariter lanceolatis, obscure binucleatis.—Ad cortices vetustos.

Singapore; Sarawak ad Etich-River.

— **Avellana**, Nob.

Globosum, laeve, nigrum, a pisi ad avellanae majoris magnitudinem, peritheciis globosis periphaericis atris. Stromatis stratum corticale tenue sed sat durum, corneum fere; extus nunc glabrum, nunc pulverulentum, sed minime rugosum (hinc a *Sphaeria globosa* Sprgl. diversa species); intus suberosum ex alutaceo albidum. Perithecia ab invicem dissita, parum numerosa, ostiolis ad stromatis superficiem vix conspicuis punctiformibus. Asci lineares, 004 longi, paraphysum loco mucilagine plus minus hyalina interposita, sporidiis uniseriatis, opacis, navicularibus, utrinque acutis, 8-10 × 3; ex Cooke = 035 × 01^{mm}.

Sarawak.

— **fragaria**, Nob.

Memorabilis species! Glebosa, sparsa, singulis glebis a pisi ad majoris avellanae magnitudinem, nunc omnino sphaericis ad basim parum contractis, nunc basi applanata ad cortices adfixis, tuberculoso-rugosis, umbrinis brunneis vel atris, saepe rore vel pulvere laetius colorato velatis; ostiolis papillaeformibus atris quandoque emergentibus. Stroma durum intus nigrescens, fere ex toto a peritheciis repletum. Perithecia magna, imo ubi pauciora adsint maxima, minoris nempe pisi magnitudine, pyriformia vel globosa, ex mutua compressione obtuse angulosa, pellicula fibrillosa sericea umbrina induta; parietibus crassis carbonaceis; intus hyphasmate quodam luteolo farcta, inspersis sporidiis maximis (12-14×7-8) cylindraceis utrinque obtusis, nigro-brunneis, subopacis, ascorum vestigiis nullis! Conferendum cum *H. macrospermo* Mntgn.

Ceylon ad Pedrotallagalla; Sarawak.

Hypoxylon coenopus, (Fr. Linn, 1830, vol. V, p. 342, sub Sphaeria Montgn. cum var. apoda Berkl.

Sarawak.

— **pavimentosum**, Nob.

Glebae difformi-orbiculares depressae, in crustam effusam applanatam stipatae, tuberculosae, ostiolis subtectis nigro punctatae, intus concolores, Ascos ob maturitatem speciminum nullos perspexi. Sporidia illis praecedentis speciei facie et dimensionibus (usque 17×4-7, ex Cooke 05×009^{mm}) similia. Ad cortices.

Sarawak: 1865.

— **pauxillum**, Nob.

Glebulae pusillae, e peritheciis 5 vel 6 (ubi plura adsint biseriatis), stromate atro nitenti tenuissimo obvolutis, tuberculosae, applanatae, intus albidae, puncto centrali matrici (ligno mucido) adfixae. Fructificationem non vidi.

Sarawak.

— **Clavus** (Fr. l. c. p. 543 sub *Sphaeria*?
Perpauca individua exoleta et diffracta.)

Ceylon, in H. B. Peradenyae.

— **micropus** (Fr. l. c. p. 542 sub *Sphaeria*)?
Pycnides.

Sarawak.

— **deustum**, Fr.

Ceylon ad Pedrotallagalla; Sarawak.

— **cohaerens**, Fr. var. tenuior.
Ad Polyporum effusum contabescentem.

Sarawak.

Hypoxylon coelatum (Fr. l. c. p. 540).

Vix pro alia specie sumere possem, si contextum stromatis considerem, compagem lacunarum cylindricarum vel anguste clavatarum *verticalium* sistentis, ut facile tibi fingas ipsissima perithecia prae oculis habere. — Glebarum moles conspicua, dum nonnullae diametrum trium pollicum, et quod superest, attingant. Iuniores velo rubiginoso obtectae; intus fibrosum contextum ima basi ostendunt, cui cellulosa strata superstruuntur, atra, nitentia. Plura specimina adultiora *Hypoxylon repandum* vertice concavo marginato simulant. — Sporidia 14 × 004.^{mm} ex Cooke in litt.

Sarawak.

— **macrocenangium**, Nob.

Tubercula a matrice ignota soluta *Cenangium* quoddam dimensionibus insigne in mentem revocant; applanata, orbicularia vel elliptica; pollicaris diametri, margine rotundato sterili distincto, disco depresso aequabili ostiolis vix conspicuis punctato, colore pyreniorum Coffeae adustorum; obscuriori fere atro in disco. Stroma intus concolor, gleba peritheciorum difformium stipatorum discreta, compagem verticaliter lamelloso-cellulosam sistenti, strato crustaceo involuta. — Fructificationem spermogonicam tantum detegere licuit in speciminibus nimis adultis. Cooke sporidia reperiisse indicat singula, metientia 006×003.^{mm}.

Sarawak.

— **comedens**, Nob.

Tubercula, penitus *Nummulariae* facie, fossulas ab ipsius pyrenomycetis prostromate excavatas replentia, ovalia vel elongata, rarius difformia, 1/3-3 pollices longa, vel confluentia convexa, plano marginata, a basi solubilia (dimidiata), et tunc superficiem internam planissimam, e basi peritheciorum magnorum crassiorumque disrupta, grosse occellatam ostendentia; — extus nigra, albo-pruinata si zonulam marginalem demas. Fructificatio neque mihi neque Berkeleyo obvia; ex cl. Cooke sporidia obtulit: 02 × 008.^{mm} — Comparandum cum *H. exsurgenti* Mtgn.

Sarawak.

Hypoxylon udum, Fr.

Singapore; Sarawak (Etich River).

— **deciduum**, B. Br. Journ. Linn. Soc. XIV, p. 120.

Bintula.

— **tormentosum**, Nob.

Effusum, tenue, subareolatum, peritheciis ovatis v. conoideis vertice emergentibus, ostiolo acutiusculo, sed omnino carbonaceis sterilescentibus. Colore, compage, toto habitu comparandum gregi *H. serpentis*, *confluentis* et affinium, e quibus, quoad characteres exteriores, jam differt peritheciis ex dimidio emergentibus acute ostiolatis.

Sarawak.

— **pithodes**, Berkl.

Rambode (Borneo).

— **anthracodes**, Mtgn.

Sarawak, ad Rambode.

— ? **gangraena**, Nob.

Tubercula confluentia, gyrosa, ramulos ambientia praecipue ad axillas, e stromate sterili pulverulento efformata, illud *Hypoxyli fusci* vel congenerum sterilescentia colore et velo pruinoso simulantia. Intus aterrima, compacta, cultro sat dura.

Sarawak.

Hypomyces chromaticus, Berkl.? Journ. Linn. Soc. XCV, p. 113.

Petiolos plantarum lignosarum ambiens; colore aurantiaco extus intusque alliciens, sed sterile. — Numne potius *Epichlöes* sp.?

Sarawak.

Valsa ceratophora, Tul.?

Characteres exteriores sat congruunt, fructificatio imperfecta.—Ad ramulos hypophloeodes, pustulata, ostiolis arcte connatis elongatis nitentibus.

Ceylon, ad Pedrotallagalla; majo 1865.

— **assimilis**, Nob.

Nostrati *Diatrypi decorticanti* comparanda, pustulis minoribus, ostiolis parce e disco luteo emergentibus. Fructificatio pycnidica. — Ad corticem vetustum.

Pulo-Pinang.; maj 1865.

Melogramma Cinnamomi, Nob.[1]).

Tuberculis erumpentibus, globosis, extus rubiginosis ostiolis nigris punctiformibus,- intus nigris; ascis tenuibus subclavatis demum linearibus $^{45}/_{500}$ longis, sporidiis uniseriatis ellipticis $^{5}/_{500}$ longis fuscellis uniseptatis.

*

[1]) Genus rectius *Melanogramma* dicendum.

Facies *Hypox. fusci.* — Ad corticem Cinnamomi.
Ceylon ad Kandy.

Cucurbitaria insularis, Nob.

Late effusa, stromate tenui anthracino. Perithecia dense stipata, globosa, serius collabentia, aterrima, nitida, ostiolo obliterato. Asci nulli reperti. Sporidia hyalina vel pallida, pupaeformia elongata 22 × 6, plurilocularia cellulosa. — Ad corticem.
Sarawak ad Mattang.

Aglaospora Beccariana, Nob.

Cortici insidens, sparsa, minuta, hemisphaerica, atra, glaberrima, ostiolo punctiformi. Asci lineares, pedicellati, $^{5}/_{500}$ longi, octospori, sporidiis uniserialibus ellipsoideis, utrinque apiculatis 10 × 6-7, diaphragmatibus quatuor occellatim septatis.

Sphaeria Beccariana, Nob.

Caulicola; disseminata, cortici insculpta; peritheciis ex ovato conicis in ostiolum elongatum exeuntibus, mediae magnitudinis, nigris, opacis, crustaceis. Asci primitus clavati utrinque angustati, demum lineares, 70-70 $^{1}/_{2}$ × 6, sporidiis octo biserialibus cylindraceis lunulatis, e latere curvo in serie invicem prospicientibus, fuscellis, triseptatis, 18-20 × 4-6; paraphyses nullae.

In stratu subepidermico caulium marcescentium Nipae.
Sarawak, 7 m. aug. 1865.

— **scabiens**, Nob.

Perithecia carbonacea, basi in epidermide nigrefacta matricis (calami cujusdam) nidulantia, brunnea, conica, 2/3 mill. alta, saepius transverse lineata, opaca; ostiolo punctiformi, deciduo. Asci? Sporidia fusiformia, apicibus productis, curvula, triseptata, fuscescentia; articulis intermediis saepius pallidioribus et incrassatis, ad septum medium constrictis: 15 × 2 $^{1}/_{2}$. Membrana Weigeliana brunneola.
Sarawak.

— **Leveilliei**, Mtgn.?

Incerta ob defectum fructificationis. Monente cl. Berkley ab ejus *Sph. Vesuvius*, pro qua primitus habui tamquam varietatem minorem, certe differt.
Ceylon.

Sphaeria bombardella, Nob.

Peritheciis catervatim congestis, erumpentibus, carnosis, brunneo-nigris, ex cylindraceo turbinatis, ad basim ex mutua pressione angulatis, vertice depresso, ostiolo papillari in areola pallida radiatim rugulosa. Nucleus albidus, gelatinosus, stylosporas adhuc indeterminatas excipiens. Sic mihi se praebuit; Berkeleyo sporidia septata bacillaria videre contigit.

E corticis rimis erumpens.
Sarawak.

— **alvear**, Nob.

Peritheciis sejunctim effusis in ligno nudo nigrefacto et indurato, e basi applanata insculpta formam alvearium antiquorum s. parabolicam sistentibus, magnis, brunneis, primitus, ut videtur, griseo-pulverulentibus, ostiolo papillari minutissimo pertuso, contextu carbonaceis, pulpa filamentosa viridescenti repletis.
Sarawak.

— **macrostomella**, Nob.

Macrostoma; dense stipata cortici vel ligno denudato insculpta; peritheciis globosis chartaceis nigris opacis, ostiolo mamillato platystomo. Asci cylindracei, pedicello longo filiformi praediti, $^{32}/_{500}{}^{mm}$ longi (pedicello incluso), sporidiis octo uniserialibus, oblique invicem accumbentibus, cylindraceis 8-10/500 longis, pluri-septatis.
Sarawak.

— **arundinacea**, Sow.

Sporidia exacte referentia formam *b* fig. 28 (stylosporam) tab. III, apud Fuckel *symb. mycol.* (p. 137), sed hyalina, et asci 4-spori mihi visi.

In arundine quadam incertae speciei.
Sarawak.

— **Sarawacensis**, Nob.

Villosa, interdum subiculo tenui e crustoso tomentoso insidens, dense stipata; peritheciis magnis globosis strigosis, ostiolo elongato cylindrico crasso flexuoso demum deciduo in areola depressa osculum orbiculare relinquenti. Ascos videre non licuit ob aetatem senilem speciminum; sporidia subvermicularia 10 × 3, triseptata, ad septa paullisper constricta, fusca.
Etich River, in ditione Sarawak.

Sphaeria regulina, B. Br.?

Perithecia minutissima, ovata, obtusa ostiolo impresso, insidentia subiculo intense brunneo ex hyphis dense septatis simplicibus constituto. Asci lineares, $^{25}/_{500}{}^{mm}$ longi, mox difflui. Sporidia curvula, tenuia, altero fine crassiori, hyalina turbidula simplicia (an guttulata?), 7-8 × 2 1/2. — Ad lignum denudatum.

Sarawak.

— **tingens**, Nob.

Inter fibras pallide purpurascentes ligni denudati erumpens, sparsa, peritheciis minutissimis, e basi applanata cubili insculpta compresso-ovalibus, ostiolo poriformi. Asci clavati, 27-30 × 6-7 longi, paraphyses mucilaginosae; sporidia octo biserialia, oblonga 7 × 2-3, immatura hyalina 3-nucleolata.

Sarawak.

Amphisphaeria Beccariana, Nob.

Sparsa, superficialis, cubili insculpta. Perithecia magna, ovalia, umbonata, nigrescentia, gibberula ita ut ostiola mentiantur complurium peritheciorum stromate compositorum. Substantia valde dura anthracina. Cavitas mihi semper una in conspectum venit tapezio e griseo albescenti farcta, glebam ascorum? arcte involventi. Asci ignoti. Sporidia fusca, compressa, 15 × 5-6, didyma, linguiformia, episporio lineolato vel plicato?

Ad lignum denudatum cariosum.

Sarawak.

— **enteroxantha**, Nob.

Perithecia sparsa, minuta, superficialia, obovata vertice depresso, ostiolo punctiformi, coriacea, brunnea. Nucleus aurantius. Asci longe stipitati, e cylindraceo clavati, acuti, 40-41 × 4-5 (cum stipite) paraphysibus filiformibus aequilongis obvallati, octospori, sporidiis uniserialibus, invicem accumbentibus, luteolis, fusiformibus, septatis et medio constrictis, utrinque in apiculum hyalinum brevem acuminatis, 10 × 2. — Post peritheciorum delapsum foveola aurantiaca in matrice superest.

Ad caulem lignescentem putridum.

Sarawak.

Gibbera borneensis, Nob.

Perithecia aggregata, ovata, vertice obtuso, ostiolo nullo (hinc ab *Amphisphaeria* recedens), atra, rudia, tuberculata, pilosa demum calvescentia, carbonacea. Asci numerosissimi (itemque paraphyses capillares illos aequantes), $^{20}/_{500}{}^{mm}$ longi, subclavati, in pedicellum aequilongum, capillarem, strictum sed flexilem, excurrentes. Sporidia linearia, utrinque acuta, uniseptata, ad septum obiter constricta, fuscella.

Ad lignum vetustate consumptum.

Sarawak.

Bombardia bertioides, Nob.

Late effusa in subiculo tenuissimo maculari, plagas nigras ad lignum decorticatum seu potius ad ambientem stratum peridermicum efficiens. Perithecia rugosa s. grosse granulata, brunnea, ovata, ostiolo vix prominente perforato; consistentia chartacea; intus alba. — Sporidia octona, biseriata, ex oblongo breviter cylindracea, leniter curvula, episporio tenuissimo, 13-18 × 8, simplicia, hyalina, vel turbidula, omnino conidia *Oidiorum* referentia, in mucilagine fibrillosa nodulis ignotae indolis immixtis natantia. Asci mox difflui nisi ex seriata sporarum dispositione divinandi.

Sarawak, 1865.

Forma altera adest decalvata, quam omnino pro statu senescenti habere liceat. Tertiam quoque formam magis abnormem prae oculis habeo, peritheciis irregularibus, turbinatis vel oblongis, in stipitellum passim attenuatis, sed sterilibus.

De genere *Bertia,* ad typum *Sphaeriae moriformis* Tode condito a cl. De Notaris, pauca animadvertere liceat. Auctor pyrenomycetis, de quo sermo est, *sporidia typice plurilocularia* tribuit (Comm. d. Soc. Crittog. Ital. Vol. I, p. 224): Fries concordat, dum ea septata vocat. Apud Fuckel *septum unicum* evadit; et notula sequens diagnosi adijcitur: «*Das Septum der Sporen scheint mir aber ein unächtes zu sein* ». Cooke, qui genus respuit, et speciem prisco nomine Todeano sub *Sphaeria* enumerat, quoque septum unicum ei agnoscit, eamque proxìmam facit *Sph. spermoidi,* de qua Fries observat valde propinquam esse generi suo *Bombardia:* et reapse pone sequitur *Sphaeria bombarda* apud Cooke (Fungi bri-

tann. p. 861), quae adligata pluribus speciebus sive antiquis, sive recentis creationis, totam seriem sistit ejus *Sphaeracearum denudatarum* (a p. 860-864). Pro adverso Fuckel trahit *Sph. spermoidem* ad genus *Leptospora*, adsociatam *Sph. ovinae* (Symbol. p. 143)! En quorsum ducit distinctio nimis subtilis partium fructificationis!

Rosellinia nitens, Nob.

Videas quae supra (p. 17) exposita sunt de vera sede ad mentem nostram hujus fungilli sub nomine Berkeleyano *Hypoxyli chalybaei* jam relati.

— **spadicea**, Nob.

Perithecia globosa, coffeina, pulverulenta, demum circa ostiolum glabrata, subiculo tenui velutino concolori stipatim insidentia. Ostiolum punctiforme minutissimum. Nucleus albicans. Asci jam reabsorpti. Sporidia ovalia e fronte, sub-cymbiformia e latere, fusca, 6×2.

Ad culmum Bambusae?

Sarawak.

— **hypoxylina**, Nob.

Perithecia minuta, globosa, opaca, ostiolo apiculata, subiculo carbonaceo indeterminato in crustam effusam concrescentia. Asci? Sporidia forma praecedentis, fusca, sed majora 7-7 ½×5.

Ad lignum decorticatum exesum.

Sarawak.

— **mammaeformis**, C D.ris ?

Etsi fructificatio desit, e speciminum de caetero optime evolutorum examine macroscopico, europaeis speciminibus comparatis, vix ratio adesset cur de determinatione dubium ferre licuerit. — Perithecia mammaeformia magna e subiculo granulari, passim evanido, emergentia, ostiolo minutissimo, levia, primitus umbrina, dein e castaneo nigra; pariete crassa carbonacea valde dura; membranula weigeliana brunnea, subdiaphana, grandicellulari.

Ad caudices cariosos.

Sarawak.

— **ignobilis**, Nob.

Ob speciminis conditionem sufficienter explorare non licuit, dubiumque subrepit numne aptius ad *Sordariae* genus, num ad *Sphaeriam* quamdam byssisedam inter plures a cl. Berkeleyo enumeratas ex insula Ceylonia, referenda esset.—Subiculum brunneum, e granulari tomentellum, tenue, effusum. Perithecia aggregata, minuta, globosa, asperula? ostiolo punctiformi. Asci lineares difflui, sporidiis uniserialibus, ut praecedentium specierum forma et colore, 4×2.

Ad lignum putrescentem, sordibus jam obrutum.

Sarawak.

Rosellinia Beccariana, Nob. (Note bot. di vario argomento in Atti della R. Accad. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli, vol. V, 1872, c. Icone).

Gudong aliisque locis ditionis. Sarawak, m. aug. 1866.

Sordaria pachydermatica, Nob.

Perithecia in macula nigricante effuse aggregata, parabolica, nigra, primitus scabra, serius praesertim ad verticem denudata, pariete crassa carbonacea. Ostiolum impressum. Asci lineares, sporidiis uniseriatis, elongato-ellipticis acutiusculis, simplicibus, fuscis, 5×2.

In ligno marcescente.

Etich River, ditionis Sarawak.

— **microspora**, Nob.

Sparsa, peritheciis conicis e basi passim oblonga, vertice pertuso; ascis subtilibus; sporidiis uniseriatis, ovalibus, fuscis, $^{25}/_{500}{}^{mm}$ longis.

Ad lignum nudum marcidum.

Ceylon, Peradenya.

— **grisea**, Nob.

Perithecia aggregata, maiuscula, ovoidea, cinereo-pulveracea, serius glabrata sed scabrida, nigra, in ostiolum conicum continua. Asci mox difflui. Sporidia ovalia, fusca, simplicia, guttula centrali sat conspicua; e basi truncata sat tute prima aetate caudata esse dicam, 9×5-6.

Ad fimum.

Ceylon, ad Pedrotallagalla, 1865, m. majo.

— **Sarawacensis**, Nob.

Perithecia ex hyphasmate subiculum sat tenax albescens constituente emersa, minutissima, atra, ovalia, in ostiolum acutum carbonaceum excurrentia, caeterum substantia minute vesiculosa.—Asci clavati tetraspori, sporidiis ovalibus utrinque obtusis, polo in-

feriori crasse caudato, $^{9}/_{500}$ longa (quorum $^{5}/_{500}$ appendicem ipsam spectant), $^{4-5}/_{500}$ lata.

In fimo (bubalino?)

Ceylon, Sarawak

Sordaria punctiformis, Nob.

Perithecia minutissima in subiculo crustaceo albicante, ovata, glabra, ostiolo vix conspicuo; contextu grosse vesiculoso. Asci... Sporidia late ellipsoidea, fusca, simplicia, guttula centrali, 8 × 7, ecaudata (an primitus?) Primo obtutu pro *Sordaria discospora*, Awd. (ap. Niessl. bot. Beitr. p. 42, seu *Hypocopra discospora*, Fuk. Symb. myc. Zweit. Nachtr., pag. 43), habueram. Conditio speciminum ceylanicorum rem rite eruere non concessit. Calvities peritheciorum in nostro fungillo ex senescenti ejus aetate peti posset. Forma sporidiorum in utroque congruit; dissentiunt dimensiones.

Ad terram stercore animalium inquinatam.

Ceylon, ad Pedrotallagalla, m. majo 1865.

— **caulicola**, Nob.

Gregarie effusa, erumpens, peritheciis depresso-hemisphaericis, brunneis, glabris, opacis, ostiolo minuto coronatis. Asci lineares. Sporidia octona, uniserialia, ovoidea subcymbiformia, simplicia, fusca, 4 × 2-3.

Ex epidermide caulino Monocotyledoneae cujusdam marcescentis erumpens.—Si volva stellata adesset, certissime habuissem pro *Astrocystide mirabili*, B. Br. in *fungis Ceylanicis*, p. 87. Dubium prorsus me subigit, num in fungo Berkeleyano de vera volva, a matrice rite discreta, agatur, num disrumpendo epidermis caulina fortuito volvae formam sumserit.

Sarawak.

— **oblectans**, Nob.

Perithecia e corticibus gregatim erumpentia obovata vel obconica, 2-3 mill. alta, atra, laevigata, vertice rotundato in ostiolum minutum acutum abrupte desinente. Nucleus albidus; paraphyses capillares paullo superantes ascos filiformes pro 2/3 longitudinis in clavulam cylindraceam exeuntes, 30 × 2; sporidia minuta, 2 × 1, oblonga, utrinque obtusa, simplicia, fusca, octona.

Sarawak.

Rhaphidospora exilis, Nob.

Caespitulis parvulis linearibus erumpens; peritheciis nigris minutis globosis astomis. Asci tenuissimi aciculares fere, 15 × 1, sporidiis filiformibus... Totus nucleus hyalinus juvenilis. Ad ramulum fruticis?

Ceylon, ad Point de Galle, majo 1865.

Rhaphidospora hystrix, Nob.

Memorabile quid! — Perithecia globosa, collo plus minus longo praedita, opaca, super stroma superficiale chartaceum grumulosum a matrice facile solubile glebasque deciduas efformans, conglobata strigisque (ostiolis peritheciorum abortivorum?) obvallata. Asci lanceolati acuti, 25-30/500 longi, sporidiis fasciculatis hyalinis acicularibus pluriseptatis utrinque acutis farcti.

Primo intuitu *Diatrypen irpicem*, B. Br. reperiisse existimaveram, magnopere delectatus de tam conspicuo typo inter Beccarianam suppellectilem detecto. Ast ratio stromatis in utroque diversa, si fungus noster cum speciminibus authenticis Berkeleyanis comparetur, et perithecia minora, neque in *D. irpice* strigae numerosae reperiuntur. Potius ad *Rhaphidosporam Friesii*, Montgn. Syll. p. 251, seu *Sphaeriam Friesii* Ejasd. in Ann. Sc. Nat. Ser. 2ª volume XIV (1840), p. 325, tab. 19, fig. 3, sylvarum Sinnamarensium in Guyana gallica incolam, propenderem, nisi huic ab illustri Auctore tribuerentur perithecia angulosa nitida, quae in nostra specie perfecte globosa opaca, immo pulverulenta fere, observantur. Num differentiarum causa in aetatis situsque discrimine quaerenda? Certissime concordant forma et dimensiones tam ascorum quam sporidiorum.

Ad arborum corticem muscosum.

Sarawak.

Non mirabor, si quis sententiam ferat, trinum nomen unico typo spectare.

Sphaerella Plegmariae, Nob.

Perithecia foliicola, sparsa, epi et hypophylla, epidermide tecta, depresso-globosa, contextu vesiculoso. Sporidia fusoidea, curvula, obtusa, hyalina, triseptata, 10-11 × 2 ½.

Ad folia *Lycopodii Plegmariae*.

Ceylon.

Defectus stromatis perithecia jungentis in maculam aterrimam convexam rugulosam, sporidiaque hyalina, hanc formam *Sphaeriae Lycopodinae*, Montg. subsumere ve-

tuerunt; neque cum *Sphaerella Niesslii* Awd. convenit, quae sporidiis uniseptatis gaudet.

Sphaeropsis undulata, B. C.? forma pycnidica?

Perithecia caespitose aggregata *Cucurbitariam* simulantia, nigra, vertice depresso; humectata carnosa fiunt. Asci et paraphyses nulla. Sporidia ovalia, exosporio crasso, fuscella, simplicia: guttula ampla centrali, raro binis, 7×4.

Ad cortices.

Alterum specimen fungi Berkeleyani characteres macroscopicos ex toto reddit, sed stylosporas hyalinas curvulas cylindraceas, $3 \times 1/2$. gerit.

Sarawak.

Dothidea oceanica, Nob. (Sphaeria prius in litt. et specim. siccis ad M. Cooke et Berkl.).

Monente cl. Cooke iterum inspecta, a genere *Sphaeria* removendam esse mihi suasi. Fasciculato-congesta, erumpens, atra, superficie minute granulosa, collapsa, sporidiis late oblongis simplicibus uni-guttulatis, in asco clavato biserialibus. Asci $^{25}/_{500}{}^{mm}$ longi; sporidia 10×5; paraphyses nullae. — Ad cortices.

Sarawak.

— **phaselina**, (Montgn. in Syll. p. 239 sub Sphaeria) Berkl.

Ad Bambusae culmos; specimina nostra Berkeleyanis ex insula Ceylon perfecte conformia, sed spermatia tantummodo gerunt.

Sarawak; Singapore.

— **graminis**, Fr.? nonne potius Doth. stenospôra B. Br. in Journ. of. Linn. Soc. XIV, p. 134?

Imperfecta, hinc sat incerta; ad *Panici* pilosi cujusdam folia; forsan *P. trigoni* Whight non Retz.

Ceylon.

— **membranacea**, Nob.

Nisi substantia carbonacea anista obstaret pro entomologico quid habuissem plagulas istas orbiculares vel oblongas spadiceas ad marginem tenuissime pelliculosas, fere ala maculari excurrentes, sensim ad medium tumidulas umbones 1-4 seriatos gerentes, intus sub umbonibus cavitates sphaeroideas hyphasmate quodam albo repletas revelantes, serius a foliis, quibus transversim insident, libere secedendas.

Ad folia sat consumta Monocotyleae non dignoscendae.

Sarawak, e Matang.

Dothidea hysteriodes, Nob.

Ovalis, elliptica vel linearis et tunc *Hysterii* indehiscentis facie, superficialis, basi applanata elongata cubili adnata, nigrescens, levis, ostioli nullo vestigio. Intus quoque atra, e substantia stromatica subcellulosa constans. Asci? Sporidia oblongo-linearia, obtusa, curvula, primitus bilocularia sed non constricta, serius quadrilocularia, fuscella. Ad calamos bambusinos.

Sarawak.

Sporormia minima, Awd.

Perithecia microscopica, ovoidea, acuta ex ostiolo vix conspicuo punctiformi, membranacea contextu laxe celluloso. Asci sessiles, cylindracei, $20\text{-}21 \times 8$, octospori. Sporidia articulis truncatis 3-4/500. longis.

Ad fimum.

Sarawak.

Diplodia Radula, B. Br. Journ. of Linn. Soc. vol. XIV, p. 87.

Non praeteream pedicellum cuneiformem sporarum non vidisse « *with a wedge-shaped pedicel* »; sed omnes characteres concordant, neque excepta statione ad *Musaceas*.

Ceylon, ad Point de Galle. Majo 1865.

Sphaeronema? aurantiacum, Nob.

Perithecia membranacea, 5 mill. alta, ligulata vel difformia, apice angustato obtuso, sub lente composita longitudinaliter lineata, (in sicco) compressa. Sporidia minutissima, ovoidea, hyalina.

Lubenter hunc fungillum pro forma pycnidica *Nectriae* cujusdam venditarem.

Ceylon, Kandy.

Sub nomine *Phomatis* tres formas colligam, quas aptius interpretare in praesenti mihi nefas est.

Phoma Orchidearum, Nob.

Peritheciis epidermide obtectis, microscopicis, in greges minutos compositis, membranaceis, depresso globosis.—Ad Orchideae majoris folia.

Ceylon, Peradenya.

Phoma arundinaceum, Nob.

Superficiale, peritheciis sparsis, minutissimis, depresso ellipticis, nigris; sporidiis vix 1-2/500 longis, ovalibus, fuscellis, numerosissimis.

In culmo quodam lignatili decorticato.

Peradenya.

— **aequivocum**, Nob.

Peritheciis hypophloeodibus in caule exsiccato, sparsis, globoso-vel ellipsoideo-depressis, ostiolo papillari emergente; sporidiis ovalibus obtusis fuscis, 3×2.

Sarawak.

Discosia (incerta).

Sarawak; Singapore.

Meliola triseptata, B. Br.? sterilis, ab *Helminthosporii* specie non determinanda obducta.

— **amphitriche**, Fr.? maxime imperfecta.

Utraque in folio coriaceo. Sarawak.

Rhytisma pongamiae, B. Br. cum varietate peritheciis dispersis.

In foliis coriaceis. Peradenya.

— **Berkeleyanum**, Nob.

Epiphyllum, gregarium, tuberculosum; singulis tuberculis 3-6 mill., magisque dum confluunt, superficialibus inaequalibus rugulosis. Ex fructificatione nimis juvenili asci ovali-oblongi, sporidia elliptica hyalina biguttulata.

In pagina superiori foliorum herbae, uti visum, suffruticosae? subtus ad nervos venulasque hispidulorum *Cyrtandraceae* vel adfinis familiae facie.

Sarawak

Melanconium melanoxanthum, B. Br. var. major.

Pars hypodermica cinguli stromatici passim coffeina evadit.

Ad caulem monocotyleum, ex epidermide erumpens.

Ceylon: HB. Paradenya.

Pemphidium coffeinum, Nob.

An P. **dilatatum**, R Br.?

Perithecia depresso-conica, 1 usque 1 1/2 mill. diametro, saepius in maculas irregulares confluentia, laevigata immo interdum nitentia, ad basim subtiliter granulosa, colore pallide coffeino; osculo verticis punctiformi. Fructificatio minime clara.

In culmo arundinaceo et ad petiolum herbaceum Monocotyleae cujusdam.

Sarawak; Pedrotallagalla (Ceylon).

Rhytismatis, quas puto, aliae quatuor species adsunt, nec unica quidem fructificans, hinc nisi collatis speciminibus aliunde comparatis in posterum eruendae.

HYPHOMYCETES

Stilbum graphioideum, B. Br?

Specimen imperfectissimum. — Ad lignum denudatum nigrefactum.

Ceylon; ad Pedrotallagalla, Maj 1865.

— **clavulatum**, Nob.

Sparsum; stipite 3-4 mill. alto, cylindraceo, firmo, fusco, 1/4 mill. crasso, in clavulam obovatam abeunte, subcinnamomeam, dimidium mill. longam, compactam; sporis globosis, 2/500 mill., nucleo opaco. — Ad asserculas.

Sarawak.

Arthrobotryon Beccarianum, Nob.

Nigrum, capitulo globoso compacto, e sporis clavatis, fuscellis, 15-20 × 5, pluriseptatis constituto.

Ad lignum nudum.

Sarawak.

Cladosporium occultum, Nob.

Sordide virens, caespitulos minutissimos, e germine glumis occultato *Sporoboli* cujusdam surgentes efformans, hyphis brevissimis, sporis cylindraceis utroque fine paullisper angustatis obtusis 4-septatis, ad septa subconstrictis, 20 × 7.

Pulo-Pinang, m. Majo 1865.

Helminthosporium decorum, Nob.

Hyphae fertiles rudes, rigidae, rufofuscae, opacae, arrectae e centro hyphasmatis horizontalis concoloris, pulchre radiantis, ramis pinnatim divaricatis ramellorum apicibus globoso — incrassatis. Sporae concolores, cylindraceae, utrinque obtusae, 3-septatae, loculis polaribus majoribus, 12-14 × 5.

Caespites orbiculares nigros ad calamum *Cyperaceae* cujusdam sistens.

Sarawak.

Chloridium? lunulatum, Nob.

Caespituli atri, aggregati, hyphis rigidis erectis non septatis; sporis numerosissimis

inspersis (an primitus?) curvulis obtusis hyalinis. — Vix *Chaetopsis* ob defectum ramulorum basilarium.

Ad cortices, ubi etiam *Cytisporae* non determinandae incola evadit.

Sarawak.

Chloridium? microsporum, Nob.

Caespituli atri diffusi minuti, hyphis erectis flexuosis rigidis obscure septatis? sporis minutissimis globosis.

Ad Bambusae culmum.

Sarawak.

Merosporium velutinum, Nob.

Acervuli congesti, effusi, nigri, velutinum subiculum efficientes ex hyphis septatis nigrescentibus curtis flexuosis vix ramosis repentibus; sporis ellipticis nigris, episporio crasso, acrogenis? circumfusis.

Ad lignum denudatum.

Sarawak.

Sporidesmium erineoides, Nob.

Caespituli fusco-lutescentes, hypophylli, sparsi, *Erineum* minutum simulantes, sporis fusiformibus pluriseptatis longe et flexuose caudatis, $^{18}/_{500}{}^{mm}$ longis (sine appendice), $^{7}/_{500}{}^{mm}$ latis.

Folia coriacea arboris mihi ignotae inhabitans.

Mattang in ditione Sarawak, m. junio 1866.

— **cirrhatum**, Nob.

Caespituli maculiformes, atri, facillime detergibiles, ex hyphis intricatis constantes cirrhatis obscure septatis, aliis in sporam acrogenam fulvam elongato-ellipticam triseptatam apiculatam, $^{20}/_{500}{}^{mm}$ longam, $^{6-7}/_{500}{}^{mm}$ latam abeuntibus.

Ad folia *Cyperaceae* cujusdam sterilis, ni fallor *Scleriae*, in pagina inferiori.

Sarawak.

CONIOMYCETES

Aecidium sarawacense, Nob.

Hypophyllum, effusum sine macula (saltem in sicco), cyathis profundis margine denticulato, sporis hyalinis (in sicco) irregulariter oblongis, grosse nucleatis, levibus, 15 × 8.

Ad paginam inferiorem foliorum siccando nigrefactarum herbae vel suffruticis non determinandi.

Sarawak, Octobri 1866.

Aecidium fragiforme, Nob.

Tuberculum Pisi majoris magnitudine sistens in pagina superiore folii coriacei, illa *Podocarpi latifoliae* vel *Dammarae* e. gr. *D. robustae* referentis, cyathorum margine acuto integro, sporis (in sicco) hyalinis s. flavidulis globosis grosse nucleatis, episporio minutissime granulato, $^{20}/_{500}{}^{mm}$ diametri.

Sarawak, m. aug. 1865.

Ceratitium phaeosporum, Nob.

Sparsum; pseudoperidiis columnaribus, pallide ochraceis, apice parum dilatatis erosis, pulverulentis, contextu granulari, basi cingulo quodam concolori limitata; sporis castaneis, globosis, opacis, centro subdiaphano, levibus $^{7}/_{500}{}^{mm}$ diam.—Ad caulem ignotae stirpis.

Sarawak.

Ustilago endotricha, Berkl.

Caryopsidibus *Caricis* cujusdam innata.

Ceylon, ad Pedrotallagalla, majo 1865.

— **leucoderma**, Berkl. teste ipso cl. Auct. in litt. humaniss.

Destruens rhachidem *Cyperaceae* cujusdam; sporis globulosis brunneis episporio levissimo.

Sarawak.

APPENDIX

XENOMYCES, Nob. (Gen. nov.)

Capitula aggregata, sessilia, granuliformia, dura. Flocci pallidi, intertexti, rigidi, curti, sub-sigmoidei, compressi, irregulariter ramosi ramis abbreviatis, recurvis, plus minus obtusis. Cystides ampullaceae stipitatae.

Genus affine *Sclerocystidi* (Bkl. Br.) nec minus enigmaticum.

— **ochraceus**, Nob.

Capitula ex ochraceo fuliginea, 1 mill. diametro.

Sarawak.

Sclerotium glumale, Nob.

Majusculum usque 8 millim. longum, 4 latum, convexum, subtus cavum, margine rotundato undulato, nigrescenti-griseum, crusta tenui sed dura, contextu albo minute vesciculoso.

Glumis marcescentibus *Oryzae* adnascens.

Sarawak.

Sclerotium ligulatum, Nob.

Olivaceum, difforme, cylindraceum v. compressiusculum, pistillare vel turbinatum, passim bifidum, carnosum, intus album, contextu e vesiculoso granulari.

Ad lignum emarcidum humo inquinatum.
Ceylon, ad Pedrotallagalla.

— **hypocreaemorphum**, Nob.

Tubercula laxe matrici adhaerentia, globulosa, umbilico leviter excavato, e citrino ochracea, punctis obscurioribus (fere ostiola fingentibus) notata. Cortex tenuis, caro albida e cellulis contortis turgidis hinc inde nucleolatis lacteis confecta.

Fibris pericarpii Pandani? inspersum.
Sarawak: 1865.

Sclerotium rhachidophilum, Nob.

Spicas Panici? post spicularum delapsum infestans, e rhachide erumpens, depresso globosum, minutum, extus brunneum rugulosum, intus album.
Sarawak.

— **enterophaeum**, Nob.

Hypophyllum, copiosissime disseminatum ad folia arboris ignotae satis coriacea, globosum, rugulosum, extus intusque concolor brunneum.—Dissentit de genere Rev. Berkeley; sed deficientis fructificationis causa, ut nomen habeat, in hac sede relinquo singularem mycetem.

EXPLICATIO TABULARUM

Tab. I.

Boletus Mandarinus, Nob.
» *longicollis*, Nob.
Mutinus borneensis, Nob.

Tab. II.

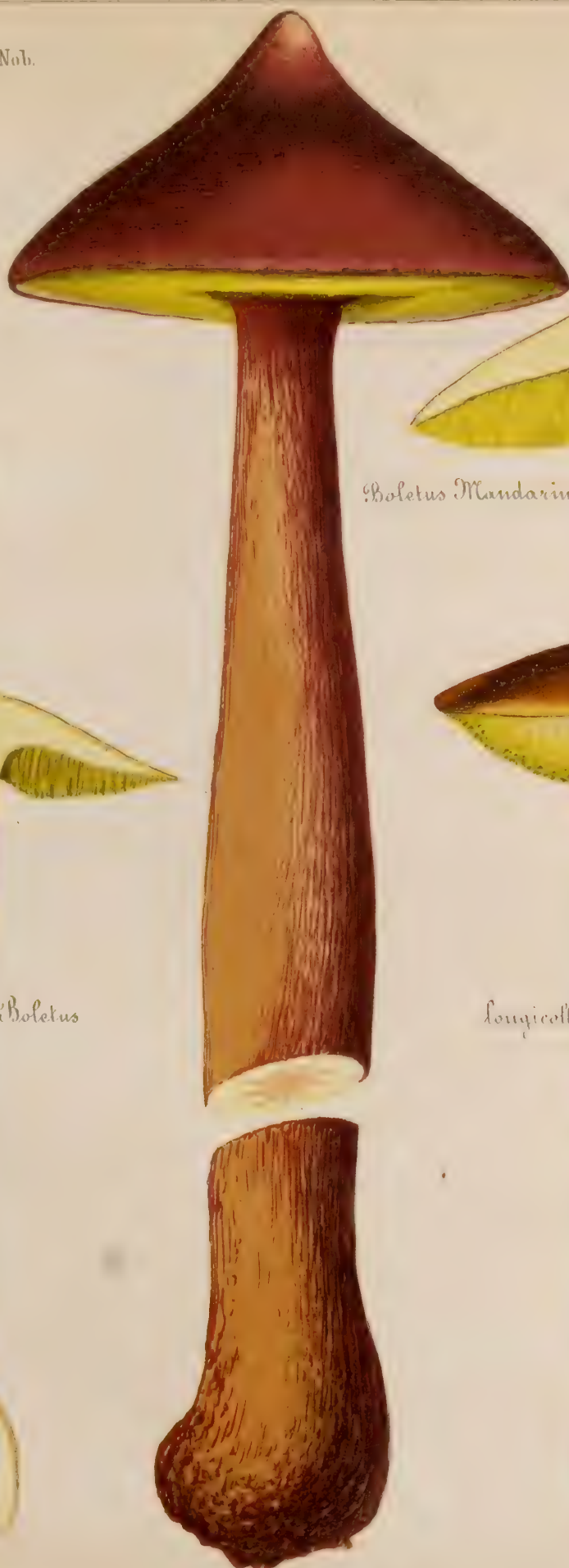
Fig. I. *a* et *b*. *Agaricus (Tricholoma) subgambosus*, Nob.
» II. *Husseia pachystelis*, Nob.
a Individuum junius, volva adhuc clausa, longitudine dissectum.
b, *c*. Individua adulta.
Husseia insignis, Berkl.; Auctoris ipsissima icon, comparationis causa adjecta.
Xenomyces ochraceus, Nob.; Caespitulum, hyphae subiculi, cystides.

Tab. III.

Hypocrea rhytidospora, Nob. (Omnia magn. varie aucta).
Fungillus sectus; ejus portiuncula magis aucta; asci c. paraphysibus; sporidia.
Xylaria massula, Nob. (Omnia varie aucta).
Clavula integra; eadem dissecta; paraphysum ascorumque compages; sporidia.
Hypoxylon glebulosum, Nob. (Omnia varie aucta).
Gleba integra; eadem dissecta; ascus immaturus; sporidia.
Xypoxylon adproximans, Nob. (Omnia varie aucta).
Gleba dissecta; ascus immaturus; sporidia aetate varia.
Xypoxylon Avellana, Nob. (Omnia varie aucta).
Gleba dissecta; asci aetate varia; sporidia.
Xypoxylon Fragaria, Nob. (Omnia varie aucta).
Gleba integra; pars glebae dissectae; singula perithecia integra et dissecta; ostiolum; sporidia.

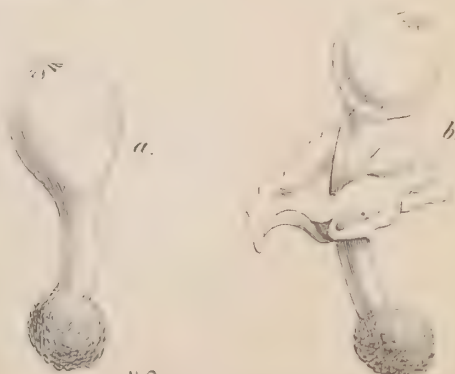
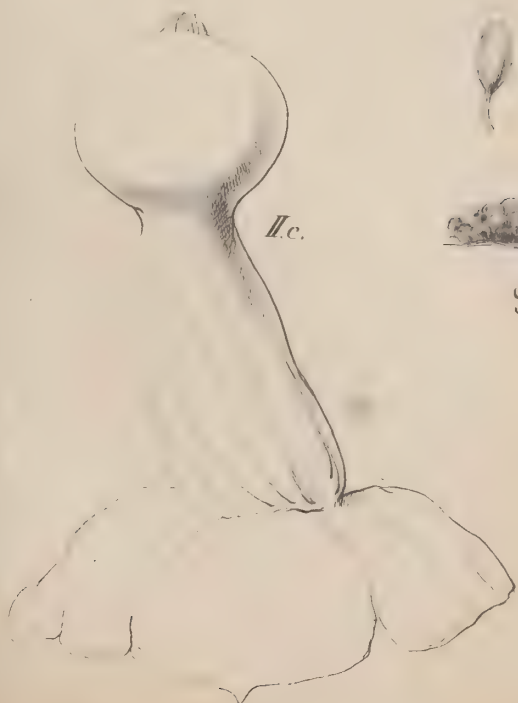
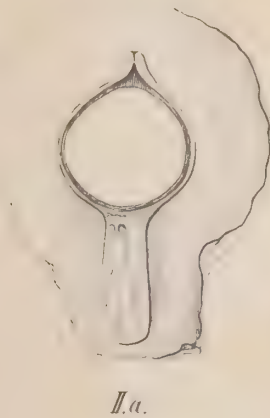
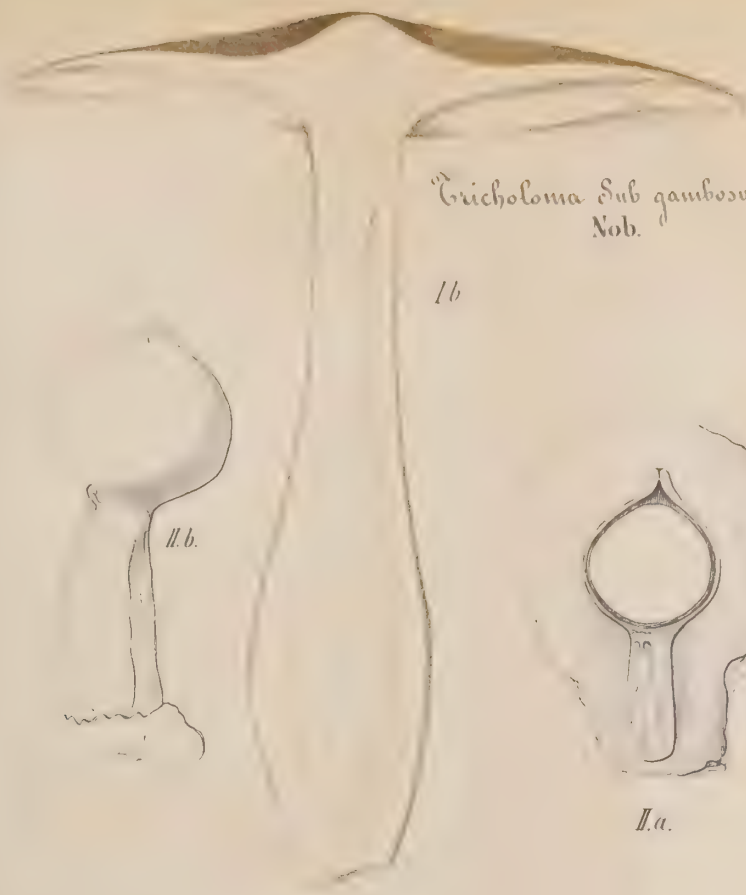
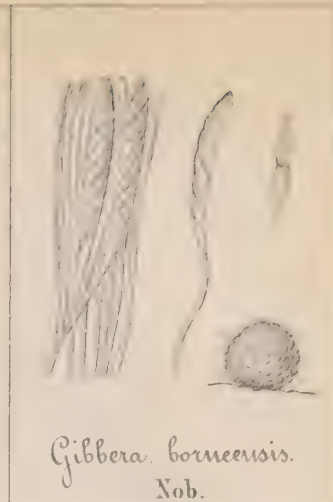
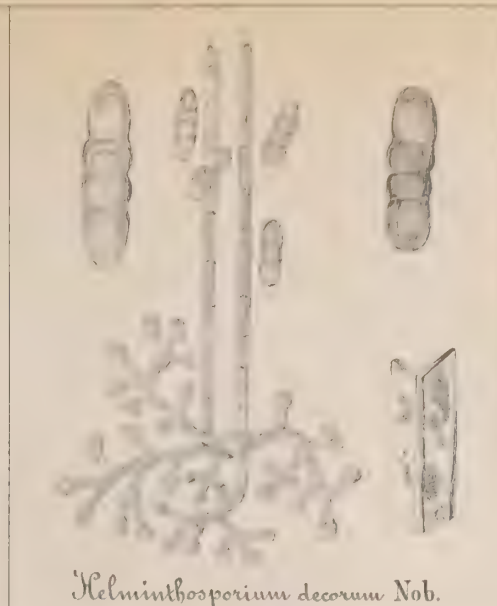
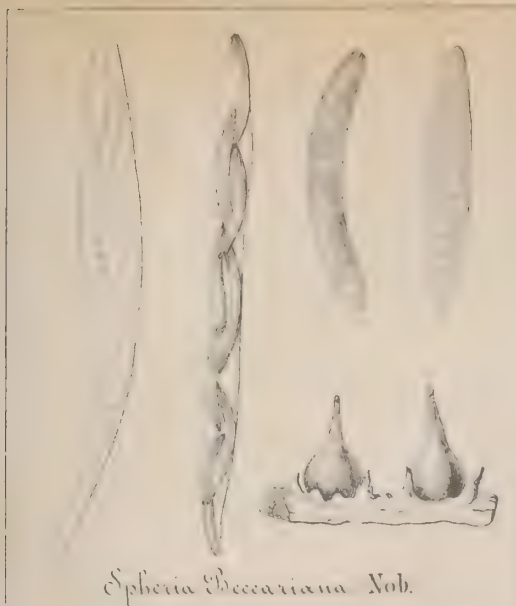
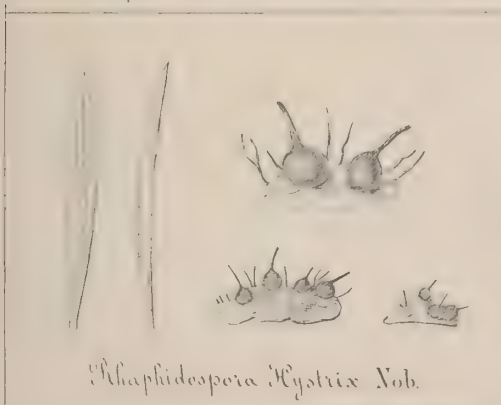
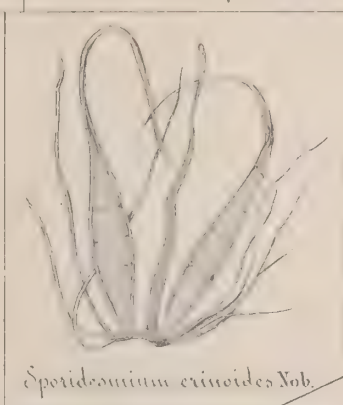
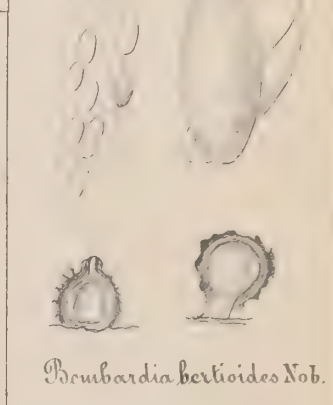
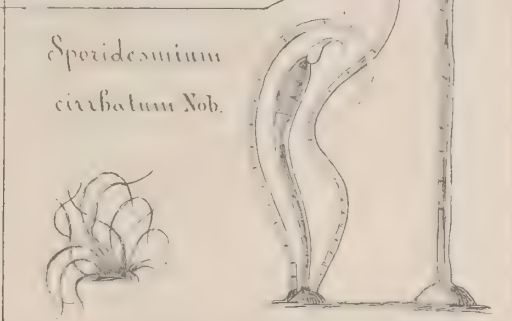
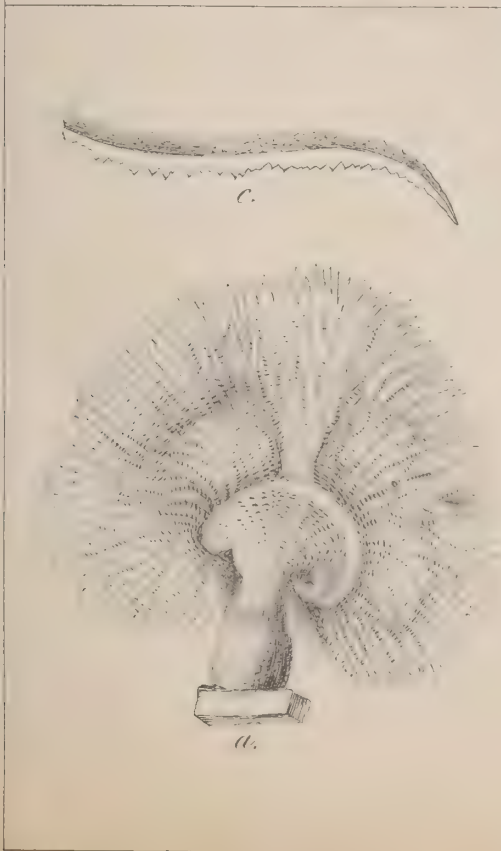
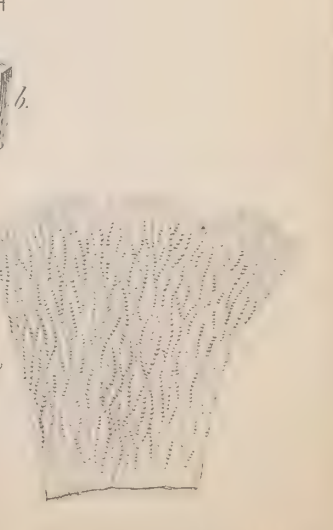
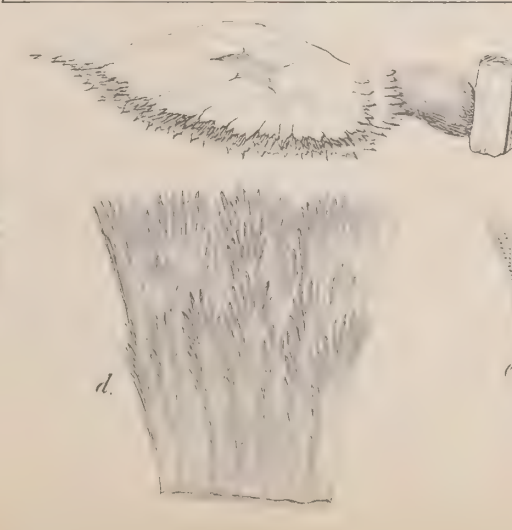
Hypoxylon micropus, Berkl, *pycnides?* (Omnia varie aucta).
Caespitulus; singula pycnis circumscissa; hyphasma nuclei; stylosporae?
Melanogramma Cinnamomi, Nob. (Omnia varie aucta).
Caespitulus; glebula dissecta; asci aetate varia; sporidia.
Aglaospora Beccariana, Nob. (Omnia varie aucta).
Perithecium; ascus; sporidium.
Cucurbitaria insularis, Nob. (Omnia varie aucta).
Caespitulus; bina perithecia collapsa; sporidia.
Amphisphaeria enteroxantha, Nob. (Omnia varie aucta).
Perithecium dissectum; asci paraphysibus immixti; sporidium.
Amphisphaeria Beccariana, Nob. (Omnia varie aucta).
Perithecia nonnulla, sive integra, sive dissecta, sive elapsa; sporidium.
Sphaeria Sarawacensis, Nob. (Omnia varie aucta),
Bina perithecia completa; alia ostiolo delapso; sporidium.
Sphaeria oceanica, Nob. (Omnia varie aucta); legas: *Dothidea*.
Ascus incompletus, pedicello filiformi deficiente; sporidia.
Sphaeria macrostomella, Nob. (Omnia varie aucta).
Caespitulus; singula perithecia, alterum ostiolo adhuc clauso, alterum hiante; ascus, sporidia.

TAB. IV.

Sphaeria Beccariana, Nob. (Omnia varie aucta).
Bina perithecia; ascus valde immaturus; alter perfecta maturitate; sporidia.
Gibbera borneensis, Nob. (Omnia varie aucta).
Perithecium; asci una cum paraphysibus; sporidium.
Rhaphidospora Hystrix, Nob. (Omnia varie aucta).
Caespituli et singula perithecia; ascus immaturus; sporidium.
Bombardia bertioides, (Omnia varie aucta).
Perithecia dissecta; sporidia ascis diffluis liberata paraphysibus immersa; bina sporidia quorum alterum evacuatum et disruptum.
Helminthosporium decorum, Nob. (Omnia varie aucta).
Caespituli folii fragmentum obsidentes; singuli caespitis pars; sporidia.
Sporidesmium erineoides, Nob. (Auctum).
Caespituli pars.
Sporidesmium cirrhatum, Nob. (Omnia varie aucta).
Caespitulus; pars caespituli; singula hypha sporifera.
Beccariella insignis, Nob. (Magnit. natur.) — sic corrigatur inscriptio: Syn? — Cladoderris dendritica var. hymenio scabro?
a. Fungus e facie inferiori.
b. » » » superiori (icon Auctoris pessime reddita).
c. Pileus dissectus.
d. Frustulum pilei e facie superna (haud probe exculptum).
e. » » » infera.

finita stampare il dì 18 agosto 1879

O. Beccari dis.

O. Beccari dis. (Fig. I e II.)

Cromolit. V. Steeger

Spheria Beccariana Nob.
Helminthosporium decorum Nob.
Gibbera borneensis. Nob.
Rhaphidospora Hystrix Nob.
Sporidesmium crinoides Nob.
Bombardia bertioides Nob.
Sporidesmium cirrhatum Nob.
Cladoderris dendritica (Pers.) Berkl. var. hymenio scabro.
a.
b.
c.
d.
e.

PIANTA TOPOGRAFICA

della

SOLFATARA di POZZUOLI

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLE VARIAZIONI DI LIVELLO DELL'ACQUA IN UN POZZO DELLA SOLFATARA DI POZZUOLI

MEMORIA

del Socio Ordinario **SEBASTIANO DE LUCA**

letta nell'adunanza del dì 9 Novembre 1878.

La Solfatara di Pozzuoli è nota nella Storia [1]) come cratere di un semiestinto antichissimo vulcano; di cui i contorni, che si elevano a mo' di grossa ripa sul piano centrale, offrono un'altezza media di 160 metri al di sopra del livello del mare (con un massimo a Sud di 185^m,85, ed un minimo ad Ovest di 116^m,77), mentre il fondo si eleva appena 97 metri (con un massimo di 104^m,68, ed un minimo di 78^m,86).

Vi si accede per la parte più bassa della ripa, che lascia un varco, ove l'altezza è di 102^m,17; ed il piano su cui si passa ha un'area di circa 35 ettari, nuda in alcuni punti, in altri calda e scottante, in altri ricoperta di abbondante vegetazione.

Tra le molte fumarole merita speciale attenzione quella che va col nome di *Bocca* della Solfatara, la quale lascia continuamente sfuggire dei vapori abbondantissimi, con un rumore paragonabile a quello di una caldaja a vapore in funzione e la cui temperatura è capace di fondere facilmente il solfo. Dalle altre fumarole emanano vapori a 97° centigradi [2]).

[1]) La conca della Solfatara si chiamava dagli antichi *Forum Vulcani,* ed era considerata fin dai tempi di Strabone e di Plinio come un vulcano non interamente estinto. Ma il Capaccio non se ne accontentò, e nel 1790 impiegò un capitolo della sua Storia di Pozzuoli a provare che la Solfatara sia un *buco dell'Inferno* (Hist. Puteol.).

[2]) È degno di ricordo, per la singolarità del fatto, l'artifizio cui Scipione Breislak ricorse nel 1792 per ottenere acqua dalla condensazione dei vapori di queste fumarole. Ecco cosa egli dice: *Le manque absolu d'eau dans le cratère de la Solfature, sa nécessité pour un laboratoire de sels et l'excessive dose d'humidité dont sont chargés les fumeroles, furent les motifs qui m'engagerent à tacher de tirer parti de cette masse de vapeurs pour en obtenir de l'eau.* Cominciò egli dal costruire una torre alta circa 48 piedi nel mezzo della Solfatara, sperando di potervi ottenere la condensazione dei vapori; ma avendo fatti 180 buchi di mezzo pollice di diametro nel capitello della torre, poichè *aucune goutte d'eau ne se forma, et le besoin comme la difficulté consistant dans le refroidissement des vapeurs,* egli pensò *qu'en les divisant en un grand nombre de petits filets on atteindrait le but avec plus de facilité.* Fece fare dunque 90 altri buchi, in tutto 270, e vi fece aggiustare dei tubi di legno di 3 piedi di lunghezza; ma con sua grande sorpresa ebbe dapprima acqua dai vapori condensati, e dopo 4 ore fluirono dei filetti di vapore invece dell'acqua. Finalmente allungò i tubi, facendoli di canna comune, ed ottenne per distillazione acqua minerale, che si raccoglieva in un serbatojo comune. Questa fontana in mezzo del cratere eccitò la curiosità pubblica, e pare che specialmente gl'infetti da malattie veneree o da piaghe di vario carattere, se ne fossero allora giovati. Era tale la concorrenza, che l'autorità pubblica dovette adoperarsi a frenarla e mandò ad esaminarne le qualità terapiche ad una commissione di medici fatta dai Signori Petagna e Ronchi.

Nelle grotte (tra cui due sono le principali, con temperatura di 35° e 45°) si produce dell'allume, che ne tappezza le pareti interne [1]). Nella così detta *Bocca* si condensano invece dei solfuri arsenicali e particolarmente il risigallo.

Il sotto-suolo è fatto di una terra argillosa, colore bigio di piombo (perciò detta *piombina*), che ordinariamente si utilizza alla fabbricazione dell'allume. Vi si rinviene anche un'altra terra detta *bianchetto*, e questo, con uno speciale processo di levigazione, è reso utile alle industrie come stucco, per preparare artificialmente l'oltremare e per indebolire l'intensa tinta delle materie coloranti.

Tutto il suolo, percosso, rimbomba come una vôlta; ed a circa 12 metri di profondità vi si rinviene un'acqua termo-minerale, la cui temperatura è di circa 52 gradi.

Io ebbi a presentare a questa Reale Accademia, fin dall'anno 1868, nell'adunanza delli 8 Ottobre, alcune mie osservazioni intorno alla temperatura di quell'acqua termale, e notai allora che sarebbe stato di molto interesse istituirvi delle osservazioni diurne sulle variazioni dell'altezza di livello.

Facendo seguire a' propositi i fatti, mi onoro sottoporre allo esame delle Signorie Loro tutti i quadri delle esperienze istituite, e le tavole che traducono in tracce grafiche i numeri riportati nei quadri, insieme ad alcune osservazioni che io credo di poter trarre da' fatti, cui alludono i numeri stessi. Forse una conseguenza, che cennerò in ultimo, potrebbe sembrare azzardata, se la eloquenza delle cifre non soccorresse e sostenesse la gratuita asserzione.

Devo dichiarare, per debito di verità, che il giovane Prof. Leopoldo Ciccone mi ha in questo lavoro coadiuvato moltissimo, ordinando e compilando le tavole, nonchè traducendole in linee comparabili, e cavandone que' risultati che appresso verrò esponendo — Il lavoro è stato distribuito come segue:

A cominciare dal Gennajo 1871, e venendo fino allo scorso Dicembre 1878 [2]), per ciascun giorno degli anni 1871 — 72 — 73 — 74 — 75 — 76 — 77 — 78, sono state misurate le altezze offerte dall'acqua, la temperatura del pozzo, e quella dell'ambiente esterno. Tutti i numeri sono stati riportati in tavole apposite, come si fa per le osservazioni meteorologiche, se ne sono segnati i massimi ed i minimi ed i limiti di variazione, se ne sono cavate le medie mensili ed annue, si sono istituiti paragoni fra le varie stagioni. Eccone i risultati:

1. La temperatura dell'interno del pozzo varia di poco da quella dell'ambiente esterno, e sebbene vi sia un certo disquilibrio allo spirare dei venti ed al cadere delle piogge, pure non ho creduto farne oggetto di osservazione, essendo questi fatti già noti e spiegati nella scienza. Accade adunque che le variazioni di temperatura sono sempre

[1]) Fin dal tempo di Plinio vi erano addette persone all'estrazione dei minerali. Ed il Galiani narra, nella sua *Breve descrizione della Città di Napoli e del suo contorno* (Napoli 1792), che « il prodotto della miniera, nei secoli di mezzo, si trova ceduto dal Fisco, per metà all'ospedale della Nunziata di Napoli, e per metà ad un certo Giovanni Mormile, il quale lo rivendè ad un « tal nominato Pietro Stefano. L'allume che se ne ritraeva era buono ed in gran copia. Ma la Corte di Roma, che vedeva con ciò « pregiudicato lo spaccio del suo allume di Civitavecchia, sulle prime sottopose all'interdetto tutti coloro che andavano al lavoro: « forse questo mezzo non riuscì e si prese la risoluzione di pagarsi 1200 ducati all'anno al Mormile ed allo Stefano, acciò non « lo continuassero, finchè Gregorio XII abolì questa prestazione con pagare una volta 25 mila ducati. La miniera di allume dun« que rendeva in quei tempi circa 3000 ducati, poichè sappiamo che la prestazione della Corte di Roma era per la sola metà. Vedi Capaccio, *Hist. Neap.*, Lib. 2; e Cestari, *Annedoti istorici sulle alumiere dei Leucogei.*

[2]) Il lavoro presentato all'Accademia nel dì 9 Novembre 1878, giungeva fino a tutto il mese di Ottobre dello stesso anno; ma ho creduto utile, durante la pubblicazione, aggiungervi le osservazioni relative a' due ultimi mesi di Novembre e Dicembre, nello scopo di completare l'intero anno 1878.

in rapporto delle stagioni, e, con una regolarità più costante di quelle dell'ambiente, esse si seguono, rientrando le une nelle altre, per modo che indubitabilmente, meno piccolissime eccezioni, le medie di ciascun mese, in ciascun anno, sono quelle dell' istesso mese in tutti gli anni sussecutivi. E ciò si accorda perfettamente con le note leggi della Meteorologia, sempre ripeto con una minima oscillazione di variabilità.

Quello però voglio si noti è, che queste temperature non hanno nessun rapporto colle altezze raggiunte dall' acqua nel pozzo, e che, per quanto mi sia studiato di vedere qualche relazione fra di esse, non mi è stato possibile scovrirne alcuna. Ond'è che vien messo così da banda un primo elemento di discussione, e, parlando appresso delle origini delle variazioni nell' altezza dell' acqua, non ci sarà dato mai invocare il fattore della temperatura del pozzo o dell' ambiente esterno.

2. È notevole che le variazioni termometriche esterne, da qualsivoglia causa esse dipendano, non sono repentinamente risentite dall' aria nello interno del pozzo; onde quello che costituisce pei fisici il così detto *equilibrio mobile di temperatura,* io qui mi permetterei chiamarlo *disquilibrio stabile*, poichè la temperatura, dovendo comunicarsi per falde d' aria, trova una resistenza e nella poco conduttività di questo mezzo e nell'equilibrio di temperatura dell' aria del pozzo, che è funzione non della sola temperatura dell' ambiente esterno, ma della differenza delle temperature x ed x', dovute l' una alla causa istessa che mantiene l' acqua a 52°, e l' altra alle mutabilità meteoriche esterne. Laonde solamente dopo tempo si avvera la relazione

$$\frac{fx}{fx'} = kt \, ,$$

in cui t esprime la temperatura attuale e k una costante.

3. Basta volgere un' osservazione anche superficiale ai quadri dei varii anni, per notare che non v' ha alcun rapporto fra le temperature dell' aria e le altezze raggiunte dall'acqua. Ciò si spiega facilmente, perchè questi valori sono due funzioni diverse di variabili, fra cui non esiste rapporto alcuno:

$$f(\mathrm{T}) \qquad \mathrm{e} \qquad f'(\mathrm{A}).$$

4. Questa stessa notazione va ripetuta per l'altezza dell' acqua e la temperatura della stessa, $f(\mathrm{T}')$ e $f'(\mathrm{A})$. Riporto un quadro del 1872, ove è facile istituire paragone fra queste due variabili.

Anno 1872

Altezza e Temperatura dell'acqua

DATA	Gennaio		Febbrajo		Marzo		Aprile		Maggio		Giugno	
	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.
1	1 27	43	1 49	52	1 50	53	1 50	53	1 45	52	1 37	52
2	1 27	44	1 48	52	1 48	54	1 50	53	1 44	52	1 37	52
3	1 29	45	1 48	52	1 48	54	1 50	53	1 44	52	1 37	52
4	1 29	44	1 48	52	1 47	53	1 49	52	1 44	52	1 36	52
5	1 29	45	1 48	53	1 48	53	1 49	52	1 43	52	1 35	52
6	1 33	47	1 48	53	1 48	53	1 49	53	1 43	52	1 35	53
7	1 34	52	1 47	52	1 50	54	1 49	53	1 43	52	1 35	52
8	1 33	51	1 47	52	1 50	54	1 49	53	1 43	52	1 35	52
9	1 33	47	1 46	52	1 50	54	1 49	53	1 42	53	1 25	53
10	1 35	49	1 46	52	1 51	53	1 49	52	1 42	52	1 35	53
11	1 35	50	1 45	53	1 51	52	1 49	53	1 42	53	1 35	52
12	1 38	50	1 45	52	1 51	53	1 49	53	1 42	53	1 36	53
13	1 39	50	1 45	53	1 50	52	1 49	53	1 44	52	1 36	53
14	1 40	50	1 46	52	1 50	53	1 48	53	1 44	52	1 36	53
15	1 40	51	1 46	63	1 50	53	1 48	52	1 44	53	1 35	53
16	1 41	52	1 49	53	1 49	53	1 48	53	1 44	53	1 35	52
17	1 42	51	1 47	52	1 49	53	1 48	53	1 43	52	1 34	52
18	1 42	51	1 46	53	1 49	53	1 48	53	1 43	52	1 34	53
19	1 42	51	1 46	53	1 49	53	1 48	53	1 43	51	1 35	52
20	1 43	52	1 46	53	1 49	53	1 48	53	1 42	51	1 35	52
21	1 43	49	1 47	54	1 49	53	1 48	52	1 42	51	1 35	53
22	1 45	51	1 47	54	1 49	53	1 48	52	1 42	51	1 35	52
23	1 46	50	1 47	54	1 50	53	1 47	55	1 42	51	1 31	52
24	1 46	52	1 47	54	1 50	54	1 48	52	1 42	51	1 33	52
25	1 47	50	1 49	55	1 50	53	1 48	52	1 42	52	1 33	53
26	1 49	52	1 49	54	1 49	53	1 47	52	1 42	51	1 34	53
27	1 49	52	1 49	54	1 49	53	1 45	53	1 41	52	1 33	53
28	1 50	53	1 51	53	1 49	53	1 45	52	1 42	52	1 34	52
29	1 50	53	1 52	53	1 49	52	1 45	52	1 41	52	1 33	52
30	1 46	52			1 49	52	1 44	52	1 41	52	1 33	53
31	1 49	52			1 50	53			1 40	52		

DATA	Luglio		Agosto		Settembre		Ottobre		Novembre		Dicembre	
	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.
1	1 30	52	1 09	53	0 80	53	0 79	53	1 00	51	1 36	48
2	1 30	51	1 08	52	0 80	53	0 80	52	1 03	50	1 38	48
3	1 29	52	1 04	53	0 80	53	0 80	52	1 05	51	1 42	48
4	1 25	52	1 02	53	0 80	53	0 80	53	1 04	51	1 46	48
5	1 25	52	1 02	53	0 80	55	0 80	53	1 07	49	1 46	48
6	1 24	53	1 00	53	0 80	52	0 80	53	1 10	49	1 49	49
7	1 22	52	1 00	53	0 80	52	0 81	52	1 13	49	1 50	48
8	1 23	53	1 00	53	0 80	52	0 81	53	1 16	49	1 51	45
9	1 24	52	1 00	53	0 80	52	0 81	52	1 19	50	1 52	48
10	1 22	53	0 99	52	0 80	52	0 80	53	1 20	50	1 53	47
11	1 22	53	0 98	53	0 80	52	0 88	52	1 20	51	1 55	46
12	1 21	53	0 97	53	0 80	52	0 89	53	1 22	50	1 55	47
13	1 21	52	0 95	53	0 80	52	0 88	52	1 25	51	1 57	46
14	1 21	52	0 94	53	0 79	52	0 89	53	1 26	50	1 60	45
15	1 21	53	0 98	53	0 79	52	0 89	52	1 29	49	1 63	45
16	1 20	52	0 92	53	0 79	52	0 89	53	1 29	48	1 44	43
17	1 20	52	0 91	52	0 79	52	0 89	53	1 28	48	1 65	45
18	1 20	52	0 90	53	0 77	52	0 90	52	1 28	48	1 67	44
19	1 19	52	0 90	53	0 77	52	0 90	52	1 27	48	1 67	45
20	1 19	52	0 87	53	0 76	52	0 90	53	1 27	48	1 68	44
21	1 19	52	0 88	53	0 76	52	0 90	52	1 29	48	1 68	45
22	1 18	53	0 86	53	0 76	52	0 94	52	1 30	48	1 68	44
23	1 16	53	0 86	53	0 78	52	0 94	52	1 30	48	1 69	45
24	1 15	52	0 86	53	0 79	53	0 94	52	1 30	48	1 69	45
25	1 15	53	0 85	52	0 79	52	0 95	52	1 30	49	1 70	44
26	1 14	52	0 84	53	0 79	52	0 96	51	1 30	50	1 71	45
27	1 13	52	0 83	52	0 79	52	0 96	52	1 30	48	1 71	44
28	1 12	53	0 82	53	0 79	52	0 97	52	1 30	48	1 72	47
29	1 12	52	0 81	52	0 79	52	0 98	52	1 33	47	1 72	47
30	1 12	53	0 81	53	0 79	52	0 99	52	1 35	48	1 72	41
31	1 10	53	0 81	53			0 99	52			1 73	44

N. B. — Le altezze sono notate a metri e centimetri. — La temperatura è misurata a gradi del termometro centigrado.

5. Questa indipendenza dell'altezza dalla temperatura merita grande considerazione; poichè, essendo funzioni di variabili, fra le quali non esiste alcun rapporto di causalità, bisogna che per ciascuna si trovi la ragione dei mutamenti in somme di fattori, che non hanno fra loro alcun ligame. Anche a credere che l'altezza dell'acqua dipenda dalla legge della caduta delle piogge, conviene ammettere che l'infiltrazione accada a tale profondità, ove non si può tenere più verun conto delle tre cause principali, che intervengono nel regíme delle sorgenti. E, come l'abbondanza delle piogge e la loro ripartizione nel corso dell'anno entrano nel numero di queste cause, così bisogna concludere che, o l'attività dell'evaporazione, o la facilità di scolo alla superficie del suolo, subiscano delle modifiche, che a noi sfuggono. In conchiusione io inclinerei piuttosto a credere che la distribuzione delle piogge non sia il primo e solo fattore, che determina la variazione dell'altezza dell'acqua.

6. Per ciascun mese le altezze dell'acqua sono state riportate tutte in una curva, le cui coordinate segnano sull'asse della x il giorno del mese, e sull'asse dell'y l'altezza raggiunta dall'acqua. Sono stato indotto a questo lavoro pazientissimo, perchè è noto quanto più facile ed evidente riesce il paragone, se istituito tra curve, anzichè tra numeri.

7. Dalle tracce grafiche, che esprimono le variazioni dell'altezza, durante i giorni di ciascun mese, è facile desumere che nel 1871 il mese che raggiunge il massimo (2^m,07) è Marzo, ed il mese che si mantiene più basso è Ottobre (0^m,71). — Nel 1872, sebbene Marzo non dia che un massimo (1^m,50) eguale presso a poco a quelli di Gennajo, Febbrajo ed Aprile, pure si conserva a questa altezza più costantemente, dando una oscillazione minima espressa dal numero 0^m,02, differenza tra un massimo ed un minimo: e così, anche in quest'anno, l'Ottobre, sebbene non si conservi più basso di tutti, pure rientra molto regolarmente nel mese di Settembre, di cui segue il movimento di ascensione, che si continua poi nel Novembre. — Nel 1873 i fatti sono molto simili a quelli del 1872 ed i massimi sono raggiunti e sostenuti nei mesi di Gennajo, Febbrajo, Marzo, Aprile e Maggio, con una oscillazione in Marzo appena di 0^m,02, mentre la minima altezza dell'acqua si verifica in Novembre, offrendo un'oscillazione meno cospicua in Settembre ed Ottobre. — Nel 1874 Marzo mantiene il sopravvento con un'altezza di 2^m,01, ma Aprile offre un'oscillazione meno spiccata (0^m,03); e Settembre e Ottobre, sebbene molto bassi, non lo sono come Gennajo, che fa eccezione. — Nel 1875 e 1876 i mesi, in cui l'acqua è meno alta, sono anche Settembre ed Ottobre, ma fra i quattro mesi (Gennajo, Febbrajo, Marzo, Aprile), che abbiamo visto disputarsi il massimo di livello, è Gennajo che vince. Questo fatto non deve recar maraviglia, se viene posto in rapporto con un altro costante fenomeno cui cenneremo in seguito, il quale mostra come ogni mese è, direi, preparato da quello che lo precede; onde i due mesi di Gennajo, in questi anni, sono portati ad un massimo dal Novembre e dal Dicembre antecedente. — Nel 1877 torna più alto Aprile, e Marzo si mantiene anche abbastanza elevato, ma Ottobre torna anche a sua volta più basso, quasi vi fosse tra questi mesi una relazione di compenso. — Nel 1878 finalmente, Marzo ed Aprile si conservano, con pari costanza, i più alti riguardo agli altri mesi.

8. In tutte queste variazioni, per cui alcuni mesi, quasi costantemente, offrono le massime altezze d'acqua ed altri le più basse, è difficile notare repentini passaggi. Anzi la costanza del lieve e progressivo innalzamento od abbassamento è notevolissima; e ciò dimostra, fino ad un certo punto, che cause repentine non devono influire in tali fenomeni di oscillazione, onde bisogna riconoscerne la ragione in forze, il cui influsso sia moderato e governato da qualche legge.

Non io starò a discutere quali cause, e quante, e fra esse quali più degne di nota, possano conferire, ed in che misura ognuna, a dare l'oscillazione più o meno costante; ma certamente la somma di tutte queste cause fornisce tale una media di risultati, che non si deve affermarla senza potercela spiegare. Io cennerò in seguito l'ipotesi, che a me pare più probabile per spiegare questi fatti; ma non vorrei perciò ligare al valore di quella ipotesi la validità del fenomeno, così com'è da natura consacrato.

9. Per ogni anno ho costruita una tavola, nella quale va tracciata la linea delle oscillazioni tra le massime e le minime altezze raggiunte nei diversi mesi. Essa dimostra:

A) che vi ha alcuni mesi, in cui la variazione tra un massimo ed un minimo è considerevole, mentre in altri è inapprezzabile.

B) che molto approssimativamente queste oscillazioni si corrispondono, non dico in tutti gli anni con uniformità inappuntabile, ma certo con una modalità di ondulazione, che in media è la stessa per tutte.

10. Ho riportato in un sol quadro le massime e minime altezze mensili, ed ho tradotti i numeri in linee, il cui paragone fa scorgere (Tav. 3ª di ogni anno) che alcune volte la traccia dei minimi cammina quasi parallela a quella dei massimi, altre volte no.

11. Le osservazioni innanzi esposte dimostrano, come dicevamo, che, data nel pozzo una quantità x di acqua, di altezza y, quest'altezza, durante il mese, cangia in mitissime proporzioni; mentre la variazione assoluta ha, tra mese e mese, una dipendenza e dai periodi di tempo e da tutte le altre cause, di cui si è discorso al paragrafo 5.

12. Ho, per ciascun mese degli anni osservati, calcolate le differenze tra i massimi ed i minimi, ed ho così avuta quella che io chiamo *ampiezza d'oscillazione*. Essa per conseguenza è data dalle distanze

$$xy \ , \ x_1y_1 \ , \ x_2y_2 \ \cdots\cdots \ , \ x_{10}y_{10} \ , \ x_{11}y_{11} \ , \ x_{12}y_{12}$$

tra le altezze massime e minime, ed è rappresentata dai seguenti numeri:

ANNI	Genn.	Febbr.	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Sett.	Ottobre	Nov.	Dicem.
1871	0,47	0,39	0,13	0,28	0,23	0,15	0,23	0,20	0,21	0,02	0,17	0,36
1872	0,23	0,07	0,02	0,05	0,05	0,04	0,20	0,28	0,04	0,20	0,35	0,37
1873	0,10	0,07	0,02	0,09	0,15	0,07	0,43	0,21	0,05	0,10	0,11	0,27
1874	0,17	0,75	0,29	0,03	0,13	0,07	0,13	0,15	0,04	0,04	0,18	0,20
1875	0,57	0,02	0,27	0,03	0,21	0,15	0,03	0,16	0,29	0,16	0,25	0,69
1876	0,15	0,14	0,06	0,14	0,11	0,09	0,21	0,12	0,14	0,18	0,00	0,23
1877	0,31	0,22	0,10	0,10	0,16	0,19	0,27	0,11	0,07	0,07	0,17	0,27
1878	0,41	0,09	0,05	0,07	0,14	0,17	0,23	0,11	0,22	0,24	0,39	0,70

13. Sommate le differenze di oscillazioni tra un massimo ed un minimo, e fattene le medie durante gli 8 anni, esse stanno come i seguenti numeri, tralasciando i doppii:

2 : 8 : 9 : 11 : 20 : 29 : 30 : 37.

Come si vede, le differenze tra i termini di questa serie non sono costanti tanto da poterla considerare come una progressione aritmetica, ma non sono nemmeno cospicue; e tra esse stesse passa una relazione molto semplice. Ciò induce a credere che le somme di oscillazioni, se comparate ad un periodo lunghissimo di anni, possono essere considerate prossimamente come eguali. Ed è noto nelle scienze che i fenomeni naturali vanno producendosi con una legge tale di successione, la quale, mentre è costante rapporto agli sterminati periodi della cronologia terrestre, pure ha l'apparenza di enorme variabilità, se ristretta ne'limiti dei pochi anni, che noi sogliamo considerare come periodi di lunghe osservazioni.

14. Ho in ultimo riportato un quadro, in cui, per ogni anno, sono raggruppate le medie altezze delle stagioni, ponendo nell'Inverno i mesi di Gennajo, Febbrajo e Marzo; nella Primavera i mesi di Aprile, Maggio e Giugno; nell'Estate i mesi di Luglio, Agosto e Settembre; nell'Autunno quelli di Ottobre, Novembre e Dicembre. Mi pare di poter affermare, come si può scorgere dai numeri, che le variazioni, relative od assolute, nell'altezza dell'acqua, non hanno alcun rapporto con le stagioni.

15. Una curva è molto degna di nota: quella che dà la traccia generale delle altezze medie mensili in ciascun anno. Dessa, oltre a mostrarci a colpo d'occhio quali siano i mesi che raggiungono i massimi e quali i minimi, ci dà ancora una volta la prova che le variazioni non si succedono repentinamente, e che non sono poi massimi nemmeno i limiti di oscillazione, tra'quali sono compresi questi abbassamenti ed innalzamenti.

16. Ciò, che in queste curve annue attira maggiormente l'attenzione, non è tanto il modo onde son generate, quanto il rapporto medio che esse offrono, se paragonate fra loro. Sebbene il numero degli anni, ripeto, è meschinissimo, pure è abbastanza notevole che la media dell'altezza di tutto il 1871 sta nei seguenti rapporti colle medie degli altri anni:

	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878
Medie annuali	1,276	1,360	1,327	1,474	1,452	1,240	1,142	1,066
Rapporto fra esse	1,00	1,08	1,04	1,16	1,13	0,97	0,89	0,83

Nella seconda linea di questo quadretto abbiamo assunta come 1 l'altezza dell'anno 1871, per rendere più semplici i rapporti da istituire cogli altri anni. Ne risulta questo, che, se facciamo la media complessiva degli anni 1872, 73, 74, 75, 76, 77 e 78, e la paragoniamo a quella del 1871, le due stanno fra loro come 1,00: 1,01.

Dunque, nel corso di 8 anni appena, si è avuto in media un aumento assoluto di 0,01 centimetri.

17. Di più, abbiamo fatte le medie di ogni mese, negli 8 anni, e così il paragone fra le diverse variazioni subíte nei singoli mesi è più sicuro. Le riassumo nel seguente prospetto:

	Genn.	Febbr.	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Sett.	Ottobre	Nov.	Dicem.
Medie mensili	1,43	1,64	1,68	1,63	1,52	1,37	1,20	1,00	0,86	0,80	0,89	1,15

Questo secondo rapporto riconferma i periodi di massimo e di minimo da noi segnalati e chiarisce anche più quella costanza di altezza, la quale, subendo minime variazioni rapporto al tempo, si conserva in tutto l'anno, onde la quantità x d'acqua contenutavi muta fra limiti ristrettissimi.

18. Il notevole fatto della quantità assoluta, che cresce cogli anni, sebbene in mite proporzione, ci mostra che le variazioni non ponno esser messe in rapporto con alcuna delle cause meteorologiche note. Laonde è impossibile non rimontare col pensiero a quelle cause stesse, che han fatto variare il livello del Tempio di Serapide a Pozzuoli, ed in genere a tutte quelle azioni geologiche, lente, poco note, ma che influiscono tanto nella produzione di alcuni fenomeni naturali, altrimenti inesplicabili.

19. Tornando al primo rapporto fra le altezze medie degli anni, il concetto, che io voglio mettere in rilievo, non è tanto quello della media delle altezze pigliate nei di-

versi anni e paragonate, ma piuttosto delle quantità d'acqua, che in media si son trovate a riempire il pozzo in ciascun anno. Mi spiego. Se s'immagini che in ogni anno la media quantità d'acqua di ciascun mese si fosse venuta accumulando alle altre dei mesi precedenti e sussecutivi, queste altezze, sommate, darebbero in ultimo una colonna liquida, che sarebbe:

Medie Mensili	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878
Gennajo	1,34	1,38	1,78	1,11	1,82	1,95	1,13	1,30
Febbrajo	1,76	1,48	1,78	1,58	2,05	1,81	1,37	1,34
Marzo	2,02	1,49	1,71	1,86	1,87	1,71	1,48	1,33
Aprile	1,85	1,47	1,77	1,76	1,76	1,60	1,56	1,31
Maggio	1,61	1,42	1,66	1,66	1,59	1,41	1,53	1,27
Giugno	1,38	1,35	1,55	1,57	1,42	1,30	1,34	1,09
Luglio	1,15	1,20	1,26	1,48	1,33	1,20	1,15	0,84
Agosto	1,01	0,95	0,95	1,40	1,24	0,99	0,86	0,67
Settembre	0,86	0,78	0,92	1,25	1,00	0,88	0,78	0,82
Ottobre	0,72	0,89	0,90	1,22	0,92	0,74	0,84	0,80
Novembre	0,76	1,17	0,99	1,31	1,13	0,62	0,68	0,72
Dicembre	1,10	1,54	0,88	1,44	1,30	0,78	0,89	1,30
SOMME	15,56	15,12	16,15	17,64	17,43	14,99	13,61	12,79

Ond'è che i numeri 15,56—15,12—16,15—17,64—17,43—14,99—13,61—12,79 esprimono come la quantità d'acqua è venuta variando, nel breve periodo di tempo da noi osservato; e queste variazioni, non avendo il significato di oscillazioni intorno a medie costanti, resta a noi il dovere di accettare il fatto nella sua forma, e piuttosto che cercarne la spiega, prevederne le conseguenze, divinando un futuro inscrutabile per altre vie.

20. Mi si conceda un calcolo.

Se l'acqua acquistasse costantemente in altezza un dippiù di $0^m,01$ per ogni 10 anni, dopo cento anni il suo livello sarebbe cresciuto di $0^m,1$; e, immaginando di 1 metro solo l'altezza odierna dell'acqua nel pozzo, essa, con questa legge di accrescimento, diventerebbe 1,10 dopo 100 anni. Dunque, per ogni cento anni avremmo lo innalzamento di 1 decimetro, e per conseguenza dopo 1000 anni l'acqua sarebbesi elevata di 1 altro metro al di sopra dell'attuale livello (fatto eguale ad 1^m), cioè si avrebbero nel pozzo 2 metri di acqua. Conservandosi costante questa legge basterebbero appena 10 mila anni per farne un lago.

È ciò nei limiti della probabilità? Vi sono cause costanti, che potranno nell'avvenire sostenere questo periodo di accrescimento?

Anno 1871

DATA	Gennajo Altezza	Gennajo Temp.	Febbrajo Altezza	Febbrajo Temp.	Marzo Altezza	Marzo Temp.	Aprile Altezza	Aprile Temp.	Maggio Altezza	Maggio Temp.	Giugno Altezza	Giugno Temp.
1	» »	»	1 56	9	1 95	12	2 01	9	1 71	17	1 46	25
2	1 08	13	1 56	8	1 96	12	1 94	10	1 67	17	1 44	25
3	» »	»	1 70	8	1 94	12	1 94	9	1 64	16	1 43	25
4	» »	»	1 73	8	1 99	13	1 94	9	1 62	16	1 43	25
5	1 17	13	1 74	8	1 99	12	1 93	10	1 63	17	1 42	25
6	1 21	12	1 74	9	2 03	13	1 92	10	1 65	17	1 42	24
7	» »	»	1 74	9	2 00	12	1 91	11	1 65	16	1 42	25
8	1 25	12	1 74	10	1 98	11	1 92	11	1 65	17	1 41	25
9	1 26	12	1 74	9	2 »	11	1 90	12	1 64	18	1 71	25
10	» »	«	1 32	9	2 02	11	1 87	13	1 65	18	1 40	25
11	1 30	11	1 83	9	2 05	11	1 86	14	1 68	19	1 40	25
12	» »	»	1 83	10	2 04	10	1 84	13	1 67	19	1 41	25
13	» »	»	1 83	10	2 05	10	1 82	14	1 65	19	1 40	24
14	1 42	11	1 83	10	2 03	10	1 85	13	1 63	19	1 39	24
15	1 55	11	1 83	10	2 03	10	1 85	14	1 61	19	1 37	24
16	1 52	11	1 85	10	2 05	10	1 85	14	1 60	20	1 36	24
17	» »	»	1 85	11	2 07	11	1 83	14	1 60	21	1 36	24
18	» »	»	1 85	11	2 06	12	1 84	14	1 59	20	1 35	24
19	» »	»	1 85	11	2 04	12	1 83	14	1 57	21	1 35	24
20	» »	»	1 86	11	2 03	12	1 83	14	1 57	21	1 35	24
21	1 53	11	1 86	12	2 »	12	1 82	15	1 57	20	1 35	24
22	1 53	10	1 88	12	2 02	11	1 83	15	1 56	20	1 34	24
23	1 53	9	1 88	11	2 02	11	1 82	15	1 56	21	1 34	23
24	1 54	10	1 90	11	2 02	11	1 80	15	1 56	21	1 33	23
25	1 54	9	1 91	12	1 98	10	1 77	16	1 52	22	1 33	22
26	1 55	9	1 93	12	2 02	10	1 75	16	1 52	22	1 33	23
27	1 54	9	1 95	12	2 00	10	1 75	16	1 59	23	1 33	21
28	1 55	10	1 95	11	2 »	10	1 75	16	1 49	24	1 33	23
29	1 55	10			2 02	10	1 73	16	1 49	24	1 32	22
30	1 55	10			2 02	10	1 73	16	1 48	24	1 31	22
31	1 55	10			2 01	10	1		1 48	24		

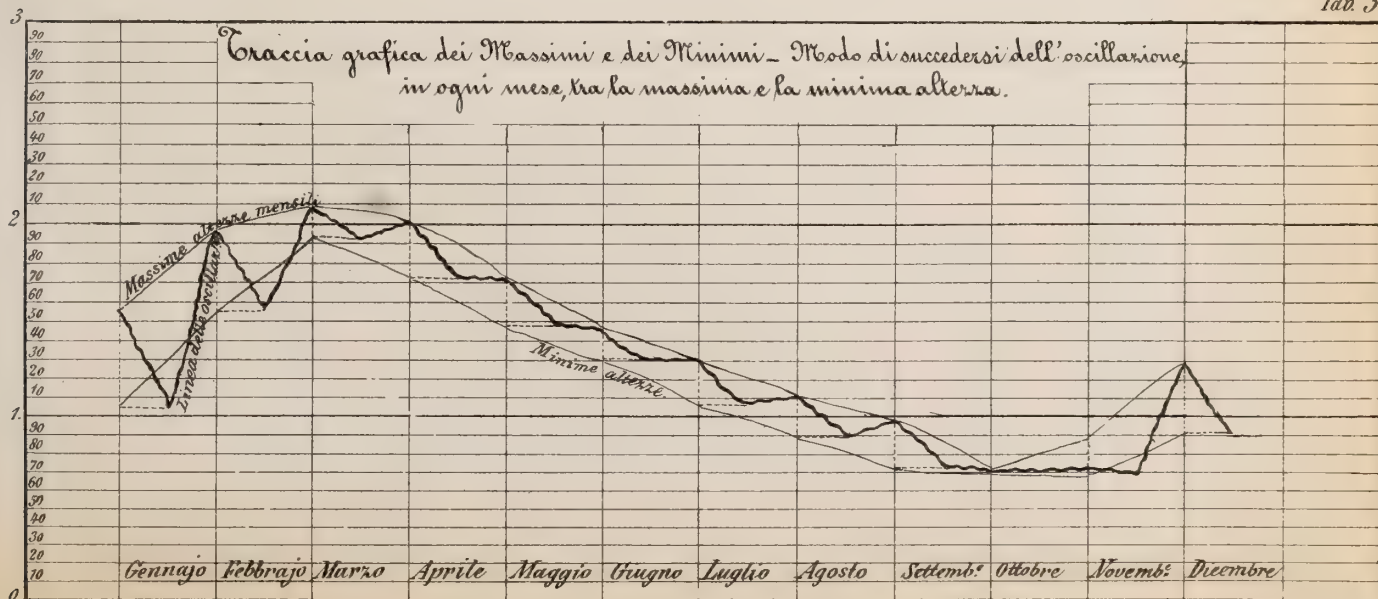
DATA	Luglio Altezza	Luglio Temp.	Agosto Altezza	Agosto Temp.	Settembre Altezza	Settembre Temp.	Ottobre Altezza	Ottobre Temp.	Novembre Altezza	Novembre Temp.	Dicembre Altezza	Dicembre Temp.
1	1 30	24	1 09	25	0 82	23	0 73	17	0 72	13	0 91	13
2	1 29	21	1 09	25	0 85	22	0 73	17	0 72	13	0 »	«
3	1 27	22	1 03	25	0 82	21	0 72	17	0 »	»	0 »	»
4	1 25	22	1 03	25	0 82	21	0 72	17	0 »	»	0 »	»
5	1 24	22	1 03	25	0 83	20	0 72	17	0 »	»	0 »	»
6	1 20	21	1 02	24	0 85	19	0 72	17	0 72	12	0 98	13
7	1 20	21	1 10	25	0 87	19	0 72	17	0 72	13	0 98	13
8	1 19	22	1 08	26	0 90	19	0 71	17	0 71	14	0 99	14
9	1 18	22	1 07	26	0 90	19	0 71	17	0 71	14	0 »	»
10	0 »	»	1 05	26	0 90	18	0 71	17	0 71	13	0 »	»
11	0 »	»	1 05	26	0 92	19	0 71	16	0 72	14	0 »	»
12	0 »	»	1 05	26	0 94	18	0 71	16	0 72	14	1 02	15
13	0 »	»	1 03	27	0 94	17	0 72	14	0 73	15	1 03	14
14	0 »	»	1 01	27	0 96	18	0 72	13	0 73	14	1 04	14
15	0 »	»	1 00	26	0 95	18	0 72	13	0 75	14	1 04	16
16	1 10	23	1 00	26	0 96	16	0 72	15	0 75	14	1 04	17
17	1 10	24	1 00	26	0 96	15	0 73	14	0 77	13	0 »	»
18	1 09	23	1 00	26	0 95	15	0 72	14	0 77	13	0 »	»
19	1 08	24	0 98	26	0 84	15	0 73	15	0 80	14	0 »	»
20	1 07	25	0 96	26	0 86	14	0 73	15	0 80	15	0 »	»
21	1 07	24	0 98	25	0 86	17	0 73	15	0 83	15	1 09	14
22	1 08	25	0 98	24	0 85	17	0 73	14	0 84	14	1 11	14
23	1 08	25	0 98	24	0 79	17	0 73	14	0 84	13	1 13	15
24	1 08	26	0 98	24	0 79	17	0 69	12	0 »	»	1 15	14
25	1 08	26	0 97	24	0 79	17	0 71	15	0 »	»	1 18	17
26	1 07	26	0 98	23	0 78	17	0 71	15	0 86	14	1 20	14
27	1 08	26	0 95	23	0 76	17	0 72	15	0 »	»	1 23	14
28	1 08	26	0 95	23	0 76	17	0 73	15	0 »	»	1 21	14
29	1 09	26	0 95	23	0 75	17	0 72	15	0 »	»	1 24	14
30	1 09	26	0 92	22	0 15	17	0 72	14	0 88	14	1 27	14
31	1 09	26	0 90	22	0		0 72	14				

Anno 1871.

Tav. 1.ª

Tav. 2.ª

Tav. 3.ª

Cromolit. V. Steeger.

Anno 1872.

Tav. 1.ª

Tav. 2.ª

Tav. 3.ª

Cromolit. V. Steeger.

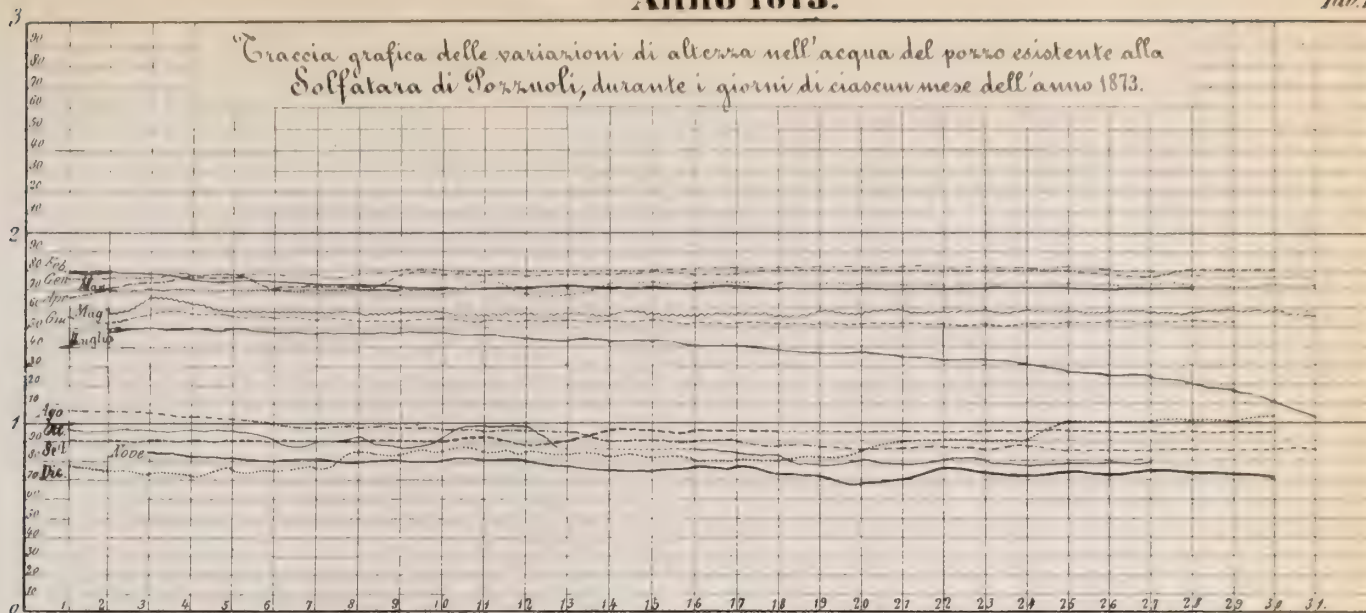
Anno 1872

DATA	Gennajo Altezza	Gennajo Temp.	Febbrajo Altezza	Febbrajo Temp.	Marzo Altezza	Marzo Temp.	Aprile Altezza	Aprile Temp.	Maggio Altezza	Maggio Temp.	Giugno Altezza	Giugno Temp.
1	1 27	13	1 49	10	1 50	12	1 50	10	1 45	16	*1 37	24
2	1 27	14	1 48	11	1 48	12	1 50	10	1 44	17	1 37	55
3	1 29	15	1 48	10	1 48	12	1 50	11	1 44	17	1 37	22
4	1 29	14	1 48	11	*1 47	12	1 49	11	1 44	18	1 36	26
5	1 29	15	1 48	10	1 48	12	1 49	11	1 43	18	1 32	25
6	*1 33	17	1 48	10	1 48	11	1 49	12	1 43	18	1 35	26
7	*1 34	12	1 47	10	1 50	11	1 49	12	1 43	19	1 35	25
8	*1 33	11	1 47	10	1 50	11	1 49	11	*1 43	19	1 45	24
9	*1 33	17	*1 46	11	1 50	11	1 49	12	1 42	19	1 35	24
10	*1 35	19	1 46	11	1 51	12	1 49	12	1 42	20	1 35	24
11	1 35	10	*1 45	11	1 51	12	1 49	13	1 42	20	1 35	24
12	1 38	10	1 45	11	1 51	12	1 49	13	1 42	21	1 36	23
13	1 39	10	*1 45	12	1 50	11	1 49	13	1 44	20	1 36	24
14	1 40	10	1 46	12	1 50	11	1 48	13	1 44	20	1 36	23
15	1 40	11	1 46	12	1 50	11	1 48	13	1 44	51	1 35	23
16	1 41	12	*1 49	11	1 49	11	1 48	14	1 44	21	1 35	23
17	1 42	11	*1 47	12	1 49	10	1 48	14	1 42	21	1 34	23
18	1 42	11	1 46	11	1 49	10	1 48	14	1 43	21	1 34	22
19	1 45	13	1 46	11	1 49	10	1 48	15	1 43	22	1 35	22
20	*1 43	14	1 46	10	1 49	10	1 48	15	1 42	22	1 35	23
21	1 43	13	1 47	11	1 49	10	1 48	14	1 42	23	1 35	23
22	*1 45	11	*1 47	10	1 49	10	1 48	15	1 42	23	1 35	24
23	1 46	11	1 47	11	1 50	11	1 47	16	1 42	22	1 34	23
24	*1 46	10	*1 47	12	*1 50	11	1 48	16	1 42	23	1 33	22
25	*1 47	10	1 49	13	*1 50	12	1 48	16	*1 42	24	1 33	22
26	*1 49	10	1 49	13	1 49	11	1 47	16	1 42	24	1 34	22
27	1 49	10	1 49	12	*1 49	11	1 45	16	*1 41	24	1 33	22
28	*1 50	10	1 51	13	1 49	11	1 45	16	1 42	35	1 34	22
29	1 50	11	1 52	13	1 49	10	1 45	17	1 41	25	1 33	22
30	1 49	11			1 49	10	1 45	17	*1 41	25	1 33	22
31	1 49	11			1 50	10			1 40	25		

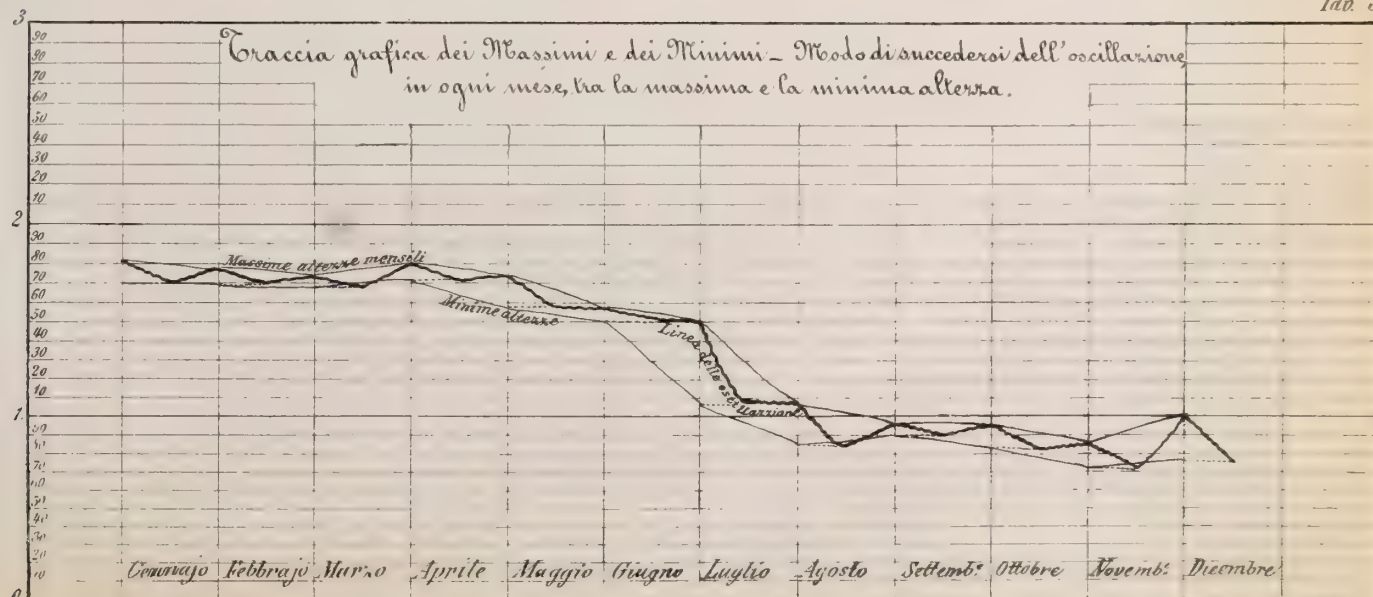
DATA	Luglio Altezza	Luglio Temp.	Agosto Altezza	Agosto Temp.	Settembre Altezza	Settembre Temp.	Ottobre Altezza	Ottobre Temp.	Novembre Altezza	Novembre Temp.	Dicembre Altezza	Dicembre Temp.
1	1 30	22	1 09	25	0 80	23	0 79	19	1 00	14	1 36	13
2	1 30	22	1 08	25	0 80	23	0 80	19	1 03	13	*1 38	14
3	1 29	23	1 04	25	0 80	22	0 80	19	1 05	14	*1 42	13
4	1 25	24	1 02	25	0 80	22	0 80	19	1 04	13	1 46	13
5	1 25	23	1 02	25	0 80	22	0 80	19	1 07	14	1 46	12
6	1 24	23	1 00	25	0 80	21	0 80	19	1 10	14	1 49	12
7	1 22	23	1 00	24	0 80	21	0 81	18	1 13	14	1 50	12
8	1 23	24	1 00	24	0 80	21	0 81	18	1 16	14	1 51	12
9	1 24	24	1 00	24	0 80	21	0 81	18	1 19	14	1 52	12
10	1 22	24	0 99	24	0 80	21	*0 80	18	1 20	14	1 53	11
11	1 22	25	0 98	24	0 80	20	*0 88	18	1 20	14	1 55	11
12	1 21	25	0 97	23	0 80	20	*0 89	18	*1 22	14	1 55	11
13	1 21	25	0 95	22	0 80	20	0 88	18	*1 25	14	1 57	11
14	1 21	25	0 94	22	0 79	19	0 89	17	*1 26	14	1 60	12
15	1 21	24	0 93	22	0 79	18	0 89	19	*1 29	13	1 63	12
16	1 20	24	0 92	22	0 79	19	0 89	19	1 29	12	1 44	11
17	1 20	24	0 91	23	0 79	19	0 89	17	1 28	12	1 65	11
18	1 20	25	0 90	24	0 77	19	0 90	18	*1 28	11	1 67	11
19	1 19	25	0 90	24	0 77	20	0 90	17	1 27	11	1 67	11
20	1 19	26	0 87	24	*0 76	20	*0 90	16	1 27	10	1 68	11
21	1 19	26	0 88	24	0 76	21	*0 90	17	1 29	11	1 68	10
22	1 18	26	0 86	24	0 76	21	*0 94	16	1 30	11	1 68	10
23	1 16	25	0 86	24	*0 78	21	*0 94	16	1 30	12	1 69	12
24	1 15	24	0 86	24	0 79	22	*0 94	15	*1 30	12	1 69	11
25	1 15	25	0 85	23	0 79	21	0 95	15	1 30	13	1 70	11
26	1 14	26	0 84	23	0 79	21	0 96	15	1 30	13	1 71	10
27	1 13	26	*0 83	23	0 79	21	0 96	14	1 30	12	1 71	11
28	1 12	26	0 82	23	0 79	20	0 97	14	1 30	12	1 72	11
29	1 12	25	0 81	23	0 79	21	0 98	15	1 33	12	1 72	10
30	1 12	25	0 81	23	0 79	20	0 99	14	1 35	12	1 72	11
31	1 10	26	0 81	23			0 99	15			1 73	10

Anno 1873

DATA	Gennajo Altezza	Gennajo Temp.	Febbrajo Altezza	Febbrajo Temp.	Marzo Altezza	Marzo Temp.	Aprile Altezza	Aprile Temp.	Maggio Altezza	Maggio Temp.	Giugno Altezza	Giugno Temp.
1	1 73	11	·1 77	9	1 70	13	1 74	19	1 74	16	1 59	26
2	1 75	11	1 76	9	1 70	12	1 74	10	1 74	17	1 59	26
3	1 76	10	·1 76	9	1 70	12	1 74	11	1 74	17	1 59	26
4	1 77	10	1 75	9	1 70	13	1 73	11	1 73	16	·1 59	26
5	1 77	10	1 75	10	1 70	14	1 73	11	1 72	16	1 59	27
6	1 78	10	1 74	9	1 70	14	1 74	12	1 72	15	1 59	27
7	1 78	11	1 73	10	1 70	13	1 74	13	1 72	15	·1 58	27
8	1 80	10	1 72	10	1 71	13	·1 74	14	1 71	16	1 57	27
9	1 80	9	1 72	10	1 71	12	1 76	13	1 70	17	1 56	26
10	1 80	10	1 72	10	1 71	13	1 76	14	1 70	18	1 56	26
11	1 80	10	1 72	11	1 72	13	1 76	13	·1 69	19	1 56	27
12	1 80	9	1 72	11	1 72	12	·1 78	14	1 69	20	1 56	26
13	1 80	9	1 72	11	1 72	12	1 78	15	1 68	21	1 55	25
14	1 80	8	·1 72	11	1 72	12	1 78	15	1 67	21	1 55	25
15	1 81	8	1 71	11	1 72	11	1 80	15	1 67	21	1 55	25
16	1 81	9	1 71	11	1 72	11	1 80	15	1 67	21	1 54	26
17	1 81	8	1 70	12	1 72	11	1 80	15	1 67	19	1 54	25
18	·1 81	9	1 70	12	1 72	12	·1 82	14	1 64	19	1 54	24
19	·1 81	9	1 70	11	1 70	12	·1 82	14	1 63	20	1 54	24
20	·1 81	10	1 70	11	1 70	10	·1 82	15	·1 62	21	1 54	24
21	·1 81	9	1 70	12	1 70	11	·1 81	15	·1 61	21	1 54	24
22	·1 82	10	·1 70	11	1 70	11	1 81	14	·1 61	22	1 54	24
23	·1 83	10	1 70	10	1 70	11	·1 81	14	1 61	23	1 53	23
24	1 81	10	1 70	11	1 70	12	1 81	15	1 60	23	1 53	23
25	1 80	9	1 70	10	1 70	11	·1 80	14	1 59	24	1 53	23
26	·1 80	9	·1 70	11	1 70	10	1 79	15	1 59	24	1 53	24
27	1 79	10	·1 70	12	1 70	10	1 79	15	1 59	25	1 53	23
28	·1 78	9	·1 70	12	1 72	11	1 79	16	1 58	24	1 53	24
29	1 78	10			1 72	10	·1 77	15	·1 58	25	1 52	24
30	1 78	10			1 72	10	1 76	16	1 59	25	1 52	23
31	·1 77	10			1 72	10			1 59	25		

DATA	Luglio Altezza	Luglio Temp.	Agosto Altezza	Agosto Temp.	Settembre Altezza	Settembre Temp.	Ottobre Altezza	Ottobre Temp.	Novembre Altezza	Novembre Temp.	Dicembre Altezza	Dicembre Temp.
1	1 50	23	1 06	26	0 90	25	0 95	22	·0 85	16	0 75	13
2	1 50	22	1 06	26	0 90	24	0 95	21	·0 84	16	0 76	13
3	1 50	21	1 03	24	0 90	24	0 95	21	·0 83	16	0 77	12
4	1 50	21	1 02	25	0 90	25	0 94	20	0 82	16	0 77	12
5	1 48	21	1 00	25	0 90	25	0 94	20	0 82	16	0 79	12
6	1 48	23	0 97	26	0 91	25	» »	»	0 81	16	0 80	11
7	1 46	22	0 96	26	0 91	24	» »	»	·0 81	16	0 85	11
8	1 45	23	0 96	25	0 91	24	» »	»	·0 81	15	0 86	12
9	1 44	23	0 95	24	0 91	25	0 93	19	0 80	16	0 86	11
10	1 43	23	0 94	24	0 91	25	0 93	19	0 80	16	0 87	12
11	1 42	23	0 94	23	» »	»	·0 92	20	0 79	15·	0 87	12
12	1 40	23	·0 92	23	» »	»	0 92	18	0 78	14	0 87	11
13	1 39	24	0 93	24	» »	»	0 92	17	0 78	14	0 87	11
14	1 37	24	0 90	24	0 92	25	0 92	18	0 78	15	0 88	11
15	1 37	25	0 90	24	0 92	25	0 90	18	·0 78	13	0 89	11
16	1 34	25	0 90	24	0 92	24	» »	»	0 78	14	0 97	12
17	1 33	25	0 89	24	0 93	24	» »	»	0 77	14	0 90	12
18	1 31	24	0 88	24	0 93	23	» »	»	0 77	15	0 90	12
19	1 30	24	0 88	25	0 93	24	» »	»	0 77	15	0 91	12
20	1 27	23	0 87	25	0 93	23	0 87	17	0 77	14	0 91	11
21	1 25	23	0 87	25	» »	»	0 87	16	0 76	14	0 93	10
22	1 24	23	0 87	24	» »	»	0 87	17	·0 76	13	0 94	19
23	1 23	23	0 87	24	» »	»	0 87	17	0 76	16	0 95	10
24	1 20	23	0 86	24	·0 94	23	0 87	16	0 75	14	0 96	19
25	1 20	23	0 86	24	0 94	23	0 87	17	0 75	14	0 97	19
26	1 20	22	0 86	25	0 94	21	0 86	17	0 75	13	0 98	19
27	1 18	23	0 86	25	0 95	22	·0 86	16	0 75	13	0 99	10
28	1 18	24	0 85	24	0 95	22	·0 86	15	0 75	13	1 00	10
29	1 14	24	0 85	24	0 95	22	·0 86	15	0 74	13	1 00	10
30	1 10	25	0 87	24	0 95	21	·0 86	15	0 74	13	1 01	10
31	1 07	25	0 89	25			0 85	16			1 02	10

Anno 1873.

Tav. 1ª

Tav. 2ª

Tav. 3ª

Anno 1874.

Cromolit. V. Steeger.

Anno 1874

DATA	Gennaio Altezza	Gennaio Temp.	Febbrajo Altezza	Febbrajo Temp.	Marzo Altezza	Marzo Temp.	Aprile Altezza	Aprile Temp.	Maggio Altezza	Maggio Temp.	Giugno Altezza	Giugno Temp.
1	1 03	11	1 22	9	2 01	11	1 73	10	1 72	15	1 61	27
2	1 04	11	1 24	9	2 01	11	1 73	10	1 71	16	1 61	27
3	1 05	10	1 26	9	2 00	11	1 73	10	1 71	16	1 61	27
4	1 06	10	1 27	10	1 99	10	1 73	10	1 72	15	1 60	27
5	1 07	10	1 29	9	1 97	10	1 73	10	1 72	15	1 59	26
6	1 08	10	1 33	9	1 97	10	1 73	9	1 73	16	1 59	26
7	1 09	11	1 35	0	1 97	10	1 72	9	1 73	16	1 59	25
8	1 09	11	1 36	11	1 96	11	1 72	10	1 71	17	1 59	25
9	1 10	11	1 39	11	1 95	11	1 73	11	1 70	19	1 58	25
10	1 12	9	1 40	11	1 94	11	1 73	11	1 69	18	1 58	23
11	1 13	9	1 41	11	1 93	12	1 73	12	1 69	18	1 57	23
12	1 14	9	1 44	10	1 91	13	1 72	12	1 68	19	1 58	21
13	1 15	10	1 45	10	1 90	14	1 72	13	1 68	20	1 58	23
14	1 16	11	1 50	10	1 89	14	1 72	13	1 67	21	1 57	23
15	1 16	10	1 54	10	1 88	14	1 72	13	1 66	22	1 57	24
16	1 16	9	1 59	9	1 87	11	1 72	13	1 66	23	1 56	25
17	1 16	10	1 63	9	1 85	11	1 71	12	1 65	22	1 56	25
18	1 16	11	1 65	9	1 84	12	1 71	12	1 64	22	1 56	26
19	1 16	10	1 68	9	1 82	11	1 71	11	1 63	23	1 56	26
20	1 17	10	1 70	9	1 80	11	1 72	13	1 63	24	1 56	26
21	1 17	11	1 74	10	1 78	10	1 72	13	1 62	24	1 55	26
22	1 18	11	1 75	10	1 77	10	1 72	14	1 61	24	1 55	25
23	1 18	10	1 81	10	1 76	10	1 72	14	1 61	24	1 54	24
24	1 19	9	1 85	11	1 76	10	1 71	14	1 61	25	1 55	24
25	1 18	10	1 87	11	1 75	10	1 71	14	1 60	25	1 56	24
26	1 19	9	1 90	11	1 74	10	1 70	14	1 60	24	1 56	25
27	1 20	10	1 94	11	1 73	10	1 70	13	1 61	25	1 56	24
28	1 19	10	1 97	11	1 73	10	1 70	13	1 60	25	1 55	24
29	1 20	10			1 72	10	1 70	14	1 60	26	1 55	25
30	1 20	9			1 72	10	1 70	14	1 60	26	1 55	25
31	1 20	9			1 72	10			1 60	26		

DATA	Luglio Altezza	Luglio Temp.	Agosto Altezza	Agosto Temp.	Settembre Altezza	Settembre Temp.	Ottobre Altezza	Ottobre Temp.	Novembre Altezza	Novembre Temp	Dicembre Altezza	Dicembre Temp.
1	1 55	24	1 47	23	1 26	25	1 24	24	1 23	17	1 37	12
2	1 55	23	1 48	24	1 26	25	1 24	23	1 23	17	1 37	13
3	1 54	24	1 48	25	1 24	26	1 24	23	1 23	17	1 37	14
4	1 54	25	1 39	25	1 24	26	1 24	22	1 23	17	·1 37	14
5	1 55	25	1 39	26	1 24	25	1 24	22	1 24	16	1 37	15
6	1 54	26	1 38	25	1 24	25	·1 23	23	1 24	16	1 36	14
7	1 54	27	1 39	25	1 23	24	·1 22	21	·1 23	15	1 36	14
8	1 54	26	1 37	25	1 23	24	1 17	21	·1 23	16	1 36	13
9	1 54	26	1 37	26	1 23	25	1 18	21	·1 23	16	·1 36	13
10	1 54	25	1 38	26	·1 23	23	1 17	20	1 23	16	·1 36	13
11	1 54	24	1 38	25	1 23	24	1 17	21	·1 23	15	1 34	12
12	1 53	23	1 39	24	1 23	24	1 17	21	·1 23	16	·1 50	11
13	1 52	20	1 38	25	1 23	24	1 16	20	·1 23	16	·1 50	12
14	1 52	25	1 38	26	·1 23	23	1 16	20	·0 »	»	·1 51	12
15	1 51	24	1 38	26	·1 27	23	1 16	20	·0 »	15	·1 51	11
16	1 50	24	1 38	24	·1 27	23	·1 16	20	·0 »	14	·1 52	11
17	1 50	24	1 38	25	·1 27	22	1 20	23	1 22	13	·1 52	10
18	1 48	23	1 38	25	1 27	22	1 23	23	1 22	13	·1 52	11
19	1 48	23	1 38	25	1 25	23	1 23	23	1 22	13	·1 51	11
20	1 48	23	1 38	25	1 24	22	1 23	23	·1 22	13	·1 51	11
21	1 48	25	1 38	24	1 24	23	1 22	22	·1 22	13	·1 51	10
22	1 47	25	1 38	24	1 24	23	·1 22	21	1 22	12	·1 50	10
23	1 47	24	1 38	24	1 23	22	·1 21	20	1 33	11	1 50	9
24	1 47	24	1 35	25	1 23	24	·1 22	19	·1 33	11	1 50	8
25	1 46	24	1 33	24	1 23	24	·1 22	18	1 33	9	1 59	9
26	1 45	24	1 33	25	1 23	24	·1 22	18	1 33	10	·1 50	9
27	1 46	25	1 33	25	1 24	25	·1 22	17	1 33	10	1 50	9
28	1 46	25	1 33	24	1 24	25	1 23	17	·1 37	10	1 50	10
29	1 42	26	1 33	24	1 24	25	1 23	17	1 40	10	1 50	10
30	1 42	25	1 33	24	1 24	24	1 23	17	·1 40	11	1 50	11
31	1 46	23	·1 33	25			1 23	18			1 54	10

Anno 1875

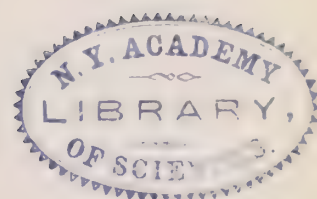
DATA	Gennajo		Febbrajo		Marzo		Aprile		Maggio		Giugno		Luglio		Agosto		Settembre		Ottobre		Novembre		Dicembre	
	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.
1	1 55	10	*2 06	9	2 01	10	*1 74	11	1 70	16	1 50	25	1 35	24	1 32	25	1 15	24	0 86	21	1 00	16	*1 26	12
2	1 55	10	*2 06	9	*2 01	10	1 74	12	1 70	16	1 50	25	1 35	24	1 32	25	1 15	25	0 86	20	1 00	16	*1 26	12
3	1 55	10	2 06	9	*2 01	10	1 74	13	1 70	16	1 50	25	1 35	24	1 32	26	1 15	23	0 85	20	1 00	15	*1 34	13
4	1 55	10	*2 08	9	*2 01	10	*1 84	13	1 70	47	*1 48	23	1 35	24	*1 30	26	1 15	23	0 85	21	1 00	15	*1 34	12
5	1 55	9	*2 06	9	2 01	10	*1 74	13	1 70	18	1 48	23	1 35	27	1 30	23	1 15	24	*0 85	21	*1 00	14	1 35	12
6	*1 55	10	*2 06	10	*2 01	9	*1 73	13	1 70	19	1 48	23	1 35	27	1 30	23	1 15	24	0 85	21	1 05	15	*1 35	11
7	1 55	10	*2 06	9	2 01	9	*1 73	13	1 68	19	1 48	23	1 34	28	1 24	23	1 15	24	0 85	21	*1 05	15	1 35	11
8	1 55	10	*2 06	7	2 01	10	*1 73	14	1 68	19	1 48	25	1 34	28	1 25	24	1 15	24	0 85	22	*1 07	15	1 37	11
9	1 54	10	2 06	7	2 00	11	1 72	14	1 68	22	1 48	24	*1 34	27	1 20	25	1 15	24	0 85	22	1 08	17	1 40	11
10	1 54	10	*2 06	7	2 »	11	1 72	15	1 68	22	1 48	25	*1 34	25	1 20	25	1 14	24	0 85	23	1 09	17	*1 41	10
11	1 60	10	2 06	7	2 »	12	1 72	15	1 68	21	1 48	25	1 33	25	1 20	25	1 14	24	*0 85	21	*1 10	18	1 42	10
12	1 60	11	2 06	6	*2 »	12	1 72	15	1 66	20	1 40	25	1 35	25	1 20	27	1 14	24	*0 85	21	1 11	17	1 42	11
13	1 61	11	2 06	7	2 01	12	*1 72	15	1 66	20	1 38	25	1 25	25	1 20	25	1 14	24	*0 85	20	1 12	17	1 43	10
14	1 61	11	2 06	7	*2 01	12	*1 72	15	1 66	20	1 38	25	1 35	25	1 20	27	1 10	24	*0 85	20	1 16	17	1 43	11
15	1 61	11	2 06	7	*2 00	12	1 72	13	1 50	20	1 38	25	1 25	25	1 20	27	0 88	24	*0 85	19	*1 16	16	1 52	10
16	1 61	11	2 06	7	*2 00	11	*1 72	13	1 50	20	1 38	25	*1 35	25	1 20	28	0 88	21	*0 85	19	1 16	17	1 53	10
17	*1 62	11	2 06	7	2 00	12	*1 72	14	1 50	21	1 36	25	1 35	24	1 20	28	0 38	22	0 84	19	1 16	16	1 53	11
18	1 62	11	*2 05	7	*2 00	12	1 72	14	1 50	21	1 36	26	*1 35	24	1 20	29	0 88	21	0 84	19	*1 18	15	1 54	11
19	2 10	12	*2 05	6	*2 00	11	1 72	14	1 50	21	1 36	26	1 35	22	1 20	28	0 88	21	0 84	20	1 21	15	1 70	10
20	2 10	12	*2 06	9	2 00	12	1 72	14	1 50	22	1 86	24	1 84	24	1 17	27	0 88	21	0 84	20	*1 22	15	1 70	10
21	*2 10	11	2 06	10	2 00	12	1 72	14	1 50	22	1 36	24	1 34	25	1 17	27	0 88	23	0 84	20	*1 22	14	1 70	12
22	*2 11	11	*2 06	11	2 00	11	1 72	14	1 49	24	1 36	24	1 34	24	1 17	26	0 87	23	0 34	20	*1 22	14	1 70	12
23	*2 10	11	2 04	10	1 30	11	*1 71	15	1 48	22	1 36	25	1 34	25	1 17	26	0 87	23	*0 84	19	*1 22	13	1 70	12
24	2 07	10	2 04	10	*1 80	10	*1 71	15	1 49	34	1 35	25	1 33	25	1 17	27	0 87	25	*0 84	18	*1 24	13	1 72	12
25	*2 07	10	*2 04	9	*1 80	10	*1 71	15	1 50	24	*1 35	22	1 33	25	1 16	27	*0 87	22	0 85	18	*1 24	13	1 72	12
26	2 07	10	*2 04	10	*1 80	9	*1 71	15	1 50	24	*1 35	22	1 33	26	1 16	27	0 87	20	0 86	18	*1 24	12	1 92	13
27	2 07	10	2 04	11	1 74	10	*1 71	25	1 50	23	1 35	23	1 33	25	1 16	26	0 87	20	0 86	17	*1 24	12	1 94	12
28	2 07	10	2 04	11	1 74	10	1 71	15	1 50	24	*1 35	22	1 32	26	1 16	26	*0 87	20	*0 87	17	*1 25	12	*1 95	11
29	2 07	9			*1 74	11	1 71	15	1 50	24	1 35	22	1 32	26	1 16	27	0 86	21	*0 86	17	*1 25	12	1 95	10
30	*2 07	9			*1 74	11	1 71	16	1 50	24	1 35	23	1 32	26	1 16	27	0 86	22	*0 86	17	*1 25	12	*1 95	10
31	*2 07	9			*1 74	11			1 50	24			1 32	26	*1 16	25			1 00	17			1 95	9

Anno 1875.

Tav. 1.a

Tav. 2.a

Tav. 3.a

Cromolit. V. Steeger.

Anno 1876.

Tav. 1.a

Tav. 2.a

Tav. 3.a

Cromolit. V. Steeger.

Anno 1876

DATA	Gennajo Altezza	Gennajo Temp.	Febbrajo Altezza	Febbrajo Temp.	Marzo Altezza	Marzo Temp	Aprile Altezza	Aprile Temp.	Maggio Altezza	Maggio Temp.	Giugno Altezza	Giugno Temp.	Luglio Altezza	Luglio Temp.	Agosto Altezza	Agosto Temp.	Settembre Altezza	Settembre Temp.	Ottobre Altezza	Ottobre Temp	Novembre Altezza	Novembre Temp.	Dicembre Altezza	Dicembre Temp.
	1																							
1	1 96	9	1 88	13	1 74	15	1 67	17	1 47	20	1 35	22	1 26	25	1 05	28	0 93	26	0 80	24	0 62	13	0 62	16
2	1 96	9	1 87	14	*1 74	14	1 67	17	1 47	19	1 35	22	1 26	25	1 04	28	0 93	26	0 80	22	0 62	16	0 62	16
3	1 96	10	1 87	14	1 73	14	1 66	17	1 47	19	1 34	23	1 26	25	1 03	28	0 93	26	0 80	23	0 62	15	0 64	15
4	*2 96	9	1 87	14	1 73	15	*1 66	17	1 46	20	*1 34	23	1 26	25	1 03	28	0 92	26	0 79	22	0 62	15	0 66	16
5	2 00	9	*1 87	12	1 73	15	*1 66	17	1 46	22	*1 34	23	1 25	26	1 03	28	0 92	26	0 79	23	0 62	15	0 70	17
6	*2 00	8	*1 87	11	1 72	15	*1 66	16	1 46	22	*1 33	24	1 25	26	1 02	29	0 92	26	0 78	23	0 62	13	0 73	17
7	*2 00	8	*1 86	10	1 72	15	*1 65	16	1 46	23	1 33	24	1 24	27	1 02	29	0 92	26	0 78	21	0 62	15	0 76	17
8	*2 00	9	*1 86	10	*1 72	15	*1 65	17	1 45	23	1 32	24	1 24	26	1 02	29	0 91	26	0 78	20	0 62	16	0 80	18
9	2 00	9	1 86	10	1 72	14	*1 65	16	1 45	21	1 32	24	1 24	26	1 01	29	*0 91	25	0 78	19	0 62	15	0 70	18
10	*2 00	10	*1 86	10	*1 72	15	*1 65	15	1 44	20	1 32	24	1 24	27	1 01	28	*0 91	25	0 78	18	0 62	15	0 70	16
11	*2 00	10	*1 86	11	*1 71	15	1 65	17	1 44	19	*1 32	23	1 23	27	1 01	29	*0 91	24	0 78	18	0 62	14	0 70	15
12	*2 02	11	1 86	11	*1 71	15	1 65	17	1 43	21	*1 31	22	1 23	27	1 01	29	0 91	23	0 78	18	0 62	11	0 70	16
13	*2 02	11	1 86	12	*1 71	15	1 65	17	1 42	21	*1 31	23	1 23	27	*1 01	28	*0 90	22	0 78	18	0 62	14	0 72	17
14	2 03	12	1 86	12	*1 71	15	*1 64	18	1 41	21	*1 31	23	*1 23	26	1 00	26	*0 90	23	0 77	17	0 62	14	0 73	15
15	2 03	12	1 85	12	1 71	15	*1 62	18	1 41	20	1 31	22	*1 22	26	1 00	27	*0 90	20	0 76	17	0 62	14	0 73	16
16	2 03	11	1 84	12	1 71	15	*1 62	18	1 41	19	1 30	22	*1 22	26	1 00	27	0 90	21	0 75	17	0 62	18	0 73	15
17	2 03	11	1 84	12	1 71	15	*1 62	17	1 41	20	1 30	21	1 22	26	1 00	27	0 90	23	0 73	17	0 62	16	0 73	15
18	2 03	10	1 84	13	*1 71	15	1 62	17	1 41	22	*1 30	21	1 22	26	1 00	27	0 90	23	0 71	16	0 62	14	0 73	15
19	2 03	11	1 80	13	*1 71	14	*1 62	17	*1 40	22	1 30	23	1 21	26	1 00	27	0 89	23	0 70	16	0 62	14	0 73	15
20	2 03	11	1 80	14	*1 71	13	1 62	20	*1 40	21	1 29	24	1 21	26	1 00	27	0 89	23	0 69	16	0 62	14	0 73	15
21	*2 01	10	1 79	14	*1 71	11	*1 62	19	*1 40	19	1 29	23	1 21	26	1 00	27	0 87	24	0 69	16	0 62	15	0 73	15
22	*2 01	10	1 78	15	*1 71	11	*1 61	20	1 39	20	1 28	24	1 21	27	0 99	27	0 85	24	0 69	14	0 62	15	0 73	14
23	*1 02	11	1 77	14	1 70	13	*1 61	20	1 39	20	*1 28	24	1 20	27	*0 98	27	0 83	23	0 68	14	0 62	14	0 75	15
24	1 94	12	1 77	15	1 70	16	*1 59	19	1 38	21	1 28	24	1 19	27	0 97	27	0 82	24	0 67	15	0 62	14	0 77	14
25	1 94	11	1 77	14	*1 70	15	1 58	18	1 38	21	1 27	24	1 18	27	*0 96	27	0 81	24	0 66	15	0 62	14	0 78	14
26	1 93	12	1 77	15	*1 70	14	1 57	19	*1 38	21	1 27	25	*1 17	25	*0 96	26	0 80	24	0 65	14	0 62	13	0 80	13
27	1 93	12	1 76	15	1 70	15	1 56	19	1 38	21	1 27	24	*1 16	27	0 95	25	0 80	24	0 64	15	0 62	13	0 83	13
28	*1 93	12	*1 76	15	1 70	16	1 55	18	1 37	21	1 27	25	1 14	27	*0 95	24	0 79	24	0 63	14	0 62	15	0 86	11
29	1 93	12	1 74	15	1 70	15	1 54	19	1 37	21	1 26	26	1 09	27	0 94	25	0 79	24	0 62	13	0 62	14	0 84	14
30	1 90	13			1 70	16	1 53	19	1 36	21	1 26	24	1 06	29	0 94	25	0 80	25	0 69	14	0 62	15	0 84	14
31	88	13			1 68	16			1 36	22			*1 05	29	0 93	25			0 62	13			0 85	12

Anno 1877

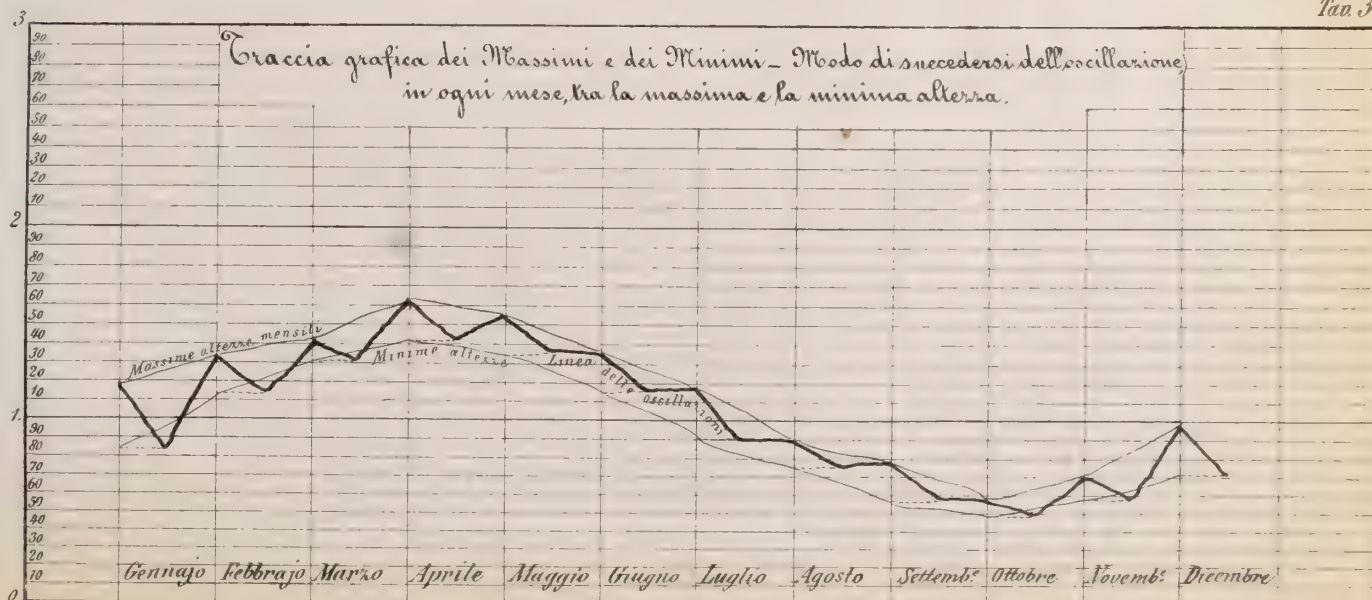
DATA	Gennajo Altezza	Gennajo Temp.	Febbrajo Altezza	Febbrajo Temp.	Marzo Altezza	Marzo Temp.	Aprile Altezza	Aprile Temp.	Maggio Altezza	Maggio Temp.	Giugno Altezza	Giugno Temp.	Luglio Altezza	Luglio Temp.	Agosto Altezza	Agosto Temp.	Settembre Altezza	Settembre Temp.	Ottobre Altezza	Ottobre Temp.	Novembre Altezza	Novembre Temp.	Dicembre Altezza	Dicembre Temp.
1	0 85	13	1 17	10	1 39	11	1 45	16	1 54	18	1 38	24	1 19	26	0 90	27	0 78	29	0 88	21	0 56	17	·0 71	15
2	0 87	14	1 18	11	1 43	10	1 47	16	1 54	18	1 37	23	1 18	26	0 90	27	0 78	30	·0 87	22	·0 56	15	·0 73	14
3	0 92	15	1 18	10	1 45	9	1 49	17	1 54	17	1 37	24	1 18	27	0 90	28	0 77	28	·0 87	20	0 57	19	·0 78	14
4	0 95	13	1 18	10	1 46	8	1 51	18	1 54	18	1 37	24	1 18	27	0 90	27	0 77	28	0 86	21	0 56	18	·0 80	14
5	0 95	15	1 19	10	1 47	10	1 52	18	1 54	19	1 37	24	1 18	26	0 90	26	0 76	26	·0 85	21	0 56	16	·0 77	13
6	0 95	15	1 26	10	1 47	10	1 52	18	1 54	18	1 37	24	1 18	27	0 89	23	0 76	26	·0 85	21	0 56	16	0 78	13
7	0 95	15	1 26	10	1 47	9	1 51	17	1 54	19	1 36	24	1 18	28	0 88	26	0 75	27	·0 84	20	0 61	16	0 80	13
8	0 96	15	1 28	11	1 47	9	1 52	17	1 54	18	1 36	25	1 18	28	0 88	26	0 74	27	·0 83	19	0 61	16	0 80	13
9	0 96	15	1 28	13	1 47	9	1 54	18	1 54	18	1 36	35	1 16	28	0 87	27	0 74	27	·0 82	19	0 62	16	·0 80	11
10	0 97	15	1 34	13	1 48	9	1 55	17	1 54	18	1 36	26	1 15	26	0 86	27	0 73	25	0 81	17	0 62	16	0 80	13
11	0 98	15	1 34	13	1 48	10	1 55	17	1 54	18	1 36	26	1 18	27	0 86	27	0 73	26	0 81	17	0 61	18	0 80	13
12	0 99	14	1 34	14	1 49	10	1 55	17	1 54	23	1 35	26	1 16	27	0 85	27	0 72	26	0 81	16	·0 62	16	0 80	13
13	1 00	14	1 35	13	1 40	10	1 55	17	1 53	21	1 34	26	1 19	26	0 85	28	0 76	26	0 82	19	0 61	18	0 80	13
14	1 01	13	1 36	14	1 40	12	1 55	17	1 52	20	1 34	26	1 19	27	0 84	27	0 79	27	0 82	20	·0 64	17	0 80	13
15	1 02	14	1 37	14	1 48	14	1 56	18	1 52	20	1 34	26	1 18	27	0 84	27	0 79	27	0 82	19	·0 64	17	0 81	14
16	1 04	14	1 38	14	1 48	15	1 57	17	1 52	20	1 34	25	1 16	27	0 84	28	0 79	26	0 83	20	0 63	17	0 81	14
17	1 05	13	1 39	13	1 47	15	1 57	17	1 52	22	1 32	25	1 15	28	0 84	28	0 79	25	0 83	19	0 64	17	0 82	10
18	1 05	13	1 35	14	1 48	16	1 58	18	1 52	21	1 32	24	1 12	27	0 83	28	0 79	25	0 83	20	0 64	18	0 84	9
19	1 06	15	1 37	13	1 48	16	1 59	17	1 52	20	1 31	20	1 11	26	0 83	30	0 77	23	0 84	19	0 66	18	0 84	9
20	1 07	15	1 36	13	1 49	15	1 60	17	1 50	20	1 31	20	1 11	26	0 82	30	0 75	22	0 84	18	0 66	18	0 86	9
21	1 09	10	1 35	13	1 49	15	1 61	16	1 58	19	1 33	22	1 11	27	0 82	29	0 74	24	0 84	17	0 67	17	0 87	9
22	1 09	11	1 35	13	1 49	15	1 60	16	1 56	19	1 39	23	1 10	28	0 82	29	0 74	26	0 84	17	·0 69	16	0 89	9
23	1 10	11	1 37	12	1 41	15	1 58	17	1 52	19	1 38	25	1 10	27	0 81	30	0 74	26	0 84	16	0 70	15	0 90	10
24	1 11	11	1 37	12	1 41	13	1 57	17	1 50	19	1 37	25	1 19	28	0 81	31	0 73	25	0 84	18	·0 66	15	0 91	9
25	1 12	11	1 35	13	1 41	15	1 57	18	1 50	20	1 36	25	1 98	29	0 81	30	0 73	23	0 84	18	0 70	16	·0 92	11
26	1 13	10	1 35	13	1 41	15	1 56	16	1 44	19	1 35	25	0 96	27	0 81	31	0 72	21	0 84	18	·0 69	14	·0 92	10
27	1 14	11	1 37	13	1 49	15	1 55	17	1 43	20	1 34	25	0 94	27	0 80	29	0 72	21	0 84	16	0 68	13	·0 95	11
28	1 15	11	1 37	12	1 49	15	1 56	17	1 42	20	1 32	26	0 92	27	0 80	30	0 70	20	0 84	18	·0 70	15	·0 97	12
29	1 15	10			1 42	15	1 56	17	1 41	21	1 30	26	0 99	26	0 79	30	0 70	20	0 84	17	0 72	15	0 98	11
30	1 15	12			1 44	15	1 56	18	1 46	23	1 29	27	0 99	26	0 79	29	0 70	21	0 84	17	·0 73	15	0 95	10
31	1 16	11			1 44	15			1 39	22			0 99	27	0 79	29			0 85	17			·0 94	11

Anno 1877.

Tav. 1.ª

Tav. 2.ª

Tav. 3.ª

Cromolit. V. Steeger.

Anno 1878.

Tav. 1.ª

Tav. 2.ª

Tav. 3.ª

Cromolit. V. Steeger.

Anno 1878

DATA	Gennajo			Febbrajo			Marzo			Aprile			Maggio			Giugno		
	Altezza		Temp.	Altezza		Temp.	Altezza		Temp.	Altezza		Temp.	Altezza		Temp.	Altezza		Temp.
1	*0	95	10	1	37	9	1	29	13	*1	34	13	1	26	19	1	14	23
2	0	97	9	1	37	9	1	29	13	*1	33	13	1	25	18	1	12	22
3	0	99	9	1	38	8	1	30	14	*1	33	14	1	26	19	*1	11	23
4	*0	99	9	1	37	8	1	30	15	1	31	14	1	27	21	*1	10	23
5	1	10	9	1	38	9	*1	31	15	1	31	16	1	25	21	1	10	23
6	1	15	11	1	38	8	1	30	15	1	32	15	1	24	20	1	09	23
7	1	12	11	*1	37	9	1	33	13	1	32	16	1	23	17	1	09	24
8	*1	17	12	1	36	9	1	33	15	1	31	17	1	23	18	1	06	22
9	*1	17	11	1	38	10	1	35	15	1	31	17	1	22	20	1	06	24
10	*1	18	11	1	31	11	1	34	14	1	33	18	1	22	20	1	04	24
11	*1	20	10	1	33	11	*1	33	15	1	34	18	1	21	21	1	04	24
12	*1	25	10	*1	34	11	*1	33	14	1	34	18	1	21	21	1	03	24
13	1	28	9	*1	34	11	*1	33	14	1	32	17	1	29	20	1	03	25
14	1	32	8	1	34	11	1	33	13	1	31	17	1	29	20	1	03	25
15	1	34	11	*1	34	11	1	33	13	1	29	18	1	29	21	1	03	24
16	1	36	10	1	34	12	*1	33	10	1	27	17	1	29	22	1	03	23
17	1	30	10	1	34	12	1	33	10	1	28	17	1	28	22	1	03	23
18	1	29	10	1	34	12	1	33	9	*1	29	17	1	28	22	1	03	23
19	1	28	9	1	32	12	1	34	11	1	29	18	1	28	23	1	03	23
20	1	28	10	1	33	13	1	34	11	1	29	19	1	28	23	1	01	23
21	1	31	9	1	34	13	1	32	11	*1	30	18	1	28	22	1	01	24
22	1	30	10	1	33	13	*1	32	13	1	30	17	1	28	22	1	00	23
23	1	90	10	1	35	13	*1	34	13	1	30	18	1	27	22	1	99	24
24	1	35	11	1	34	13	1	34	13	1	30	18	1	27	21	0	99	23
25	1	36	12	*1	36	13	*1	33	14	1	30	19	1	26	22	0	99	25
26	*1	35	10	1	37	13	*1	33	12	*1	30	17	1	26	21	*0	98	24
27	1	34	9	1	39	14	1	33	10	1	29	18	1	25	24	0	98	24
28	1	34	10	1	39	14	1	34	12	1	28	19	1	25	22	0	97	24
29	1	35	11				*1	34	13	1	27	19	1	24	22	0	97	25
30	*1	36	9				1	34	15	*1	27	18	1	24	23	0	97	25
31	*1	36	9				*1	34	14				1	23	22			

DATA	Luglio			Agosto			Settembre			Ottobre			Novembre			Dicembre		
	Altezza		Temp.	Altezza		Temp.	Altezza		Temp	Altezza		Temp.	Altezza		Temp.	Altezza		Temp.
1	*0	96	24	0	72	24	0	66	27	0	83	22	*0	54	18	0	84	14
2	0	96	24	0	71	25	0	66	26	0	83	21	*0	49	18	0	86	13
3	0	95	24	*0	69	25	*0	66	24	0	83	21	*0	48	15	0	88	10
4	0	94	23	0	69	24	*0	66	24	0	82	21	*0	49	13	0	89	12
5	0	92	22	0	68	24	0	66	25	0	82	20	*0	51	15	0	91	10
6	0	91	23	0	67	25	0	66	26	0	82	20	*0	53	15	0	93	10
7	0	88	23	0	66	24	0	66	26	0	82	20	*0	52	16	0	96	10
8	0	88	23	0	66	25	0	68	25	0	82	20	*0	53	16	0	99	10
9	0	87	23	0	65	25	0	70	25	*0	82	20	*0	54	15	1	01	10
10	0	87	24	0	64	25	*0	79	25	0	82	20	0	56	15	1	03	10
11	0	86	24	0	64	26	*0	79	25	0	82	21	0	57	15	1	05	10
12	0	86	24	0	63	26	*0	78	25	0	80	21	*0	59	16	1	08	10
13	0	86	24	0	62	25	*0	78	23	0	88	20	*0	60	16	1	09	10
14	*0	86	24	0	61	26	*0	78	23	*0	88	20	*0	61	18	1	10	10
15	0	85	24	0	60	25	*0	88	23	0	87	21	0	62	17	1	12	9
16	0	84	24	0	69	26	0	87	23	0	87	22	*0	63	16	1	14	9
17	0	83	26	0	68	26	0	87	24	0	87	21	*0	64	16	1	16	10
18	0	82	23	0	68	26	0	86	24	0	88	20	*0	66	16	1	19	11
19	*0	81	24	0	68	26	0	86	25	0	79	20	*0	67	16	1	21	10
20	0	80	24	0	67	26	*0	86	24	0	70	22	0	68	16	1	24	10
21	0	79	24	0	67	25	*0	86	23	0	71	23	*0	69	17	1	27	10
22	0	77	24	0	67	25	*0	85	23	0	72	22	*0	70	14	1	30	11
23	0	76	26	0	66	25	0	85	24	*0	73	20	0	71	15	1	34	12
24	*0	76	25	0	66	26	*0	85	22	*0	73	21	0	72	16	1	37	11
25	0	76	26	*0	66	24	*0	86	22	*0	73	21	0	74	15	1	42	9
26	0	75	25	0	66	25	0	86	21	*0	63	21	0	76	16	1	44	11
27	*0	75	25	0	66	25	0	85	21	*0	63	20	0	78	17	1	46	12
28	0	74	25	0	66	25	0	84	21	0	63	20	0	80	17	1	48	13
29	0	74	25	0	66	25	0	83	21	*0	64	19	*0	81	17	1	49	13
30	0	73	25	0	66	25	0	83	21	*0	64	19	*0	83	16	1	52	13
31	0	73	26	0	66	27				*0	64	18				1	54	13

MEDIE ANNUE

Dell'Altezza e della Temperatura.

ANNO	Gennaio		Febbrajo		Marzo		Aprile		Maggio		Giugno		Luglio		Agosto		Settembre		Ottobre		Novembre		Dicembre		Medie annue	
	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp.	Altezza	Temp	Altezza	Temp.		
1871	1 34	10°	1 74	9°	2 02	11°	1 80	13°	1 61	19°	1 35	22°	1 10	22°	1 01	24°	0 86	18°	0 70	14°	0 76	14°	1 10	14°	1, 276	15°, 83
1872	1 38	11°	1 48	11°	1 49	11°	1 47	14°	1 42	20°	1 35	21°	1 20	24°	0 95	23°	0 78	21°	0 89	16°	1 17	13°	1 54	11°	1, 360	16°, 33
1873	1 78	10°	1 78	10°	1 71	12°	1 77	13°	1 66	20°	1 55	23°	1 26	23°	0 95	24°	0 92	22°	0 90	17°	0 79	14°	0 88	11°	1, 359	16°, 58
1874	1 11	10°	1 58	10°	1 86	11°	1 76	12°	1 66	19°	1 57	24°	1 48	24°	1 40	24°	1 25	23°	1 22	20°	1 31	14°	1 44	11°	1, 470	16°, 83
1875	1 82	10°	2 05	9°	1 87	10°	1 76	13°	1 59	19°	1 42	23°	1 33	25°	1 24	25°	1 00	22°	0 92	19°	1 13	14°	1 30	11°	1, 452	16°, 66
1876	1 95	11°	1 81	12°	1 71	13°	1 60	16°	1 41	21°	1 30	23°	1 20	25°	0 99	26°	0 88	23°	0 74	18°	0 62	14°	0 78	13°	1, 240	17°, 91
1877	1 13	12°	1 37	12°	1 48	12°	1 56	16°	1 53	19°	1 34	23°	1 15	26°	0 86	27°	0 78	24°	0 84	18°	0 68	16°	0 89	13°	1, 142	18°, 16
1878	1 30	11°	1 34	11°	1 33	12°	1 31	16°	1 27	20°	1 09	24°	0 84	24°	0 67	25°	0 82	24°	0 80	20°	0 72	16°	1 30	12°	1, 066	17°, 91
Medie mensili	1,43	10°,6	1,64	10°,5	1,68	11°,5	1,63	14°,1	1,52	19°,6	1,37	22°,8	1,20	24°,1	1,00	24°,7	0,86	22°,1	0,80	17°,7	0,89	14°,3	1,15	12°,0	1, 295	17°,02

MEDIE MENSILI ED ANNUE

Dei MASSIMI e dei MINIMI.

ANNO	Gennaio Altezza	Gennaio Differ.	Febbrajo Altezza	Febbrajo Differ.	Marzo Altezza	Marzo Differ.	Aprile Altezza	Aprile Differ.	Maggio Altezza	Maggio Differ.	Giugno Altezza	Giugno Differ
1871	1 55	0,47	1 95	90,3	3 07	0,13	2 01	0,28	1 71	0,23	1 46	0,15
	1 08		1 56		1 94		1 73		1 48		1 31	
1872	1 50	0,23	1 52	0,07	1 50	0,02	1 50	0,05	1 45	0,05	1 37	0,04
	1 27		1 45		1 48		1 45		1 40		1 33	
1873	1 83	0,10	1 77	0,07	1 72	0,02	1 82	0,09	1 74	0,15	1 59	0,07
	1 73		1 70		1 70		1 73		1 59		1 52	
1874	1 20	0,17	1 97	0,75	2 01	0,29	1 73	0,03	1 73	0,13	1 61	0,07
	1 03		1 22		1 72		1 70		1 60		1 54	
1875	2 11	0,57	2 06	0,02	2 01	0,27	1 74	0,03	1 70	0.21	1 50	0,15
	1 54		2 04		1 74		1 71		1 49		1 35	
1876	2 03	0,15	1 88	0,14	1 74	0,06	1 67	0,14	1 47	0,11	1 45	0,09
	1 88		1 74		1 68		1 53		1 36		1 36	
1877	1 16	0,31	1 39	0,22	1 49	0,10	1 61	0,16	1 54	0,15	1 38	0,19
	0 85		1 37		1 39		1 45		1 39		1 19	
1878	1 36	0,41	1 38	0,09	1 34	0,05	1 34	0,07	1 27	0,14	1 14	0,17
	0 95		1 31		1 29		1 27		1 13		0 97	

ANNO	Luglio Altezza	Luglio Differ.	Agosto Altezza	Agosto Differ.	Settembre Altezza	Settembre Differ.	Ottobre Altezza	Ottobre Differ.	Novembre Altezza	Novembre Differ.	Dicembre Altezza	Dicembre Differ.	Medie annue		Variaz.
1871	1 30	0,23	1 10	0,20	0 96	0,21	0 73	0,02	0 88	0,17	1 27	0,36	Massimi	1,249	0,070
	1 07		0 90		0 75		0 71		0 71		0 91		Minimi	1.179	
1872	1 30	0,20	1 09	0,28	0 80	0,04	0 99	0,20	1 35	0,35	1 73	0,37	Massimi	1,341	0,175
	1 10		0 81		0 76		0 79		1 00		1 36		Minimi	1,166	
1873	1 50	0,43	1 06	0,21	0 95	0,05	0 95	0,10	0 85	0,11	1 02	0,27	Massimi	1,400	0,140
	1 07		0 85		0 90		0 85		0 74		0 95		Minimi	1,260	
1874	1 55	0,13	1 48	0,15	1 27	0,04	1 24	0,04	1 40	0,18	1 54	0,20	Massimi	1,560	0,172
	1 42		1 33		1 23		1 20		1 22		1 34		Minimi	1,388	
1875	1 35	0,03	1 32	0,16	1 15	0,29	1 00	0,16	1 25	0,25	1 25	0,69	Massimi	1,536	0,177
	1 32		1 16		0 86		0 84		1 00		1 26		Minimi	1,359	
1876	1 26	0,21	1 05	0,12	0 93	0,14	0 80	0,18	0 62	0,00	0 85	0,13	Massimi	1,312	0,132
	1 05		0 93		0 79		0 62		0 62		0 62		Minimi	1,180	
1877	1 19	0,27	0 90	0,11	0 79	0,07	0 88	0,07	0 73	0,17	0 98	0,37	Massimi	1,119	0,107
	0 92		0 79		0 72		0 81		0 56		0 71		Minimi	1,012	
1878	0 96	0,23	0 72	0,11	0 88	0,22	0 88	0,24	0 83	0,39	1 54	0,70	Massimi	1,136	0,233
	0 73		0 61		0 66		0 64		0 44		0 84		Minimi	0,903	

Medie

dei MASSIMI e dei MINIMI di ogni mese durante 8 anni

	Gennaio	Variaz.	Febbrajo	Variaz.	Marzo	Variaz.	Aprile	Variaz.	Maggio	Variaz.	Giugno	Variaz.	Luglio	Variaz.	Agosto	Variaz.	Settembre	Variaz.	Ottobre	Varioz.	Novembre	Variaz.	Dicembre	Variaz.		Annue	
Massimi	1,567	0,151	1,740	0,192	1,860	0,243	1,677	0,116	1,576	0,146	1,437	0,116	1.301	0,216	1,090	0,168	0.963	0,130	0.933	0,126	0,988	0,202	1.284	0,286	Massimi	1,331	0,151
Minimi	1,416		1,548		1,617		1,561		1.430		1,321		1,085		0,922		0,833		0,807		0,786		0,998		Minimi	1,180	

finita stampare il dì 30 maggio 1879

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

GLI STOMI E LE GLANDOLE DELLE PIANTE

RICERCHE ANATOMICHE

di GAETANO LICOPOLI

Memoria presentata all' Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche nella tornata del dì 7 Dicembre 1878

RICERCHE PRELIMINARI

I. — *Breve storia dell' argomento.*

I Botanici, da tempo abbastanza remoto, chiamano *stomi* alcuni organi, i quali si mostrano al microscopio come piccolissime aperture dell'epidermide, ed appellano *glandole* altri organi di semplicissima struttura, destinati a segregare sostanze particolari. Gli stomi si trovano maisempre incarnati con l'epidermide; le glandole hanno sedi diverse, qualche volta in punti centralizzati. La scoverta di queste due specie di organi è italiana, dovuta al Malpighi.

Questo illustre fondatore dell' anatomia vegetale, circa il 1686, vide nell' epidermide delle foglie del Pioppo, del Castagno, del Gelsomoro alcuni minimi organi, che chiamò borsette *(folliculi)*, le quali, secondo egli ne scrisse, *halitum vel humorem fundunt* [1]. — Dopo di lui il Link adoperò pel primo la parola *stoma*, per dinotare ciò che il Malpighi avea chiamato *folliculi seu loculi (borsette)*, ed il Rudolfi *pori* dell' epidermide [2]. Il Guettard li disse *glandole miliari* [3]; *glandole corticali* il De Saussure; *pori allungati* o *grandi* pori il Mirbel [4]. Ma per quest' ultimo la parola *stoma* non sonava lo stesso che *glandola* come pei suoi antecessori; giacchè egli parlò di *pori glandolosi* nell' epidermide, ed ammise altresì l' esistenza di glandole in altre parti della pianta, sebbene più per forza di ragionamento, che per osservazioni dirette. E non s' ingannava. Perciocchè in tempi posteriori l' idea delle glandole venne disgiunta da quella degli stomi; e molti Autori, che trattarono dell' epidermide, parlarono con più cognizione di causa di *glandole vescicolari*, di *peli glandolosi*, di *stomi* e di *glandole settali*.

Tutte queste appellazioni, meno l' ultima, si riferiscono ad organi inerenti all' epidermide, o che hanno stretta attinenza con essa.

Di questi stomi e di queste glandole tratta il presente lavoro, il quale tenderebbe

[1]) Malpighi — *Opera omnia etc.*, pag. 36. Londini 1686.

[2]) Rudolphi — *Anatomie der Pflanzen*, 1807 — (Da una memoria del Trécul intitolata: *De la cuticule à l'intérieur des végétaux*). Paris, *Comptes Rendus*, 1856.

[3]) Guettard — *Observations sur les plantes.* — Tom. I, pag. 34. Paris 1847 (Da una memoria del Trécul).

[4]) Mirbel — *Traité d' Anatomie et Physiologie végétale.* Vol. I, pag. 86.

ad allargare, non chè approfondire, e, dove occorresse, anche modificare le conoscenze finora possedute.

Intanto, prima di esporre i fatti all'uopo osservati, consentirà l'Accademia ch'io faccia un po' di storia o meglio una succinta analisi delle principali pubblicazioni, che hanno stretta attinenza col mio lavoro, non foss'altro, per mettere in evidenza le cose da me trovate, ovvero per far meglio rilevare il loro legame con ciò ch'è già passato nel dominio della scienza.

Dopo del Malpighi, del Linik, del Guettard e del Moldenhawer, il Treviran o, Fisiologo di Bonn, circa il 1821 ed in altra epoca posteriore [1]) (1835) avvisò che gli stomi, quali erano conosciuti dai suoi predecessori, fossero nelle parti verdi *gli organi della evaporazione ed a tutta probabilità dell' assorbimento degli umori.*

Il Brongniart nella sua prima memoria sulla struttura ed organizzazione della foglia e suoi rapporti con la respirazione [2]) ha fatto osservare che, mentre l'esperienze del Bonnet sulla respirazione delle foglie e quelle del Sonnebier e del De Saussure avrebbero gittato una viva luce sulla funzione respirativa, fino a quel tempo la struttura degli stomi non era ben determinata; e che in ordine alla quistione, surta in quell'epoca, se cioè in ciascuno stoma esistesse un foro *reale*, ovvero *apparente*, egli si mostrò dell' opinione dell'Hedwig, del Iurine, del Kieser, del Treviran o e del De Candolle; i quali ritennero esservi una verace apertura, contrariamente a quel che avevano affermato il Raspail ed il Turpin.

Lo stesso Brongniart in altro suo lavoro posteriore [3]) ammise, d'accordo col Krocher, Mirbel e lo stesso Treviranus, che gli stomi *sono semplici aperture dell' epidermide* circondate da due cellule di forma semilunare, le quali circoscrivono uno spazio di figura ellittica, in mezzo a cui sta una *membranella supercuticolare.*

Già l'Amici, a cui dopo il Malpighi fu dato a buon dritto il titolo di fondatore della fitotomia in Italia [4]), nei suoi studii sull'epidermide avea detto che sotto quest'organo in corrispondenza di ciascuno stoma si trovasse una piccola lacuna piena d'aria; e che nello spazio inscritto tra le cellule semilunari *(area ovale dell' epidermide)* esistesse un foro ora aperto ed ora chiuso, per cui, trattando della funzione degli stomi in genere, li ritenne destinati al passaggio dell'aria, senza però aver potuto determinare se per atto *inspirativo* od *espirativo*, ovvero per l'uno e per l'altro insieme; ma fu di credere che per la via degli stomi *non passi mai alcun liquido.*

Il Mirbel, fin dal 1814, epoca in cui ebbe redatto i suoi elementi di Botanica, esaminò gli stomi in molte piante e rimase lungo tempo dubbioso se l'apertura stomatica fosse reale od apparente; e poi riesaminato detti organi con più potenti mezzi diottrici nel *Larix americana*, Michx., s'accorse che in luogo d'una apertura reale, come in altri *Pini* ed *Abeti*, v'era *una piccola* elevazione cellulare convessa, ciò lo fece propendere verso l'idea d'una apertura apparente.

Ed ancora lo stesso autore nella sua celebre memoria sulla *Marchantia polymorpha* descrisse alcune aperture dell' epidermide, che chiamò stomi, i quali, pur rinven-

[1]) Treviranus (Ludolfe) — *Physiologie der Gewachse*—Bonne 1835, I, pag. 475 e 516—(Da una memoria del Trécul).

[2]) Brongniart — *Récherches sur la structure et sur les fonctions des feuille* — Première Memoire *sur la structure des feuille et sur ses rapports avec la réspiration des végétaux dans l'air et dans l'eau* — Ann. Sc. Nat. 1e Série, T. 21, 1830.

[3]) Brongniart — *Nouvelles récherches sur la structure de l'épiderme des plantes.* Ann. des Sc. Nat. 2e Série. T. I, pag. 65, 1834.

[4]) Amici G. B. — *Obsérvations microscopiques sur diverses éspèces des plantes.* Ann. des Sc. Nat. 1e Série, T. II, pag. 41.

gonsi in altre piante epatiche, mentre finora non se ne conosce esempio in veruna specie fanerogama [1]).

Riferì inoltre che il Brown nel suo lavoro sulle Proteacee ammise due specie di stomi: una con forame aperto, l'altra chiuso. E dichiarò che prima di lui il Treviranus avea scoperto nell'Epatiche, e, segnatamente nelle espansioni membranose della *Marchantia* e della *Targionia*, *alcuni fori dell'epidermide* molto visibili e comunicanti con cavità nel parenchima sottoposto; quali fori, quantunque di figura diversa delle aperture stomatiche nelle fanerogame, era forzato a tenere in conto di stomi — Essi sarebbero pel Treviranus *aperture tetragone tra le cellule epidermiche* destinate a permettere l'entrata dell'aria atmosferica nell'interno del parenchima sottoposto [2]).

II. — *La dottrina degli stomi nello stato presente della scienza.*

Nell'interesse dell'ordine cronologico, con cui ho cercato di procedere in questa rassegna, qui occorrerebbe ricordare le ricerche del Nägeli, fatte circa il 1842 [3]); ma di queste riassumerò i risultati, e forse più opportunamente in altra parte del mio lavoro, quando appunto mi occuperò delle glandole.

Intanto giova premettere che il Nägeli riconobbe negli stomi della *Marchantia* una particolare cavità, che chiamò *glandola cutanea* o *cavità respirativa;* ed ammise una analogia tra questi organi e gli stomi delle fanerogame in generale.

Il Mohl nel 1833 trattò pure degli stomi nelle Epatiche, e si riferì in gran parte alle ricerche del Mirbel su quelli nella *Marchantia polymorpha.* Ma egli, mentre attribuisce un gran merito a quest'illustre Botanico, per essere stato il primo a mettere in luce la vera struttura di quegli organi, non si mostra d'altronde troppo soddisfatto per le quistioni di dettaglio — Nella stessa epoca descrisse la formazione delle cellule semilunari stomatiche; e la pianta fatta segno alle sue indagini è stata il Giacinto orientale [4]). Con altra sua pubblicazione (1845) trattò novellamente il tema in discorso e cominciò dal riferire i risultati ottenuti da tre illustri Botanici: il Gasparrini in Italia, l'Hartig in Germania ed il Payen in Francia.

Il primo scovrì negli stomi del *Cereus peruvianus*, Haw., dell'*Euphorbia officinarum*, L., nonchè di altre piante carnose ed erbacee un organo vessicoloso fatto di membrana assai sottile pendente dal margine interno delle cellule semilunari stomatiche [5]).

L'Hartig contemporaneamente al Gasparrini descrisse questo stesso organo e lo credè formato di tre membrane, dichiarando che tale organo penetra più o meno nei meati del tessuto sotto-epidermico. Ed il Payen, in una sua scrittura del 1840 ritenne *che una continuazione immediata della cuticula penetri negli stomi e discenda a traverso le cellule del poro nella cavità respirativa, sotto la forma d'un tubo fortemente compresso nei lati. Questo tubo più o meno lungo, quando si trovasse, osserva il* Mohl, *tutto compreso nella spessezza del derma, sarebbe come quello descritto dal* Gasparrini.

Ed ecco viene la volta del Trécul! L'illustre Fitotomista francese esaminò i fatti

[1]) Mirbel — *Récherches sur la Marchantia polymorpha. 1831.*
[2]) Treviranus — *Vormischte scriften anatomischen etc.* Linnea, vol. 4, pag. 61.
[3]) Nägeli — *Ueber Spaltöffnungen. etc.* Linnea, vol. 16, 1842, pag. 247.
[4]) Mohl — *Sur l'origine des stomates* — (Extrait de la Linnea) *Ann. des Sc. Nat.* 2e Série, T. XIII, 1838.
[5]) Gasparrini — *Ricerche sulla struttura degli stomi.* Vedi Estratto dagli Atti della Reale Acc. delle Sc. di Napoli, Tornata del Febbraio 1842. — Ed ancora: *Nuove ricerche sulla struttura dei Cistomi*, Napoli 1844. Opuscolo isolato.

*

esposti dai tre osservatori, e ne dette un'interpretazione alquanto diversa. Egli credè che in alcune specie di piante esistesse un sistema cuticolare sotto-epidermico, il quale si comportasse ai reattivi chimici presso a poco come la cuticula propriamente detta, e che sarebbe da ritenersi come semplice fatto di penetrazione di questa, sebbene qualche volta giungesse a tapezzare la cavità respirativa [1]). Da ciò parrebbe si dovesse dedurre che il *Cistoma* del Gasparrini, il *tubolino compresso* del Payen, non possano assumere il carattere di organo particolare.

Ancora il Mohl, trattando delle varie quistioni agitate in quei tempi sulla struttura e funzione degli stomi, descrisse quelli dell'*Amaryllis formosissima*, L., e determinò meglio le parti, di cui essi stomi si credevano fin allora costituiti [2]).

Più recentemente Karl Czech intraprese nuovi studii sulla funzione degli stomi e, dopo avere riepilogato il lavoro del Mohl sul movimento dell'aprirsi e del chiudersi dei medesimi, esaminò l'azione della luce sulla materia verde e sull'amido contenuto nelle cellule semilunari [3]).

Dalle note bibliografiche fin' ora riportate rilevasi che l' anatomia degli stomi nelle Marchanziacee, dopo le ricerche del Nägeli, non ha ricevuto maggiori illustrazioni; e, dopo gli studii del Gasparrini, gli stomi delle fanerogame in generale poco altro hanno guadagnato — Non per questo s' ha ragione di credere oggidì che l' argomento fosse rimasto come un campo del tutto spigolato.

Ma intanto, stando a questi dati, la dottrina degli stomi, io credo si potrebbe riassumere nei seguenti termini: *Sono gli stomi piccole aperture di figura ellittica, ove apparenti ed ove reali dell'epidermide, cinte da due o da quattro cellule semilunari; alle quali aperture corrisponderebbe verso l'esterno una concavità, e verso l'interno una particolare lacuna detta camera pneumatofora. In questa lacuna penderebbe talvolta un organo addimandato cistoma, il quale, solo in poche piante, farebbe parte integrante di tutto l'apparato stomatico.* Questi stomi così conformati sarebbero destinati a permettere sì l' entrata come l' uscita di qualche gas.

Questa definizione, benchè racchiudesse tutte le nozioni fin'ora possedute sulla struttura e funzione degli stomi, pure a senso mio non ritrae completamente la loro natura biologica.

I fatti, che io intendo esporre colla presente memoria, sono il risultato di numerose mie ricerche anatomiche, intraprese nel 1868 e continuate fino al presente; voglio dire, sin da quando l' Accademia credette accogliere nei suoi Rendiconti una mia scrittura sulle *Glandole calcifere delle Saxifraghe aizoidee* [4]), nella quale parlai pure di stomi e di cistomi.

Intanto non posso tacere che da quell' epoca in qua altri lavori sul tema in discorso videro la luce, ed io non mancherò di ricordarli nel corso di questa memoria.—Se non sarò stato tratto in inganno nell' estimativa delle cose da me trovate, credo che la dottrina degli stomi, serbando mai sempre la più sincera riverenza agli illustri osservatori, che la condussero ai termini di sopra riferiti, possa essere in qualche parte ritoccata e nel complesso di molto accresciuta.

[1]) Trécul — *De la Cuticule à l'intérieur des Végétaux, etc.*

[2]) Mohl — *Quelles sont les causes qui déterminent la dilatation et le resérrement des stomates?* V. Ann. des Sc. Nat. 4e Série, T. VI, 1856.

[3]) Czech — *Ueber die functionen des stomata* (*Bot. Zeif.* 1869 et *Bull. Soc. bot. de France. Révue bibliogr.* T. 18, p. 2.

[4]) Vedi *Rendiconto della R. Acc. delle Sc. fis. e mat.* — Fasc. III., Marzo 1868.

Nel riferire adunque il portato delle mie ricerche, esporrò prima di tutto, ciò che riguarda esclusivamente la struttura anatomica degli stomi e dei cistomi; dirò dopo dei loro rapporti con altri organi particolari; tratterò in seguito di alcune glandole stomatifere; ed in questo descriverò alcune forme di glandole calcifere, non per anco conosciute. Consegue da ciò che il presente lavoro debba essere diviso in tre parti.

PARTE PRIMA

STRUTTURA ANATOMICA DEGLI STOMI E LORO PARTI ANNESSE IN DIVERSE PIANTE

Gli stomi ed i cistomi in diverse specie

§ 1. *Aloe verrucosa,* Ait.

In questa specie l'epidermide della foglia è munita di cuticola, spessa più dell'ordinario, e le cellule dermatiche son prominenti come papille. In alcuni punti queste papille si raccolgono in gruppi e formano le verruche, tanto caratteristiche della pianta. In queste verruche giacciono gli stomi, il cui vestibolo o preostiolo ha forma d'imbuto, quasi tutto compreso nello spessore delle circostanti cellule dermatiche *(Tav. I, fig. 1)*. Al fondo di esso vestibolo giacciono le due cellule semilunari o peristomatiche *(x x)*, intorno a cui trovansi tre altre cellule relativamente molto ampie *(p p p)*. Una di queste tiene il luogo della camera pneumotofora: sono di lato le rimanenti.

Il vestibolo *(a)*, essendo una introflessione della cuticola, non ha *pareti* proprie, ma la sua faccia interna è sempre rugosa e spalmata di materia brunastra, che fa contrasto col bianco delle parti circostanti; ed è materia che non si solleva, nè si spalma sulla faccia esterna della cuticola; il fondo n'è ristretto come il cannello d'un imbuto, che sta tra le cellule semilunari, e però da queste è lateralmente compresso; e scende giù verso la camera pneumatofora. Quivi si espande come il lembo d'una campana *(t)*, e lambisce coi suoi margini la faccia inferiore delle stesse cellule semilunari. Non però si apre, ma rimane a fondo chiuso. Siffatto prolungamento del vestibolo è, nè più nè meno, il così detto cistoma.

Tutto ciò si può vedere nella sezione perpendicolare, eseguita in modo, che le due cellule semilunari rimangano tagliate in due parti eguali e simmetriche. Un discreto ingrandimento del microscopio (300 diametri) può bastare alla disamina, specialmente se è agevolata dai reattivi chimici.

Esaminando l'origine dell'epidermide nell'*Aloe verrucosa,* Ait., ho veduto che, generate le cellule stomatiche nel seno d'una cellula madre, conforme fu riferito dal Mohl pel *Hyacinthus orientalis,* il tramezzo, che risulta dall'incontro delle *pareti* delle due cellule semilunari, a poco a poco si apre per formarvi lo spazio, od apertura lenticolare, quello stesso detto altrimenti ostiolo; che in questo tempo la parete della cellula madre, lungi dal disciogliersi, come fanno ordinariamente le pareti delle cellule meristematiche in genere, si cuticulizza e si lega alla soprastante cuticola epidermica; la quale, in questo stato, è pure in via di formazione, e con essa si abbassa nell'anzidetta apertura, formandovi un sottile diaframma. Fino a questo periodo di formazione tra la superficie delle cellule semilunari e quella delle cellule dermatiche circostanti non v'è differenza di livello.

In progresso di vegetazione questo diaframma si abbassa ancor più giù e si conforma a cistoma. Il Gasparrini, che scoperse questa parte dello stoma, e gli altri osservatori suoi contemporanei che ne ammisero l'esistenza, benchè sotto altri aspetti, credettero di dovere riconoscere in esso cistoma una semplice dipendenza od introflessione della cuticola. Ciò mi sembra esatto per ciò che riguarda l'origine e la costituzione chimica dell'organo in parola, ma non per quello che può riferirsi alla forma che assume a sviluppo completo; giacchè questa non è accidentale, come vorrebbesi credere, ma costante e determinata, secondo la specie.

Il cistoma del *Cereus peruvianus*, a detta del suo scopritore, è come piccola vessica, di forma e figura oblunga, più o meno rigonfiata nel mezzo, secondo l'età (Vedi la *Tav. V, fig. 6'*), ed attaccato per un estremo alla faccia inferiore delle cellule stomatiche, dov'è, com'egli disse, *una sorta di cercine contrattile o di sfintere*, e per l'altro sta a contatto col parenchima verde sottoposto. Nell'*Aloe verrucosa* questo cistoma procede, come innanzi ho detto, dal vestibolo, insieme, col quale può essere isolato, mercè l'uso dei reattivi chimici: e quando a ciò si riesce, si vede chiaro *(Tav. I, fig. 4")* che ha forma paragonabile ad una *clepsidra*.

E qui m'importa notare che il cistoma dell'*Aloe verrucosa*, in vece di un sol cercine, ne ha due *(m m')*, ma non contrattili, l'uno sopra e l'altro sotto, a contatto delle cellule stomatiche; cioè il primo all'entrata e l'altro all'uscita dello spazio lenticolare. E sono questi due cercini come due anelli fatti dalle stesse pareti del cistoma, quivi più ricresciute, voglio dire costituiti dalla stessa sostanza cuticolare, perchè come tali si comportano all'azione dell'acido solforico, della tintura di jodio, dell'acido azotico e della potassa caustica.

Giova ancora osservare che dei due anelli, il più grosso *(m)*, isolato dalle parti annesse, mostra superficie scabra; ed il suo lume interno è tanto ristretto che pare una fessura, mentre l'altro *(m')*, il più sottile, ha lume più ampio e di figura circolare. Tutte e due sembrano destinati a mantenere distese le pareti del cistoma, specialmente nella parte tubulosa e compresa dalle cellule semilunari. E non debbo tacere che la sottigliezza della membrana, di cui quest'organo è costituito, la sua trasparenza, ed ancora un certo rammollimento ch'essa patisce durante la preparazione, fanno a prima giunta molto dubitare se il fondo dell'organo in parola fosse chiuso ovvero aperto. Ma l'abituale presenza di bollicine gassose, la grande difficoltà a scacciarnele, sia mediante *lavaggi* ed altri artifizi microchimici; e, quel ch'è più, il vederle talvolta sotto l'azione del compressore farsi strada verso lo spazio lenticolare, e non per l'estremo opposto, ti rimuovono da ogni incertezza, e ti riconfermano nell'idea che trattasi d'un organo vescicolare ed *a fondo cieco*.

La parte tubolosa e mediana di questo cistoma *(Tav. I, fig. 2ª* e *4ª t)* è lateralmente compressa, perchè modellata nello spazio lenticolare. Una pruova irrepugnabile di questo fatto si ha quando si giunge ad ottenere una sezione verticale di tutto l'apparato stomatico, condotta nel senso dell'asse maggiore dell'apertura lenticolare; perchè in tal caso codesta parte tubolosa *(Tav. I, fig. 2ª)* si vede tanto larga quanto è lungo lo stesso spazio lenticolare. La sezione, ch'io ho rappresentato nella figura seconda della tavola prima, è appunto eseguita nel senso del piano verticale, che rasenta la curva esterna d'una cellula semilunare.

Dopo queste osservazioni mi restava indagare l'origine dei due cercini. E le os-

servazioni all'uopo eseguite mi condussero ad un risultato, che mi pare molto importante; ed è, che codesti cercini si formano in un'epoca, in cui il cistoma, cui appartengono, e le cellule semilunari sono già adulte; che entrambi essi cercini si formano a spese dei margini interni delle cellule semilunari, quivi inspessite e cuticolizzate più che nel resto delle loro superficie. Questo fatto, non osservato dai miei illustri predecessori, avrà più chiara riconferma nel corso di questa prima parte.

Intanto da quel che fin'ora ho riferito credo potere ricavare le seguenti conclusioni: Nell'*Aloe verrucosa* gli stomi hanno un preostiolo o vestibolo, ch'è una fossetta risultante dal sollevamento delle cellule dermatiche. Questo vestibolo scende fin nello spazio lenticolare; quivi, restringendosi ed assottigliandosi, trapassa lo spazio lenticolare e si conforma a cistoma, organo ch'io stimo fin da questo momento doversi considerare come parte integrante dell'intiero apparato stomatico.

§ 2. *Aloe ferox*, Lam., *A. elongata*, Salm., *ed Oxalis cernua*, Thunb.

Nella prima di queste tre specie la cuticola è ancora più spessa che nella specie precedente; ma le cellule dermatiche sono poco prominenti *(Tav. I, fig. 5')*, e non offrono all'esterno ineguaglianze o scabrezze di sorta alcuna. Però nel loro interno trovi alcune sporgenze acute e mammellonari, che ti sembrano formazioni stallattitiche, pendenti dalla vôlta superiore delle cellule dermatiche; quali sporgenze costituiscono un esempio non comune di cuticolizzazione. Gli stomi sono ugualmente distribuiti sì nell'una come nell'altra pagina della foglia; il loro vestibolo, per un terzo della sua profondità, è compreso nello spessore della cuticola epidermica, e pel resto sta isolato nei vani di alcune cellule dermatiche speciali, che fiancheggiano le semilunari. Guardando il preparato da sopra in sotto, si vede l'entrata del vestibolo relativamente molto piccola e di figura quadrilatera; mentre l'interno è piuttosto largo, di figura ovale *(Tav. I, fig. 5")* e con parete propria.

In questa specie le cellule semilunari hanno pareti spesse più dell'ordinario; grosse sono ancora quelle del vestibolo, le quali si restringono e si assottigliano presso al fondo, per attraversare lo spazio lenticolare e per costituire più sotto il cistoma. La forma di questo cistoma è pressochè simile a quella nella specie precedente; solo ne differisce per la mancanza dei due cercini lungo la parte tubolare, essendo il lembo pure slargato ad imbuto. Esso contiene abitualmente bolle gassose, le quali attestano della sua forma vescicolare anche prima che si ricorra ai reattivi chimici. La camera pneumatofora non ha pareti proprie, ed è circoscritta, come d'ordinario, da cellule verdi parenchimatiche. Forme e condizioni simili ho trovato negli stomi dell'*Aloe elongata (Tav. I, fig. 7")*. Intanto la mancanza de due cercini, lungo i cistomi di queste due specie, farebbe credere che la loro esistenza in quello dell'*Aloe verrucosa* fosse un caso accidentale; ma quest'idea sparisce quando si consideri che la loro presenza o mancanza, non che il grado di sviluppo sono subordinati al grado di cuticolizzazione dei margini interni delle cellule stomatiche, quale cuticolizzazione varia secondo la natura della pianta e dell'età dell'organo prescelto all'esame. Ciò mi risulta da numerose osservazioni microchimiche, fatte in queste ed in altre specie, nelle quali la presenza dei due cercini è un fatto costante ed irrepugnabile. Nell'*Aloe ferox* ed in altre specie affini ho potuto colla macerazione e cogli acidi distruggere tutte le parti annesse; rimuoverne il detrito mediante

ripetuti lavaggi; isolare quindi il cistoma, come nell'*Aloe verrucosa;* e così rilevarne con chiarezza le piccole differenze *(Tav. I, fig. 6ª)*.

Oxalis cernua, Thunb. — Ho esaminato per rispetto alla struttura dei cistomi parecchie Oxalis; ma quella che si porse più acconcia alle mie indagini è la specie di sopra segnata. Essa, rispetto alle altre, offre stomi più grossi, specialmente nella pagina inferiore delle foglie. Quivi sono a bastanza infossati, non per soverchio inspessimento della cuticola, come accadde osservare nell'Aloe, ma per un particolar modo di conformarsi delle cellule dermatiche *(Tav. II, fig. 14ª)*, le quali, crescendo, si sollevano in alto come papille emisferiche, e così rimangono anche arrivate a perfezione. Il vestibolo di ciascuno stoma è compreso in quegli interstizî, ed ha forma d'imbuto *(a)*, alla cui base ed in corrispondenza della faccia inferiore del derma giacciono le cellule stomatiche. Tra esse passa il cistoma, munito d'un solo cercine, il quale cercine nello stato normale corrisponde all'entratura dello spazio lenticolare, e la parte che v'è compresa dalle cellule stomatiche è tubulosa *(t)*; ma si allarga bruscamente alla loro faccia inferiore, ove per giunta diventa ramoso; e poichè le parti circostanti sono abitualmente tenere, non è difficile isolarnelo, senza molto alterarne le forme. E quando a ciò si perviene, si ha una chiara riconferma di quanto ho detto innanzi in ordine alla costituzione di quest'organo.

Nella pagina superiore delle foglie gli stomi sono molto più piccoli e più rari; il loro vestibolo è quasi nullo; il loro cistoma è ridotto ad un semplice diaframma disteso nello spazio lenticolare, sì che tutto l'insieme ti parrebbe appartenente a pianta diversa. Ho voluto notare questo fatto, perchè mi sembra molto importante e trovando riscontro in altre piante, di cui appresso dirò.

§ 3. — *Cistoma nell'Amaryllis formosissima,* L., *e d'altre piante.*

L'*Amaryllis formosissima* è una delle specie, su cui il Mohl portò le sue indagini per rapporto all'*aprirsi* ed al *chiudersi* degli stomi in generale; e da ciò ch'egli ha riferito in una sua particolare memoria [1]) risulterebbe, che una sporgenza della cuticola limita l'apertura del vestibolo; che una piccola concavità, compresa tra i margini interni delle cellule semilunari costituisce *una dietrocamera;* che a questa dietrocamera succederebbe in basso la *camera respirativa*, quella stessa detta più generalmente *camera pneumatofora*.

Io ho esaminato questa stessa specie per rapporto alla struttura dell'intiero stoma, *(Tav. II, fig. 9')*, ed ho trovato che il vestibolo vi è abitualmente, ma quando più e quando meno spianato, secondo l'età della foglia, sicchè talvolta pare leggiero avvallamento dell'epidermide; ed ho veduto inoltre che nel fondo di questo avvallamento si elevano due ricrescimenti labriformi, i quali *(uu)* circoscrivono una piccola cavità *(k)* di figura ellittica, che è, nè più nè meno, lo spazio lenticolare, compreso dagli stessi ricrescimenti labriformi, piuttosto che dai lati interni delle cellule semilunari *(xx)*, come generalmente avviene; che per questo spazio passa il cistoma *(t)*, non osservato dal Fitotomista alemanno. Ed ho notato altresì che il detto cistoma, compreso, com'è, fra le cellule semilunari, ha due rigonfiamenti, l'uno superiore, l'altro inferiore: il primo corrisponde alla faccia

[1]) Mohl, *Quelles sont les causes qui détérminent la dilatation et le renserrement des stomates, etc.* — *In Ann. des Sc. Nat.* 4ᵉ Série, T. 6, 1856.

superiore delle cellule semilunari, il secondo all'inferiore; entrambi tenenti il luogo dei due cercini, che ho riconosciuto nell'*Aloe verrucosa*.

Per meglio riconoscere l'essenza anatomica dei due rigonfiamenti *(k t)*, mi fu d'assoluta necessità esaminare tutto l'apparato stomatico nella sua origine ed in diversi periodi di sua formazione; e solo ad epoca di completo sviluppo potei formarmene il giusto concetto; quando cioè per ripetute dissezioni, ottenni alquanti preparati in cui lo scalpello anatomico avea sfiorato da due facce opposte tutte e due i rigonfiamenti *(fih. 8, t k)*; perciocchè solo in preparati cosiffatti ho potuto scorgere nettamente che ivi sono due cavità, delle quali la superiore *(k)* è l'entratura al cistoma (la camera anteriore pel Mohl) e l'inferiore *(t)* una abituale accidentalità di quest'organo. Codesti preparati io ho trattato nel campo del microscopio coll'acido solforico, ed ho veduto che il rigonfiamento inferiore, fenduto già dallo scalpello, a poco a poco si rilasciava, ed in ultimo si mostrava come una sottil falda divisa in due lobi sbrandellati. Ed ancora, macerando le foglie di quest'Amarillide, e poscia sottoponendola all'ebollizione nell'acido azotico diluito, ho potuto ottenere un altro effetto assai importante in queste ricerche, ed è l'isolamento della cuticola, sulla quale mi fu facile riconoscere l'impronta delle cellule semilunari, nonchè i rispettivi cistomi in tutta la loro forma abituale. Ho riconosciuto pure i ricrescimenti labriformi, i quali, in questo caso, pur si sono mostrati per un particolare inspessimento cuticolare dei margini interni delle due cellule semilunari. Essi contornano l'apertura stomatica e ne la mantengono sempre beante.

Nella *Statice Duriaei* l'apertura stomatica è pure beante; ma per un'altra condizione. Quivi è la cuticola *(Tav. III, fig. 12)*, che intorno allo stoma s'ingrossa, si solleva in sopra e costituisce un piccolo vestibolo sempre aperto.

Nell'*Amaryllis Belladonna*, L., le cose si passano allo stesso modo. Però l'apertura stomatica giace in fondo ad un vestibolo piuttosto profondo; i ricrescimenti labriformi hanno margini taglienti e rivolti in fuori; il cistoma porta un solo rigonfiamento bulbiforme *(Tav. II, fig. 14 b)* meno grande di quel ch'è nella specie precedente, ed ha forma che pare risultante dall'unione pei loro cannelli di due piccoli imbuti. Ho isolato quest'organo da tutte le parti annesse per mezzo della macerazione e dei reattivi chimici, ed ho potuto così osservare chiaramente ciò che a mala pena avrei potuto scorgere nelle condizioni normali.

Lilium candidum, L. — Gli stomi in questa specie sono grandi più dell'ordinario, e posso dire che raggiungono le maggiori dimensioni. Per la qual cosa si porgono molto opportunamente a questo genere di ricerche. Le loro cellule semilunari *(Tav. II, fig. 15, 16, 17, 18)* si posano nello stesso piano orizzontale, in cui giacciono le cellule dermatiche; anzi in qualche periodo di vegetazione e quando la foglia è turgida per abbondanza di succhi, sollevansi alquanto da quelle. In tali condizioni il vestibolo manca del tutto o v'è molto spianato; lo spazio lenticolare è proporzionatamente ampio e sempre colmo di materia polverosa *(fig. 15, k)*. Guardando lo stoma di prospetto o da sopra in sotto, questo spazio sembra circoscritto non da due ma da quattro cellule semilunari disposte in due coppie, una incastrata nell'altra *(fig. 16, 17 e 18 x x)*; mentre in realtà di vere coppie non ve n'è che una sola. Nel taglio verticale *(fig. 15)*, questa illusione sparisce, e si vede chiaro che le due abituali cellule semilunari hanno pareti spesse più nel lato interno che nell'esterno; e che la loro faccia superiore è segnata da due profondi solchi *(fig. 18, x x)*, i quali disegnano i due ricrescimenti labriformi, quelli stessi che, pel po-

sto che occupano, per la figura che assumono, e pel modo come rifrangono la luce, mentiscono l'aspetto di due cellule semilunari, cioè d'un'altra coppia inscritta.

A dileguare completamente tale illusione giova por mente ad una circostanza, ed è che in corrispondenza dello spessore di questi ricrescimenti non si vede alcuna sorta di contenuto. La materia polverosa che si raccoglie nello spazio lenticolare è di natura cerosa, come quella detta comunemente biancume o polvere glauca.

Un'altra particolarità ancora degna di nota negli stomi di questa pianta si è l'ampiezza del cistoma a lembo pieghettato e sfrangiato con regolarità *(fig. 17, tt)*.

In questi stomi ho potuto meglio che in altri riconoscere come i due ricrescimenti labriformi sieno effetto d'un processo di cuticolizzazione tardiva, anzicchè precoce. Ond'è che il trattamento colla tintura di jodio, massime ad epoca d'innoltrata vegetazione, li tinge d'un giallo sempre più intenso di quel ch'è nell'adiacente cuticola. In questo stato l'acido solforico non li distrugge, mentre dissolve interamente le pareti delle stesse cellule, cui appartengono. Alternando l'azione di questi due reagenti sulle preparazioni fatte, mediante sezioni verticali *(fig. 15)*, giunsi a scoprire ancora una linea di confine tra i ricrescimenti labriformi, effetti della cuticolazione, e lo spessore originario ed abituale della parete cellulare.

Intanto nell'interesse della tecnica microchimica sembrami opportuno qui soggiungere, che non essendo sempre possibile regolare nel campo del microscopio l'azione dei reattivi, per cui accade sovente che mentre essi mettono in chiaro una parte del preparato, l'altra ne rimane distrutta, bisogna assolutamente reiterare le pruove variando la qualità della pianta e la specie del reagente. Con questi criterî, esaminando di continuo molte piante, ho appreso che il reattivo migliore, il quale rende possibili osservazioni complessive nello stesso preparato, è l'acido azotico diluito e bollente. Per esso ho potuto ripetutamente osservare, tra le altre cose, che il cistoma del *Lilium candidum* non ha alcun rigonfiamento bulbiforme, come nell'*Amaryllis* di sopra citata, nè i cercini cuticolari come nell'*Aloe ferox*, ma un breve tubo ed un largo lembo slargato e sfrangiato in modo assai singolare *(fig. 18, tt)*.

§ 4. — *Si riconfermano le cose dette innanzi, e si chiarisce l'origine e la natura dei ricrescimenti labriformi nella* Rhipsalis Cassitha, Gaert., *ed altre specie.*

Per avere una riconferma sull'origine e sviluppo dei ricrescimenti labriformi, allargai le ricerche in un gran numero di piante, tra cui le più opportune mi parvero queste, che qui rammenterò:

Nella *Rhipsalis Cassitha* e *R. salicornoides* ho notato che i ricrescimenti labriformi si elevano nell'ambito di largo vestibolo *(Tav. II, fig. 19ª, a)*; i loro margini, taglienti come nel *Lilium*, sono però rivolti in dentro come nell'*Amaryllis (Tav. I, fig. 9ª, n)*; mentre le rispettive cellule semilunari sono fiancheggiate da due altre cellule speciali conformate a calotta. Queste *(Tav. II, fig. 19ª, pp)* accolgono nella loro concavità le due semilunari, *(xx)* e le comprendono quasi per intiero. Da ciò nasce che le sezioni orizzontali, che sfiorino la faccia inferiore del derma, o le sezioni verticali fatte nei modi consueti, mostrano l'apertura stomatica, come se fosse circondata da quattro anzicchè da due cellule semilunari.

La causa di questa illusione non è però simile a quella riconosciuta nel *Lilium candidum*. Nella *Rihpsalis Cascitha* il cistoma è piuttosto piccolo e di forma vescicolare

(fig. 20); per contrario nella *R. salicornoides* i ricrescimenti labriformi sono meno sviluppati ed il cistoma relativamente più ampio *(fig. 21 u, t)*. Qui bisogna ricordare che il Link nelle sue *tavole scelte* ha illustrato gli stomi di questa specie; ma la figura 7ª che ne ha dato a Tavola quarta e la breve descrizione che l'accompagna, messe in raffronto colle mie preparazioni, mi hanno fatto rilevare che le osservazioni dell'illustre botanico erano incomplete e per qualche verso non conforme la verità. Egli spiega la sua figura così: *a) Stomatium e pluribus cellulis compositum; b) Stomatium in quo margo aperturae annulo cinctus* [1]) *apparet, nec e cellulis arcuatis, ut solet, compositum*. Le cellule stomatiche (arcuate pel Link) non mancano nella pianta in esame; vi sono come d'ordinario, ma quasi nascoste da due cellule speciali conformate a calotta *(fig. 19, pp)*. Le *molte cellule*, ch' egli credette cingessero l' apertura stomatica, appartengono al derma circostante e non sono da confondersi colle due cellule speciali da me scoverte e qui sopra descritte. L'anello circolare è un' apparenza dovuta allo spessore, che assumono le pareti delle cellule dermatiche in quel che s' abbassano nel vestibolo. Nella *Rhipsalis Cassitha* accanto alle cellule a calotta è il parenchima verde, che cinge in basso la camera pneumatofora, nella quale arriva il cistoma non veduto dall'illustre autore. Questo cistoma, come ho già detto di sopra, è più ampio che nella specie precedente, ed il suo lembo è ramoso anzi che no. La macerazione nell'acqua mi fu talvolta bastevole ad isolarlo dalle parti circostanti. E così potei osservare com' esso resti legato ai ricrescimenti labbriformi, dei quali è in sostanza una perfetta continuazione.

Nella *Rhipsalis funalis*, Salm., la tela epidermica offre alcuni rigonfiamenti a forma di verruche disposte in serie lineari e divise da solchi profondi, qua e là interrotti traversalmente ed a brevi distanze. Nei punti d'interruzione sono alcuni spazî od infossamenti di figura tetragona e quasi crociforme. Sono questi infossamenti cavità vestibolari; giacchè nel fondo di ognuno di essi giace uno stoma, il quale è circondato da una serie di cellule parenchimatiche, non per anco osservate; quali cellule, se mal non m'appongo, costituiscono una condizione anatomica degna di accurate osservazioni. Esse cellule hanno forma cubica, parete spessa più dell' ordinario, ma non contengono clorofilla; mentre le altre attigue assumono forme diverse e, quel ch'è più notevole, abbondano di materia verde. Un altro fatto non men degno di nota ho riconosciuto nella *Rhipsalis salicornoides*, ed è l'esistenza di moltissime lacune sotto-epidermiche piene di sostanza mucosa e filante *(Tav. II, fig. 21, pp)*. Ognuna di esse è due o tre volte più grande delle corrispondenti cellule dermatiche, e quantunque tutte vicinissime agli stomi ed alle camere pneumatofore, esse lacune non hanno comunicazioni dirette nè con queste nè con quelli. La loro parete è fatta da un raddensamento della stessa sostanza mucosa, e come tale risponde all'azione dei reattivi. Nel taglio traversale (perpendicolare al piano dell'epidermide) si vede chiaro che sottili tramezzi fatti di cellule verdi appartenenti al sottoposto merenchima separano una lacuna dall' altra, non che dalla vicina camera pneumatofora. Sicchè l'insieme di queste lacune, così vicine tra loro, assume le apparenze d'un tessuto speciale giacente tra il derma ed il merenchima sottostante.

§ 5. — *I ricrescimenti labriformi s' incarnano colla cuticola.*

Da ciò che ho esposto di sopra, credo si rilevi abbastanza chiaro che i ricrescimenti labbriformi si portano, secondo le specie, ora alla superficie dell' epidermide, come nel

[1]) Link Fr. — *Ausgewählte anatomisch-botanische Abbildungen* — Zweites Heft. Berlin 1840.

*

Lilium; ora nel fondo d'ampio vestibolo, come nell'*Amaryllis formocissima, Aloe ferox, Rhipsalis Cassitha, R. funalis* ed altre piante della stessa natura; che il cistoma, che da essi discende, assume proporzioni tali da poterlo riconoscere anche colle lenti di mezzano ingrandimento.

Ma nella *Plantago lanceolata,* L., gli stomi giacciono al vertice di piccole prominenze emisferiche e di natura cuticolare *(Tav. I, fig. 15);* le cellule stomatiche *(xx)* sono molto piccole ed immerse nello spessore della detta prominenza; tra esse è una piccola fessura *(a)*, che tiene il luogo di vestibolo, ma che realmente è lo spazio lenticolare, a cui succede in basso una fossetta delimitata da due cellule dermatiche attigue *(dd)*. In questo giace piccolo cistoma rudimentale. Le sezioni eseguite secondo un piano che tagli di traverso ed in due parti eguali le cellule semilunari, in seguito all'azione dei soliti reattivi, fanno riconoscere agevolmente tutte queste cose. Intanto ciò che mi pare più rimarchevole si è lo spessore assunto dalla cuticola intorno allo stoma, pel quale spessore consegue che le cellule semilunari ed i loro ricrescimenti labbriformi vi si mostrano come incarnate od immerse nella rispettiva prominenza cuticolare. Ciò vuol dire che il fatto della cuticolazione imprime alle parti dello stoma diverse modalità, ed ancora diverse attitudini. Questi fatti avranno ulteriori riconferme. Intanto vorrò dire qui appresso della cuticolazione delle cellule stomatiche e del loro numero abituale.

§ 6. — *Numero e cuticolizzazione delle cellule semilunari stomatiche.*

Pittosporum sinense, Desf. Il nome di questa specie si rannoda ad un momento storico sulla dottrina degli stomi, quando cioè l'Amici ed altri osservatori contemporanei avvisavano che gli stomi dell'*Ambrosinia Bassi,* L., e dello stesso *Pittosporum* avessero il foro cinto da quattro cellule semilunari disposte in due coppie, in vece d'una sola, come nella generalità delle piante. Allora (circa il 1838 [1]) fu detto, segnatamente dall'Amici, che « se si taglia nella pagina inferiore una sottil fetta, che levi l'epider-
« mide coi primi strati di parenchima, guardando dall'interno all'esterno, si vedono a
« meraviglia *larghe lacune* poliedre ripiene d'aria, in fondo alle quali e di rimpetto
« vi stanno gli stomi ». I quali, egli dice, si dovrebbero chiamare *stomi composti;* perchè in vece di due otricoli, che accerchiano il foro, sembra ce ne fossero realmente quattro. L'idea di quattro cellule peristomatiche fu emessa ancora da altri per gli stomi nell'*Agave americana,* L. Durante le ricerche fatte sul tema nel presente lavoro ho esaminato altresì sotto questo rapporto il *Pittosporum sinense,* ed ho veduto le numerose lacune scoverte dall'Amici, ma non le quattro cellule peristomatiche. Le lacune a me parve fossero di due maniere, cioè, alcune son come larghi spazî tra le cellule epidermiche ed il sottoposto parenchima; altre, che rinvengonsi solo in corrispondenza degli stomi sono vere lacune. Quest'ultime, pel posto che occupano e per l'aria che contengono, sono le camere pneumatofore comuni a tutte le piante stomatifere. Le cellule semilunari sono due, disposte come d'ordinario, non quattro. Edotto, in precedenti mie ricerche dell'azione dei reattivi, ho potuto riconoscer nelle due sole cellule semilunari il notevole inspessimento della loro faccia superiore. Il quale inspessimento è dovuto al processo di cuticolizzazione, per cui esse resistono, pro parte, alla macerazione nell'acqua ed all'azione dell'acido solforico del commercio. Questo reattivo, agendo su tagli verticali del-

[1]) Vedi memoria della Reale Accad. delle Scienze di Torino. Serie II, Tom. 2.

l'epidermide, fa vedere *(Tav. II, fig. 7)* che tra la faccia superiore delle cellule semilunari e la cuticola è una certa distanza, e che il cistoma, da quella pendente, sostiene a metà della sua lunghezza gli avanzi delle cellule semilunari *(z)*; mentre il lembo si mostra diviso in tre lobi. E quelli avanzi sono appunto le facce superiori delle due cellule semilunari in cotal guisa cuticolizzate.

§ 7. — *Il vestibolo assume forme particolari.*

Le cose osservate nel *Pittosporum sinense*, Desf., incontrano delle analogie negli stomi dell'*Ephedra altissima*, Desf., e con l'aggiunta di altre particolarità molto più importanti.

Ed in vero il vestibolo è profondo più del consueto, ed ha figura rettangolare *(Tav. II, fig. 5 e 6, a)* coi lati alquanto incurvi; le sue pareti sono costituite dallo spessore della cuticola, che ricuopre la faccia esterna delle cellule limitrofe; le cellule semilunari *(xx)* sono sì profonde, da parere che mancassero interamente, massime quando si guarda l'apparato da sopra in sotto. Esse vi sono come di regola, e mostrano nella sezione verticale la faccia superiore notabilmente inspessita e cuticolizzata *(zz)*. Accanto ad esse sono due cellule speciali *(pp)* come quelle rinvenute nell'*Aloe* e nell'*Amaryllis*; quali cellule si collegano alle cellule semilunari in modo, da comprenderne la sola faccia superiore, mentre l'inferiore, di fronte alla camera pneumatofora, è parzialmente rivestita dal lembo del cistoma.

Nel fondo del vestibolo *(a)* ho scorto una piccola prominenza emisferica, divisa in due parti eguali; e queste sono due piccoli ricrescimenti labbriformi riconoscibili a mala pena nella sezione verticale dell'apparato, solo quando questa fosse diretta secondo un piano che s'interseca ad angolo retto coll'asse maggiore delle cellule semilunari ed in un punto mediano; giacchè, condotta diversamente, esse cellule semilunari si sottragono ad ogni mezzo d'osservazione. Ed ho notato altresì che la faccia superiore di queste ultime, malgrado il suo inspessimento, non ha solchi paralleli all'apertura stomatica, che mentissero, come nel giglio bianco *(Fig. 17, 18, 19, uu*, tav. suddetta) l'esistenza di altra coppia di cellule inscritte; invece è liscia e sollevata dal margine esterno verso l'interno fino ai ricrescimenti labbriformi. Questi menano in un canaletto cilindrico, cioè nella parte tubolosa del cistoma, il quale termina in un lembo relativamente molto slargato ed a forma di sottocoppa *(fig. 7, t,* tav. suddetta).

Ciò che negli stomi dell'*Ephedra altissima* mi pare ancora ben singolare, è che nel fondo del vestibolo si trovano quattro piccole borse, ovvero quattro *insaccature* situate ai quattro angoli dello stesso fondo e rivolte lateralmente ed in sopra *(Fig. 7, yy)*; le quali io chiamo qui *appendici tubolose del vestibolo*. Esse sono empiute di materia polverosa; gli acidi non le distruggono, anzi le mettono in maggiore evidenza, sgomberandone la materia in esse contenuta ed il tessuto circostante.

Nella *Bonapartea Hystrix*, il vestibolo, lo spazio lenticolare, i ricrescimenti labbriformi e tutte le altre parti, che concorrono alla costituzione dello stoma, assumono forme particolari e relazioni non comuni *(Tav. IV, fig. 4)*. Il vestibolo si apre al vertice d'una prominenza fatta a spese della sola cuticola, anzichè dell'intera epidermide; la sua entrata è rettangolare nella foglia tenera, configurata ad *x* nell'adulta. Guardandola di prospetto, si vede circondata da due grosse cellule dermatiche *(Fig. 5, p)*,

le quali hanno figura insolita; non somigliano ad altre cellule dermatiche, o semilunari che fossero. I loro lati, nella foglia tenera, sono dritti, incurvati verso l'interno nell'adulta. Ma la figura ad *x* dell'orifizio vestibolare, più che a questo incurvamento, si deve ad un modo particolare d'inspessirsi e di sollevarsi della soprastante cuticola, che è ciò che manifestamente si vede nel taglio verticale di tutto l'apparato. Esse giacciono più giù delle altre cellule dermatiche e fiancheggiano, come nell'*Ephedra*, le cellule semilunari. La cavità vestibolare, in questa pianta, ha figura conica *(Tav. IV, fig. 4, a)* col fondo largo più del doppio dell'orifizio. Essa è scavata nello spessore della cuticola, come chiaro apparisce nella sezione verticale. Questa cuticola si abbassa ancor più sotto della faccia inferiore del derma e circoscrive un'altra cavità *(s)* simile alla precedente, le cui pareti si conformano in modo, che non è facile descrivere a parole *(v)*.

Nel fondo di questa seconda cavità incomincia il cistoma con tubo relativamente lungo e lembo slargato più dell'ordinario. Le cellule semilunari sono cuticolizzate press'a poco come nell'Efedra altissima; sebbene ne differiscano per essere più incurvate ad *S*, e per avere pareti ugualmente inspessite in ambo le facce. Negli stomi delle Bonapartee due concamerazioni precedono lo spazio lenticolare, le quali per la loro figura e pel vario atteggiarsi della cuticola, che ne tappezza le pareti, rendono in questa pianta gli stomi più complicati e più speciosi dell'ordinario. Con struttura analoga a questa si presentano gli stomi dell'*Agave geminiflora*, Brand., e di altre piante affini. Intanto non è inutile soggiungere che, per osservare tutte le particolarità dell'apparato stomatico in esame, è assolutamente necessario che il taglio verticale sia condotto nel senso e nel modo che ho detto per l'*Ephedra altissima*. Perciocchè, fuori di questa condizione, la figura delle singole parti e la loro disposizione simmetrica non si possono ravvisare.

§ 8. — *Gli stomi nella Zéa Mäis*, L., *ed in altre specie diverse.*

Le cose finora esposte riguardano principalmente la conformazione del cistoma ed i suoi rapporti con la cuticola, nonchè la sua dipendenza dai due ricrescimenti labbriformi. Ora mi farò ad esporre alcuni fatti, i quali, spero, varranno a mettere in rilievo le relazioni delle cellule peristomatiche con le altre cellule attigue del derma, che ho finora ricordato col nome di *cellule speciali*. Parlando degli stomi nell'*Aloe verrucosa* ed *A. ferox*, dell'*Amaryllis formosissima* ed *A. Belladonna*, del *Rhipsalis salicornoides* e dell'anzidetta *Bonapartea*, ho dichiarato che le cellule semilunari sono fiancheggiate da due grosse cellule dermatiche più ampie delle altre adiacenti; cioè da due cellule speciali. Le ricerche, che ho fatto posteriormente, a fine d'indagare la loro origine, giustificano la qualifica allora assegnata; giacchè esse si mostrano da prima come cellule dermatiche non punto diverse dalle altre compagne; ma poi a misura che si sviluppano gli stomi e le cellule semilunari si abbassano, si fan molto più grandi ed assumono forme sempremai diverse dalle altre contigue. In esse non ho mai rinvenuto alcuna sostanza particolare; talchè, se non fosse per le loro pareti molto bene distinte, io l'avrei creduto lacune. Qualunque possa essere la natura di queste cellule, io continuerò a chiamarle *cellule dermatiche speciali*, *cellule accessorie*.

Nella Zea Mäis le due cellule stomatiche hanno forma navicolare *(Tav. II, fig. 10, ed 11, x x)*, piuttosto che semilunare, e sono cinte da due coppie di cellule speciali.

Queste, perchè più piccole di quelle, non si ricongiungono per gli estremi, sicchè a rigore non formano una seconda coppia; e giacciono tra le cellule dermatiche dalle quali se ne distinguono per essere più piccole, nonchè per la figura dei loro contorni. Guardando l'epidermide da sopra in sotto, esse si scorgono a mala pena, ma si veggono nettamente nel taglio verticale *(fig. 10, p);* non contengono sostanze particolari, nè mai clorofilla; e, se qualche volta pare che ne contengano, ciò è una semplice illusione ottica dovuta alla contiguità delle vere cellule stomatiche, ed al modo come queste col loro contenuto verde refrangono la luce.

Il cistoma in questa pianta, Zea Mäis, non ha ricrescimenti labbriformi; le cellule peristomatiche sono diritte, anzichè arcuate; l'apertura lenticolare è ridotta ad una rima impervia nel mezzo, avente solo due orifizii agli estremi *(fig. 10, k);* il cistoma ha forma di vescicola tondeggiante, anzichè oblunga, la quale, in seguito al trattamento per l'acido azotico bollente, si mostra pendente dal margine esterno delle cellule semilunari *(fig. 11, t).* Qui cade opportuno soggiungere che la camera pneumatofora di ciascuno stoma a pagina superiore è contigua ad un gruppo di tre o quattro cellule, le quali, per la loro grossezza e per la loro protuberanza dalla pagina inferiore, costituiscono un organo lacunoso, di cui finora non saprei indagare lo scopo. In esso ho trovato sempre aria *(Tav. II, fig. 9).*

In generale agli stomi della Zea Mäis somigliano quelli di molte altre Graminacee, Ciperacee e Giuncacee; e massime in quest'ultime sono organizzati sul medesimo piano fondamentale; hanno lo spazio lenticolare chiuso nel mezzo, ed aperto solo agli estremi, come nella *Zea Mäis.*

Qui intanto mi corre l'obbligo dichiarare che, rovistando la letteratura dell'argomento, ho trovato due lavori di data recentissima, i quali hanno qualche rapporto con queste mie osservazioni: uno è del Sig.r Duval-Jouve [1]), l'altro del Sig.r Pfitzer [2]). Dal primo ho appreso che sulle foglie dell'*Agropyrum* e del *Juncus compressus* sono alcune cellule epidermiche sporgenti, chiamate dall'Autore cellule *bulliformes,* e che l'apparecchio stomatico delle graminacee è ugualmente composto di quattro cellule, due *ostiolari* e due altre *esterne* più dilatate nel mezzo della loro lunghezza e piene di clorofilla. Dall'altro lavoro, per quanto ho potuto rilevare da un breve sunto, risulterebbe che gli stomi di alcune graminacee sono compresi dentro solchi diritti alla faccia superiore delle foglie, non altrimenti di quel che m'accadde osservare in qualche Restiacea. Le cellule *bulliformes* dell'Agropyrum sono simili a quelle da me rinvenute nella Zea Mäis di rincontro a ciascuno stoma *(Tav. II, fig. 9 vv).* Il loro rapporto con gli stomi non è immediato. Non so se corrispondano a quelle nel *Juncus compressus* perchè non mi fu dato esaminare questa specie. Nel *Juncus glaucus*, *J. acutus, J. Angelisii, J. articulatus* e nello *Schoenanthus mucronatus*, che tanto somiglia ai Giunchi, non ne ho trovato esempio. Ciò mi fa supporre che la presenza o mancanza di siffatte cellule *bulliformes* tenga alla forma laminare della foglia e non alla cilindrica dello stelo.

In quanto alla distribuzione degli stomi in solchi longitudinali non ho nulla da osservare in contrario, essendo un fatto che ha riscontro in molte altre piante non graminacee. Per ciò che riguarda la clorofilla nelle cellule attigue alle peristomatiche, sono costretto a dichiarare che nella *Zea Mäis* ed in altre Graminacee e Ciperacee non ne ho mai rinve-

[1]) Duval-Jouve J.—*Sur quelques tissus des Joncées, des Cyperacées et Graminées. Bull. Soc. bot. de France,* 1871, pag. 291.
[2]) Pfitzer—*Récherches sur le tissu épidermique des végéteaux* (In tedesco). Vedi *Bull. Société bot. de France,* année 1871, p. 184.

nuto. Appellandomi alla loro origine dermatica, alla loro forma variabile, secondo l'età dello stoma, a cui si collegano e ancora alla loro somiglianza con altre cellule *speciali,* vedute in altre piante, sono forzato a credere che l'essersi trovata la clorofilla in quelle dell'Agropyrum, debbasi ritenere come un fatto accidentale.

Nel *Restio tectorum,* L. fil., specie non citata dagl'illustri osservatori, io vidi gli stomi muniti di cistoma. E quest'organo vi è fatto di sottilissima pellicina cuticolare, e conformata a guisa di sacchetto cilindraceo; quale sacchetto, modellandosi sulle pareti della camera pneumatofora, piglia l'impronta delle cellule adiacenti *(Tav. V, fig. 1ª e 2ª).* Quando, mercè l'azione dell'acido nitrico bollente, si giunge ad isolarlo dai tessuti circostanti, è bello vederlo nel campo del microscopio ancor pieno di *(fig. 2ª)* bolle gassose, e con pareti pieghettate in vario senso e col fondo ristretto a mo' di budello! Questo fondo *(fig. 1ª, n)*, nelle condizioni abituali, si posa in una speciale zona di tessuto cellulare, su quella stessa che separa la corteccia dal tessuto fibroso-vascolare, appartenente al sistema legnoso.

Nell'*Opuntia ficus-indica,* Mill., gli stomi sono accompagnati da sei cellule accessorie disposte in tre coppie, l'una compresa nell'altra come fossero tre altre coppie di cellule semilunari *(Tav. V, fig. 3ª, pp'p'').* Ed è però naturale che la prima coppia *(p)* sia più piccola della seconda *(p')*, e questa più della terza *(p'').* La loro sezione, perpendicolare, rispetto al piano dell'epidermide, presenta figura anche semilunare; e ciò perchè la loro forma totale è come di un vetro d'orologio molto concavo. Nel *Cereus peruvianus,* Haw., ne ho trovato pure tre coppie, ma disposte con ordine inverso, per ciò che riguarda la loro relativa grandezza *(fig. 6ª);* sicchè la coppia più sviluppata è *(p)* quella ch'è ad immediato contatto delle cellule peristomatiche. Per queste relazioni di sviluppo non si può dire a rigore di termini che una coppia sia circoscritta dall'altra.

Nell'*Euphorbia pendula,* Link., di codeste cellule accessorie v'è un maggior numero, e, quel ch'è più notevole, disposte in due piani, uno superiore l'altro inferiore *(Tav. IV, fig. 11ª)*: nel primo sono tre coppie *(p')* ed altrettante nel secondo *(p'').* Queste ultime sono ordinariamente più grandi di quelle; tutte hanno figura ovale ed incurva e sono dirette obliquamente, per modo che l'estremo più sottile è rivolto alla cavità vestibulare. La loro obliquità sembrami l'effetto d'un profondo avvallamento dell'epidermide in corrispondenza di ciascuno stoma. A questa condizione anatomica s'aggiunge uno spessore considerevole della soprastante cuticola, onde guardando da sopra in sotto tutto l'apparato, si vede un solo piano di cellule speciali e, a mala pena, l'apertura stomatica.

Le cellule accessorie dell'uno e dell'altro piano, riguardate in quanto all'origine, sono cellule dermatiche, ma rispetto alla disposizione in due piani distinti, io le considero come elementi di un organo speciale annesso allo stoma, del quale organo propongo esporre più innanzi i particolari anatomici e fisiologici.

§ 9. — *Di alcune particolarità non per anco conosciute negli stomi d'un* Equisetum, Desf.

Gli stomi negli Equiseti in genere offrono, per quanto io sappia, delle particolarità molto caratteristiche, ma non tutte ben conosciute. Io dirò di quelle nell'*Equisetum ramosissimum,* Desf., le quali sono il risultato delle mie osservazioni organogenetiche.

L'epidermide, che riveste lo stelo di questa pianta, è segnata da solchi longitudinali

e paralleli fra loro. In questi solchi, e non altrove, sono allogati gli stomi. Ad ognuno di essi corrisponde un foro nella cuticola, il quale assume figura varia secondo l'età dello stelo, ma che, ad epoca di completo sviluppo suol essere quadrilatera *(Tav. II, fig. 1, 2, 3, 4)* con un restringimento per due lati opposti *(fig. 3, tav. suddetta)*. Nella sezione perpendicolare alla superficie dell'epidermide si scorge chiaro che ciascun foro mena in un vestibolo, il quale è tappezzato di cellule dermatiche non rivestite, come d'ordinario, da spessa cuticola, ma da un sottile straterello appena visibile coi più forti ingrandimenti. Più che un avvallamento dell'epidermide esso foro pare un'escavazione del derma.

Nel suo fondo é una piccola fessura *(a)* a cui corrisponde in giù l'apertura stomatica. Questa è circoscritta da due cellule di forma *navicolare*, le quali pel modo di saldarsi al fondo del vestibolo, e per lo spessore della loro parete, somigliano a quelle nella *Bonapartea Hystrix*, nei *Dasilirium* e nell'*Ephedra altissima*; benchè ne differiscono per avere la faccia superiore segnata da righe equidistanti e parallele *(fig. 4, x)*. Queste cellule navicolari giacciono alla faccia inferiore del derma, sicchè per metterle allo scoverto, bisogna, mediante un taglio orizzontale, asportare il derma che le sovrasta. Le loro righe trasversali hanno già richiamato l'attenzione dei Signori Schacht e Sanio, i quali, circa il 1864, le hanno qualificate per inspessimenti della parete cellulare e le hanno stimato analoghe a quelle rinvenute nel *Dasilirium Acrosticum* ed in qualche *Proteacea*. Fino a questo momento non ho potuto esaminare le specie da loro esaminate; e dei loro lavori ho letto soltanto i brevi transunti, i quali non si mettono in grado d'instituire esatto confronto tra il risultato delle mie e delle loro osservazioni. Intanto sembrami che le mie ricerche non contraddicono l'opinione del Sanio, anzi credo mi autorizzino a soggiungere che le sudette righe o inspessimenti delle pareti cellulari si formino ad epoca tardiva e nella faccia interna delle cellule; e che dopo un certo periodo di vegetazione acquistino tale saldezza da resistere all'azione dell'acido nitrico bollente. Quest'ultima circostanza depone, senza dubbio, a favore d'un processo di cuticolizzazione, il quale, secondo risulta dalle mie osservazioni, si estenderebbe non solo per la faccia superiore delle cellule stomatiche, come nell'*Ephedra*, ma ancora per l'interna.

Oltre siffatte righe trasversali e parallele fra loro, io ne ho scorto un'altra sulla faccia superiore di ciascuna cellula stomatica, la quale riga è per verità un profondo solco parallelo al margine interno della stessa cellula *(fig. 4, e, Tav. II)*. Lo spazio lenticolare è una semplice rima appena appena dilargata nel mezzo, da cui si passa giù in una vescichetta tenuissima, ch'è il cistoma *(Tav. II, fig. 1, p)*; e questo cistoma è circondato da una speciale cellula parenchimatica conformata a calotta. Essa, nel taglio trasversale all'epidermide, si presenta incurvata come ferro da cavallo, in modo che col lato convesso rivolto in basso tappezza da sola le pareti della camera pneumatofora. Nei primi tempi della sua formazione contiene clorofilla e materia granellosa, col tempo si svuota e si cuticolizza; sicchè resiste anch'essa all'azione dell'acido azotico bollente. È una cellula singolarissima codesta calotta, che non ha riscontro in alcuna specie fanerogama. — Intanto la sua presenza intorno al cistoma, le righe ed il solco nelle cellule semilunari, non sono le sole cose che rendono speciosa ed insieme complicata la struttura di questi apparati, giacchè come nell'*Ephedra altissima* così nell'*Equisetum ramosissimum* ho trovato nel fondo del vestibolo quattro concavità *(fig. 3, y, Tav. IV)* ovvero quattro appendici tubulose più sviluppate di quel che sono nell'*Ephedra*, tanto

che pajono speroni. In qualche periodo di vegetazione queste appendici si posano sulla faccia superiore delle cellule semilunari, e quivi mentiscono l'aspetto di due altre cellule simili. Quest'apparenza non è costante, giacchè può dipendere dal piano, secondo cui viene eseguita la sezione perpendicolare. Esse contengono materia granellosa, come quella che ricolma abitualmente tutto il vestibolo.

Un altro fatto ancora ben degno di nota è osservabile nella faccia inferiore del derma lungo ciascuna serie di stomi, ed è l'esistenza di alcune cellule particolari interposte ad una ad una tra uno stoma e l'altro. Sono cellule ramose *(fig. 18, v v, Tav. IV)* conformate ad *X*, i cui rami cingono le cellule ventricose, quelle stesse che tappezzano e pare tengono il luogo delle camere pneumatofore *(Tav. IV, fig. 17, v)*. Ad epoca di completo sviluppo anch'esse si cuticolizzano e resistono all'azione dell'acido azotico bollente. Ferme somiglianti, per quanto io mi sappia, non sono state mai rinvenute accanto agli stomi di piante fanerogame.

Le cose esposte fin qui riguardano la struttura degli stomi, e segnatamente le diverse modalità del vestibolo, dell'ostiolo, del cistoma ed alcune cellule attigue. Esse sono il risultato delle mie ricerche fatte sopra un gran numero di piante fanerogame e crittogame vascolari, per brevità non tutte citate nel presente lavoro; quali ricerche mi condussero alle seguenti conclusioni:

Lo stoma nelle piante fanerogame e crittogame vascolari non è un organo ridotto alla semplicità d'una piccola fessura circondata da due cellule semilunari, ma *un apparato organico* fatto di più parti, ciascuna delle quali assume, secondo l'età sua e secondo la natura dell'organo cui appartiene, forma varia; stando però sempre simile il piano fondamentale dell'intero apparato.

Il vestibolo non è un semplice avvallamento dell'epidermide in corrispondenza dell'apertura stomatica, ma l'effetto d'un particolare movimento evolutivo di tutte le parti annesse, segnatamente delle cellule dermatiche.

L'ostiolo, *apertura ovale* ecc., è circoscritto sempremai da due cellule semilunari, più o meno incurve secondo le specie; e non mai da quattro, come fu detto per l'Agave americana ed altre piante; quali cellule oltre alla forma e struttura abituale, offrono ordinariamente alla faccia superiore due solchi longitudinali e paralleli al loro margine interno, i quali distinguono i ricrescimenti labriformi dal resto della loro superficie.

Il cistoma v'è sempre, ma non sempre tanto sviluppato che si possa osservare cogli ordinarî ingrandimenti. Esso viene direttamente dalla cuticola e prende pochissima consistenza là nei margini interni delle due cellule semilunari, ove fa corpo coi ricrescimenti labriformi. Nelle piante crasse, a derma fatto di più ordini di cellule dermatiche, il cistoma assume le maggiori proporzioni, talvolta sensibili ai più discreti ingrandimenti. Nel *Cereus peruvianus*, nell'*Opuntia Dillenii* e nel *Lilium candidum* non solo il cistoma, ma tutte le altre parti dell'apparato stomatico sono sviluppate in proporzioni ancor vantaggiose.

Finalmente è a dire che alla costituzione di cosiffatto apparato spesso concorrono alcune cellule dermatiche, che per la forma, per lo sviluppo e per la disposizione, non sono da confondere con altre cellule contigue. Per esse l'apparato stomatico piglia aspetto di glandole, come spero sarà dimostrato nel corso della presente memoria.

PARTE SECONDA

DELLA DISTRIBUZIONE DEGLI STOMI, E LORO RAPPORTI CON ORGANI GLANDOLARI DIVERSI.

Sul tema della distribuzione degli stomi molte nozioni sono già passate nel dominio della scienza e per opera dei più eminenti osservatori. Tra questi lo Schleiden disse, di aver trovato stomi nella parete interna dell'ovario delle Passiflore; in simili condizioni anatomiche ne rinvenne pure il Trécul nel *Cheiranthus Cheiri* ed altre Crocifere; il Fournier ne trovò nella *Reseda;* il Sachs nel *Ricinus,* ed il Duchartre ne vide sulle foglie della *Lathrea clandestina* e di parecchie piante acquatiche, quali immerse, quali galleggianti e quali emerse, come la *Nymphoea alba,* L.; il *Nuphar luteus*, Smith.; l'*Hidrocharis morsus-ranae*, L.; il *Lymnocharis Humboldtii*, Rich. [1]). E così i Sigg. Askenasy e Borodine hanno segnalato l'esistenza di tali organi nel *Ranunculus acquatilis*, nell'*Hottonia*, nella *Callitriche verna* e *C. autumnalis.* Il Gasparrini ed il Cesati ne discovrirono ancora nell'*Isoctes lacustris* [2]), ed il Trevirano ne vide altresì sull'apofisi del *Polytricum alpinum* e di altri muschi.

Più distesamente trattò l'argomento sotto questo rapporto il Kareltschikoff [3]), in due memorie distinte. Ma ciò ch'io intendo riferire in questa seconda parte del mio lavoro non riguarda solamente la distribuzione topografica degli stomi nella pianta in generale, ma ancora i loro rapporti anatomici fisiologici con alcuni organi speciali.

Le mie ricerche fatte in proposito si riferiscono ad un gran numero di piante; e segnano la data del 1870. Esponendone ora i risultamenti ottenuti, spero non incorrere in ripetizioni inutili. Ed in questo rammenterò i nomi di sole quelle specie che mi hanno presentato fatti positivi ed importanti.

Stomi in rapporto ad organi fiorali.

§ 1. — *Stomi sul nettario dell'* Isoloma Decaisneana, Hort., *ed altre piante.*

Nel ricettacolo fiorale di questa specie sono cinque piccole prominenze coniche. Il posto che occupano tra gli stami ed il pistillo, la loro lunghezza di circa un millimetro, le relazioni di simmetria con le altre parti adiacenti, ce li farebbero ritenere come un aborto di altrettanti stami. Esse traggono origine da quell'organo, che per la sua natura morfologica, tuttora controversa, viene chiamato dagli autori *nettario, disco* e *stilopodio.* Queste prominenze sono fatte di tessuto cellulare alquanto compatto, con superficie rivestita di sottilissima epidermide. Il loro colore è bianco traente al giallognolo, come l'organo da cui provengono. Nel loro interno si rinvengono alquante trachee. L'epidermide ch'è altresì fornita di peli, non giunge a coprire l'estremità di ciascuna prominenza, la quale è però glabra e gremita di piccole papille.

Queste papille *(Tav. IV, fig. 1* e *2),* sono in realtà piccoli gruppi di cellule formanti glandule; al vertice di ciascuna glandola, che per alludere alla forma ed all'ap-

1) V. Duchartre — *Élements de Botanique* — Deuxième édition. Paris 1877.
2) V. Caporale — *Catalogo dei manoscritti inediti del Gasparrini.* Napoli 1869.
3) V. *Bull. de la Société Botanique de France* — Année 1867-68.

parenza, dirò *glandola papillare*, è uno stoma *(s)* assai più grosso di quelli che si rinvengono in altre parti della stessa pianta. La sua apertura lenticolare è alquanto infossata, ma pure cinta di sottili ricrescimenti labriformi, da cui pende largo cistoma, a forma d'imbuto o di cono rovescio. Atteso la tenuità e la trasparenza del tessuto papillare che lo circonda, può essere esaminato con un discreto ingrandimento e senza l'opera di alcun trattamento microchimico. Il numero di cosiffatte glandule per ciascuna prominenza conica varia da quattro ad otto, e tutte emettono un certo umore neutro e zuccherino, ch'è appunto l'umor nettareo della pianta.

Di stomi così grossi ed in simili condizioni anatomiche ho trovato un maggior numero nella *Gesneria lasiantha*, Zucc., ove sono del pari destinati all'emissione di umore nettareo. Nella *Tydea elegans,* Hort., in luogo di cinque prominenze coniche, sono cinque sporgenze laminari, che pajono altrettante linguette bicuspidate; il loro vertice è pure stomatifero e grondante copioso nettare.

Nell'*Alloplectus speciosus*, Poepp *et* Endl., le cinque prominenze sono di color giallo intenso, ed il loro vertice è tagliato a sbieco. Quivi si scorgono numerosi stomi, grossi assai più del consueto, tanto che si possono vedere colla semplice lente d'ingrandimento.

Nella *Phytolacca dioica*, L., non vi sono nè prominenze, nè papille ghiandolari; ma un semplice disco, il quale porta alla superficie numerosi stomi raccolti in gruppi e secernenti umore nettareo; anche questi sono più grossi dell'ordinario, e, quando si considerino in raffronto a quelli che si rinvengono sulla foglia della stessa pianta, sembrano grossissimi. E giova qui soggiungere che, l'ovario, che sovrasta siffatto disco stomatifero, non porta alla superficie stomi nè piccoli nè grandi che fossero. Nel *Convolvulus sepium,* L.; e *C. arvensis*, L., il disco è come un cercine calloso di color giallo-arancio, sul quale sorgono cinque piccole prominenze. Queste abbracciano la base dell'ovario e trasudano gran copia di umor nettareo, essendo anch'esse stomatifere. Egli è vero però che alla secrezione di questo liquido, partecipino, sebbene in modo complementare, la base del calice e della corolla. Nel *Convolvulus paniculatus*, L., staccando destramente la corolla, è poi bello a vedere come sulle cinque prominenze del disco si raccolgono, in presenza dell'osservatore, cinque goccioline di liquido, le quali additano l'esistenza degli stomi e rivelano la virtù secretiva degli organi sottoposti. In questo caso tutte le altre parti adjacenti sono asciutte e senza stomi. Lo stesso m'accadde osservare nel fiore della *Tecoma radicans*, Juss.; del *Citrus Aurantium*, L.; e della *Vitis vinifera*, L. In quest'ultima specie ebbi ancora a notare che su ciascuna prominenza del disco trovasi un solo stoma; e che il gemitío dell'umore si protrae per tutta la durata della fioritura. Nell'*aesculus rubicunda,* Herb.; ed *A. Pavia rubra*, Lam., questi organi secernenti trovansi collocati in punti interposti tra le basi dei filamenti e non altrove. Nell'*Aesculus flava*, Ait., non se ne rinvengono punto.

Nell'*Acer platanoides,* L., si distinguono, come è noto, due miniere di nettario o disco: uno nel fiore ermafrodito, conformato a cercine, di color verde; l'altro, nel fiore maschile, fatto a guisa di coroncina papillare e di color giallastro. Tanto sull'uno che sull'altro, esistono alquanti stomi, i quali, nel primo sono raccolti entro piccole fossette, nel secondo al vertice delle papille. In tutte le piante, nelle quali ho trovato stomi in simili rapporti col nettario, essi superano in grossezza due o tre volte quelli esistenti in altre parti. Solo nell'*Acer oblongum*, Vall., ho trovato l'inverso, ove, per giunta, i detti stomi sono sparsi senza ordine riconoscibile. Un fatto analogo ho riconosciuto

nell'*Escallonia rubra,* Pers., sul cui nettario ho notato ancora che la parte gremita di stomi è colorata in rosso. Forme più speciali assume il nettario nella famiglia delle ... brellate, ove in verità piglia il nome di *stilopodio.* Nella *Ferula neapolitana,* Ten., nell'*Heracleum Spondylium*, L., ed in altre specie della stessa famiglia, quest'organo è rivestito da un ordine di cellule particolari, cioè da cellule a pareti sottili e striate in vario senso *(Tav. V, fig. 10).* Tra esse sono nascosti parecchi stomi destinati ad emettere un certo umore resinoso, anzichè nettareo, il quale umore spalma la superficie dell' intiero stilopodio e lo rende lucente. L'aspetto striato-fibroso di quelle cellule trova analogia nel calice della *Spiraea argentea,* L., ed altre specie affini, del *Prunus caroliniana,* Ait., e nei fiori della *Benthamia fragifera,* Lindl. In questi ultimi, malgrado la loro piccolezza e le particolari relazioni coll' asse fiorifero, si ha un più chiaro esempio di nettario stomatifero.

In altre piante la esistenza degli stomi sul nettario è tradita dalle colorazioni diverse che assumono i tessuti sottoposti. E qui mi corre l'obbligo affermare, che la presenza degli stomi sul nettario è un fatto comune a molte altre piante, ma non generale. Perciocchè, fra le specie esaminate in proposito, moltissime mi hanno presentato nettario sfornito affatto di stomi e con secrezione nettarea, piuttosto abbondante. Sarebbe perciò errore il credere che l' emissione del nettare, per parte della pianta, fosse fenomeno necessariamente legato alla presenza degli stomi; ma sì bene ad una particolare virtù del tessuto sottoposto.

§ 2. — *Stomi su punti diversi del pistillo.*

Nella Globa saltatoria, Roxb., l'ovario è sormontato da stilo lungo circa un centimetro e sottile assai più dell'ordinario. Però lo stimma è alquanto ingrossato e cavo a foggia d'imbuto *(Tav. V, fig. 7 ed 8)*, irto di cellule acuminate e flessibili. Alla base d'esso arrivano internamente alquanti vasi spirali, in corrispondenza dei quali, trovansi esternamente alquanti stomi, disposti senza ordine riconoscibile. Le loro cellule semilunari, ampie e turgide più del consueto, sono accompagnate da due cellule speciali incurve, come quelle vedute negli stomi dell'*Opuntia Ficus-indica,* Mill., ma troncate obliquamente ad ambo gli estremi. La loro trasparenza e la tenuità del tessuto sottoposto sono due condizioni che lasciano travedere il cistoma senza bisogno di particolari dissezioni. E vi si vede come un' ampolla *(fig. 8, l)*, il cui fondo si posa sopra alquante cellule ordinarie e senza clorofilla. Per tutt' altro questi stomi non differiscono punto da quelli rinvenuti sul disco dell'*Isoloma Decaisneana* e d'altre Gesneriacee.

Sul disco delle Peonie ho trovato stomi in condizioni non meno rimarchevoli delle precedenti. Nella specie *Paeonia Moutan,* Sims., questo disco è lagenaliforme e colorato in rosso cupo; nella *P. mollis,* Ander., è, per contrario, diviso in lobi quali più quali meno sbrandellati e disposti in guisa da raffigurare un verticillo di stami od altri organi rudimentali. Tanto sull' uno che sull' altro rinvengonsi numerosi stomi, i quali per la grandezza, per la disposizione e pei rapporti immediati con tessuti colorati, sembrano destinati ad espellere umori particolari. Anche gli stimmi petaloidei delle due specie anzidette ne sono gremiti.

Chiudono quest'ordine di ricerche alcune osservazioni nella *Trewesia palmata,* Vis., e nell' *Hedera Helix,* L. Sullo stilopodio di queste due specie si raccoglie, durante la fio-

ritura, un certo umore, ch'è giallognolo nella *Trewesia*, incolore nell'*Hedera*. Esso geme da cinque fossette, e precisamente da altrettanti gruppi di stomi in esse fossette collocate *(Tav. V, fig. 11, m)*. E queste fossette vi si alternano con le inserzioni degli stami, cioè sono in diretta corrispondenza di altrettanti fasci fibro-vascolari, posti al di sotto nell' asse fiorale. Nell'*Hedera*, anzichè fossette, trovi solchi, quando più e quando meno profondi, secondo l'età; e l'umore che si raccoglie alla superficie vi si addensa e si cristallizza. In questo stato presentasi alla vista immediata sotto forma di pellicole bambaginee. Atteso la frequenza della pianta e la sua copiosa fioritura, ho raccolto e poscia esaminato coi mezzi ordinarî della chimica una certa quantità di siffatte pellicole, ed il risultato ottenuto dalle analisi è stato *molto glucosio* e *pochissimo saccarosio*. Per questa ricerca intervenne la cortesia del Professore N. Reale, ed ora gliene rendo pubbliche grazie.

§ 3.— *Stomi in organi chiusi e semichiusi.*

Nei fiori maschi della *Cucurbita perennis,* As. Gr., il disco è nascosto dalla base degli stami monadelfici, ma non chiuso, che l'aria e la luce non vi penetrino; ed è gremito di stomi tanto nei margini, quanto nella faccia superiore. Quali stomi sono rimarchevoli, non solo pel posto che occupano, ma ancora per la turgescenza delle loro cellule peristomatiche, più per la figura circolare, anzichè semilunare delle medesime e per l'ampiezza dell' ostiolo. Anche il disco della *Bryonia dioica,* Jacq., e di parecchie altre cucurbitacee offre numerosi stomi in condizioni identiche.

Nell'*Abutilon venosum,* Hook., ho trovato ancora stomi nella faccia interna di quel tubo risultante dalla riunione degli stami monadelfici, i quali stomi sono frammisti a piccoli gruppi di peli bicuspidati; mentre nella faccia esterna dello stesso tubo, sul disco e sul ricettacolo fiorale, non se ne trovano punto. In vece vi si scorge un gran numero di altri peli glandulari, foggiati secondo un tipo già conosciuto in altre piante.

Nella *Campanula Medium,* L., ed in molte altre specie congeneri, il disco è, per condizioni organografiche, pressochè simile a quelli nelle specie precedenti; e gli stomi che vi sono sparsi alla superficie, tuttochè meno prominenti, pel bianco colore del tessuto circostante, sono altresì molto appariscenti.

Nei fiori del *Siphocampylus bicolor,* G. Don. le condizioni organografiche si fanno più complicate. Perciocchè alla cavità ovarica *(Tav. V, fig. 5, m),* succede uno spazio *(fig. 5, n)* chiuso dagli stami sinfisandri che può dirsi un'altra cavità. Nelle pareti di questa e di quella esistono numerosi stomi, pei quali, all'epoca della completa fioritura geme umore acquoso, ch'è abbondante e dolcigno nella cavità superiore, scarso ed insipido nell'inferiore. E qui non è inutile ricordare che quest'ultima cavità *(fig. 5, m),* è, come d'ordinario, perfettamente chiusa, mentre l'altra, malgrado il perfetto combaciamento degli stami collo stilo è semiaperta, sì che l'aria vi può entrare. Nei fiori di questa specie trovansi adunque stomi giacenti in condizioni analoghe a quelle nei fiori della *Cucurbita perennis* e dell'*Abutilon,* e stomi alla faccia interna d'un ovario perfettamente chiuso.

Intanto, stimando che questi fatti possono dar luogo ad importanti considerazioni fisiologiche, ho creduto rifermarli, allargandone le ricerche. Il lavoro, a tal fine eseguito, non mi fu scarso di buoni risultamenti; giacchè vidi stomi nell' ovario di parecchie altre specie, e quel ch'è più, sugli ovoli.

§ 4. — *Stomi sulla faccia interna dell' ovario e sugli ovoli.*

Nell'*Iris tuberosa,* L., *Hyacinthus orientalis,* L., *Lachenalia pendula,* Ait., *Papaver Rhoeas,* L., *Capsicum annuum,* L., *Muscari commutatum,* Guss., *Amaryllis (Zephyranthes) mesochloa,* Steud., *A. purpurea,* Ait., *A. tubispatha,* Herit., *A. rutilans,* Ker., *Pancratium mexicanum,* L., *P. maritimum,* L., ed ancora in parecchi Narcisi e nei Cannacori, ho trovato stomi alla faccia interna dell'ovario, i quali concordano fra di loro nell'essere più grossi di quelli che sono nelle parti verdi delle rispettive piante, e nell' avere le cellule peristomatiche ineguali e contorte. In quelli dell'*Iris tuberosa* lo spazio lenticolare è di traverso *(fig. 13, Tav. V)*, e tutti giacciono su d'un tessuto epidermico a cellule papillari e turgide più dell'ordinario. Il maggior numero si rinviene verso i margini carpellari, ed a preferenza lungo i fascetti placentari; mentre sul resto della parete ovarica sono piuttosto rari. In qualunque punto si trovano, le cellule dermatiche che li accompagnano sono irregolari e contorte. Nel *Capsicum annuum*, L., se ne trovano di due maniere, piccoli e grossi; nei primi l' ostiolo è chiuso, beante e di figura circolare negli altri. Le cellule semilunari contengono granelli amidacei, anzichè globuli clorofillini. In quanto poi alla disposizione, posso affermare, che detti stomi confluiscono verso i margini carpellari, cioè lungo la faccia interna dei tramezzi, non punto verso il dorso, ove, per contrario, si scorge una epidermide con struttura profondamente modificata. Se l' indole del presente lavoro mel consentisse, descriverei volentieri le modificazioni assunte da quest'epidermide endocarpica; ed i suoi rapporti anatomici coi tessuti sottoposti; e direi pure dello scopo fisiologico cui è destinata. Ma tutto ciò propongo trattare in altro speciale lavoro.

Intanto, ritornando all'esistenza di stomi in organi chiusi, dico che mi sembra molto importante averne ancora scoverto sugli uovicini e sulle semenze nell'*Iris tuberosa,* nella *Canna flaccida,* Ros., e *C. iridiflora,* R. P., *nel Pancratium mexicanum, Amaryllis candida*, Lindl., *A. Belladonna*, L., e nella *Nerine undulata*, Kert., specie tutte ad ovario chiuso fino alla completa maturità delle semenze.

Nell' *Iris tuberosa* se ne rinvengono alla superficie degli ovuli perfetti e lungo i rispettivi cordoni ombelicali. Il loro numero è vario ed indeterminato. Nell' *Amaryllis purpurea* sono in pochi, cioè due per ogni ovulo o semenza, ed occupano due punti opposti presso il margine membranoso dell' episperma. Con la stessa simmetria trovansi nell' *Amaryllis tubispatha* ed *A. rutilans.* La loro esistenza in tali condizioni non è un fatto accidentale, imputabile a fenomeni teratologici, ma costante e normale.

Il Prillieux in una sua memoria sulla struttura e sulla formazione degli stomi in alcune Amarillidee [1]), riassumendo i lavori sullo stesso argomento, pubblicati da altri illustri Botanici, dice, che il Karsten nel 1860 ha fatto conoscere che i semi nell'*Hymenocallis repanda*, grossi quanto una castagna, sono muniti di stomi; e che il Caspary e lo Schleiden hanno pure segnalato l' esistenza di detti stomi, il primo nell'*Ismene nutans,* Herb. (*Pancratium nutans,* L.), il secondo nel genere Canna. Adunque la scoverta di stomi sopra ovoli o semenze non è nuova del tutto, com'io credeva al tempo delle mie osservazioni, e se pur lo fosse per qualche verso, non oserei contendere ad

[1]) Prillieux — *De la structure et du mode de formation des grains bulbiformes de quelques Amaryllidées — Ann. Sc. Nat.* 4.e Serie, T. IX, pag. 97. Paris 1868.

alcuno la priorità. Mi stimerò pago se col presente lavoro potrò illustrarla con nuove ricerche e con più larghe vedute.

Nella *Canna indica* questi stomi epispermici si sviluppano sugli ovoli circa l'epoca della fecondazione, cioè da quando detti ovoli cominciano a divenir semenze. Da quell'epoca in poi le cellule peristomatiche *(Tav. V, fig. 17* e *18 x, x)* si mostrano cinte d'una zona di cellule oblunghe e prismatiche *(fig. 17 p* e *fig. 18 t, Tav. suddetta)* alle quali succedono altre più piccole e di forma ordinaria; l'ostiolo, ch'è di figura circolare, s'apre nel fondo di speciale fossetta *(fig. 17* e *18 a)* scavata nello spessore delle stesse cellule peristomatiche, ed apparisce nel campo del microscopio come un largo foro areolato. A ciascuno stoma corrisponde una camera pneumatofora in parte compresa nello spessore del *testa (fig. 18 z)* ed in parte nel *tegmen*, ove si fa più ampia e si circonda d'una zona di cellule particolari per forma e per contenuto. In quanto all'esistenza del cistoma non posso con tutta certezza pronunziarmi; ma, per argomenti d'analogia, ho ragione di credere ch'esso non manchi.

Nell'*Iris tuberosa* la formazione di codesti stomi è più precoce, giacchè vi si rinvengono sulla primina di ovoli non ancora completi. In questa specie le cellule semilunari non contengono mai clorofilla, ma plasma amorfo ed incolore, il quale, durante il passaggio dell'ovolo in semenza, prende varie disposizioni e spesso offre delle vacuole *(Tav. V, fig. 20)*. Sono del pari precoci sugli ovoli del *Pancratium maritimum*, dell'*Amaryllis purpurea, A. rutilans, A. tubispatha* ed altre specie a semenze secche e compresse, nelle quali però si rinvengono in iscarso numero e solamente sul margine membranoso in contatto della placenta. — La cosa procede diversamente nelle semenze carnose e bulbiformi del *Pancratium nutans* e *P. mexicanum*, l'episperma delle quali è bianco e sottile dapprima, rosso e carnoso durante il processo maturativo del pericarpio, verdastro nel tratto successivo, fino alla completa germinazione. In questo mutare di colore e di consistenza, lo strato superficiale dell'episperma si organizza in vera epidermide e con essa si formano alquanti stomi che in seguito vi si mostrano distribuiti senza ordine riconoscibile. Ma ad epoca di completo sviluppo questi stomi rinvengonsi ad uno ad uno nel fondo di piccole depressioni; ciò vuol dire, che il tessuto circostante s'è elevato pel processo maturativo della semenza. E queste depressioni sono circoscritte da una specie di cercine fatto della cuticola, in quel torno divenuta più spessa. Per tutt'altro, codesti stomi epispermici non differiscono punto da quelli esistenti sulla faccia interna dell'ovario nella stessa pianta.

La formazione tardiva della clorofilla e lo sviluppo dell'epidermide stomatifera sopra organi rinchiusi, sono due fatti i quali si presentano all'occhio dell'osservatore come effetti di esuberante vitalità. A mio avviso costituiscono ancora un valido argomento per riconoscere nell'episperma di queste semenze il carattere di organo foliaceo.

Risulta ancora dalle mie ricerche, che l'esistenza di stomi sul seme non sia da ritenersi come un fatto legato necessariamente alla carnosità dell'episperma in generale, giacchè, come di sopra ho riferito, essi si trovano in semenze asciutte, come quelle della *Canna indica*, mentre mancano talvolta in semenze carnose, come nella *Clivia nobilis*, Lindl.; e nemmanco si può dire che tengano al colore verde dell'episperma.

Nell'episperma del *Pancratium maritimum* ho veduto tra le cellule superficiali alcuni ricrescimenti parietali disposti e conformati in guisa, da mentire l'aspetto di altri stomi epispermici *(Tav. V, fig. 21 e 22 ss)*. Quali ricrescimenti circoscrivono uno spazio di fi-

gura ellittica, chiuso d'ogni parte, nel quale si raccoglie materia granellosa, che ricorda la polvere glauca, quella stessa che suole ricolmare lo spazio lenticolare dei veri stomi. L'origine di tali apparenti stomi, è contemporanea alla conversione della superficie epispermica in verace epidermide, e questo fatto coincide colla maturazione dell'ovolo. Nel tratto successivo crescono in proporzione dello spessore dell'epidermide e, crescendo, si cuticulizzano tanto che l'acido solforico non li dissolve. Il posto che occupano, l'epoca di loro formazione e la loro apparenza esteriore mi confermano nell'idea di stomi abortiti. Intanto, comunque essi sieno, credo costituiscono un esempio di cuticulizzazione in punti ove la cuticula non s'introflette.

§ 5. — *D' altri stomi collegati ad organi glandolari non ancora ben conosciuti.*

È noto da gran tempo che la faccia esteriore dell'ovario vada per lo più munita di stomi. Questo fatto, comechè riferibile ad un organo d'indole foliacea e d'ordinario colorato in verde, non so che abbia meritato special menzione, anche perchè esso rientra nella legge generale della distribuzione degli stomi rispetto a tutte le parti verdi della pianta; ma l'indole del mio lavoro mi ha condotto sull'esame di questi organi in quel che l'ovario passa a frutto maturo; e però molte piante ho esaminato in proposito.

Un fatto ben riconosciuto nel maggior numero delle specie da me fin'ora esaminate, si è l'obliterazione degli stomi durante il processo maturativo del frutto; ma in alcune non avviene lo stesso, come nella *Passiflora racemosa*, Brot., nella *Cydonia japonica*, Pers., nel *Prunus domestica* ed ancora in altre specie di cui intendo ora trattare.

Il frutto della *Passiflora racemosa* si mostra fin dalla sua prima età segnato da un certo numero di punti bianchi, ai quali corrisponde una piccola prominenza dell'epidermide. Il microscopio riconosce in ciascuna di esse prominenze un insieme di sei ad otto cellule speciali, che, fino ad un certo tempo, ricordano, per la loro forma, grandezza e disposizione, le cellule papillari sul nettario dell'*Isoloma Decaisneana*. Esse circoscrivono un grosso stoma, le cui cellule semilunari sono grandi e turgide più dell'ordinario.

Nella sezione orizzontale di ciascuna prominenza si vede chiaro che le sei od otto cellule, che cingono lo stoma, hanno parete più spessa che nelle altre adiacenti: ed il lato, pel quale dovrebbero stare ad immediato contatto dello stoma, v'è sensibilmente introflesso od incurvato, per modo che lo stoma sudetto vi rimane sostenuto solo da sei od otto angoli sporgenti *(Tav. IV, fig. 8 z)*, risultanti dall'unione delle pareti in contatto. Nel taglio verticale poi ho notato più nettamente, che la forma arcuata di coteste cellule speciali, lascia al di sotto un vuoto più ampio di quel che suol'essere la camera pneumatofora. Nel complesso ho riconosciuto in ciascuna di queste prominenze la struttura di un organo glandolare epidermico, e però io le chiamerò *glandole stomatifere epidermoidali*. Organi cosiffatti ho trovato pure sui frutti della *Passiflora Vespertilio*, L., della *P. pseudo-suberosa*, Fisch., ed ancora della *P. coerulea*, L., sebbene con qualche variante nel numero e nel grado di sviluppo delle cellule speciali.

Ora, considerando queste glandole stomatifere in raffronto agli apparati stomatici dell'*Euphorbia pendula (Tav. IV, fig. 11)*, io credo di riconoscere negli uni e nelle altre una grande analogia se non una perfetta somiglianza. Vi si riconoscono gli stessi elementi, cioè cellule speciali grosse più dell'ordinario e cistomi imbutiformi in corrispondenza di ampie lacune pneumatofore. La differenza starebbe in ciò solo che nella *Euphorbia* tutte

codeste glandole sono infossate, mentre nella Passiflora sono quando più e quando meno prominenti. La quale differenza diventa insignificante quando si consideri, che l'essere siffatte glandole più o meno prominenti o più o meno infossate, varia secondo la specie e secondo l'età dell'organo su cui cade l'osservazione.

La specialità delle cellule *(Tav. IV, fig. 8 z)*, che costituiscono le ghiandole stomatifere nei frutti delle Passiflore, non sta solo nella forma, nella grandezza e nella disposizione, ma ancora nella natura del loro contenuto; perciocchè esse contengono, in qualunque periodo di crescenza, una sostanza plasmica di color giallognolo, che non si rinviene mai in altre cellule limitrofe. Però, quando il frutto è giunto a maturezza compiuta, questa sostanza si decolora e poi sparisce. In questo caso tutta la glandola si presenta alla vista immediata come una macchia bianca più larga di quella che era in principio. In quanto alla loro funzione, io non potrei, fino a questo momento, pronunziarmi con tutta certezza; ma, edotto da altre osservazioni fatte sopra organi simiglianti e rinvenuti in altre piante ed in rapporto con altre parti, ho ragion di credere che esercitino virtù secretiva ed escretiva insieme. In quanto poi all'origine dei loro singoli elementi istologici posso affermare, che le cellule semilunari sono le prime ad apparire e su di un tessuto tanto tenero che non può dirsi ancora tessuto epidermico; che ad esse succedono immediatamente le cellule laterali *(z)* e poscia si individualizzano e si perfezionano le cellule che costituiscono la circostante epidermide. Le cellule peristomatiche rimangono ove nascono, cioè in un piano superiore alle altre limitrofe; e queste, che sono cellule *speciali*, sono ancor più elevate delle dermatiche; tutte circostanze, che rivelano un'indole particolare negli elementi di questi apparati glandolari.

Nella *Cydomia japonica*, nel *Sorbus domestica* ed altre specie pomacee, non mancano glandole. Su ciascun frutto, a parità di superficie, se ne scorge un minor numero; però differiscono da quelle di sopra descritte per le seguenti particolarità: lo stoma vi è poco prominente, le cellule semilunari hanno più stretto contatto colle circostanti cellule speciali; e queste non sono, nè troppo arcuate, nè troppo più grandi delle dermatiche. La loro forma è però poliedrica, anzichè semilunare e vi sono disposte in due zone. Qualche volta in luogo di un solo stoma all'apice della glandola se ne trovan due, l'uno grande e l'altro piccolo; ma entrambi sempre diversamente sviluppati, rispetto a quelli esistenti sulle foglie o sugli organi fiorali della pianta cui appartengono.

Sul frutto della *Rosa glandulosa*, Bell., e del *Prunus cerasus*, L., codeste glandole stomatifere sono foggiate sul medesimo tipo. Però in quelle della Rosa ebbi a notare che le cellule speciali *(Tav. V, fig. 14 pp')*, che cingono lo stoma, sono pure arcuate e distribuite in due serie circolari; e che al di sotto di esse, cioè intorno alla camera pneumatofora, si vede un gruppo di cellule parenchimali *(fig. 15 n)* lascamente congiunte fra loro, le quali si diversificano dalle altre dell'adjacente parenchima, non solo per essere più lascamente riunite, ma per essere ricolmate di clorofilla in tutti i periodi della maturazione del frutto. — Queste glandole si veggono sempre impecolate alla superficie di materia cerosa, detta comunemente biancume, specialmente quelle sui frutti della Cydonia, della Rosa, ed ancora in quelli del *Cephalotaxus Fortunei-drupaceus*, H. Neap., e del *Podocarpus latifolius*, Wall. E qui giova ricordare che i frutti di queste due ultime specie, quantunque per la loro natura morfologica non sieno da paragonarsi a quelli delle specie precedenti, pure, esaminati diligentemente nei loro tessuti periferici, e, segnatamente nelle loro glandole stomatifere, mi dettero ragione di convincermi che la materia

cerosa viene elaborata dalle glandole stomatifere e poi emessa al di fuori, massimamente per la via degli stomi. La pruova più evidente ed irrepugnabile si ha nel *Cephalotaxus Fortunei-drupaceus*. Quivi infatti si vede alla superficie dell'*epicarpio* od *episperma* che si voglia dire, tanti mucchietti di polvere glauca, qua e là disseminati, i quali tradiscono la presenza di altrettante glandole stomatifere. Su questi frutti ho sperimentato che l'alcool discioglie quei mucchietti, alterandone però leggermente la vegetazione dell'organo, mentre il semplice attrito con un pannilino ne la toglie completamente senza danno immediato. Con questo mezzo fu bello vedere, che dopo alquanti giorni, quei mucchietti si fossero riprodotti. Per tanto non ho ragioni di negare agli stomi ordinarî ed ancora all'epidermide in generale questa stessa virtù secretiva, anzi ciò mi risulta da numerose osservazioni fatte in altre piante e sopra organi di natura diversa.

Poichè intorno alle dottrine controverse, com'è questa della funzione degli stomi, le ricerche e le sperienze non sono mai soverchie, stimo opportuno qui riferire il risultato di altre mie osservazioni.

Nelle foglie dello stesso *Cephalotaxus* esistono, solo alla pagina inferiore, stomi di forma e grandezza ordinaria; e quivi giacciono, lungo una sola lista, ch'è appunto di color biancastro per polvere glauca. Nelle stesse condizioni se ne trovano pure nelle foglie dell'*Abies Pinsapo*, Steud., e nel *Libocedrus chilensis*, Endl., e *L. Doniana*, Endl. In queste ultime specie s'aggiunge la particolarità che le liste bianche sono flessuose ed in ambo le pagine, ciò ch'è in rapporto colla disposizione obliqua dei ramuscelli cui le foglie appartengono.

Sul mallo della noce (*Iuglans regia*, L.), sul ricettacolo del fico (*Ficus Carica* ed altre specie), sull'epicarpio del *Laurus nobilis, L.*, e nella corteccia giovane della *Paulownia imperialis*, Lieb., ho riconosciuto la presenza di glandole stomatifere, simili a quelle vedute nel frutto della *Rosa glandulosa;* e, come quelle mi parvero destinate ad emettere polvere glauca. In queste specie sono sparse senza ordine riconoscibile, ma ne ho trovato ancora sui frutti dei Cannacori (*Canna indica* e *Canna iridiflora*) ove giacciono in punti determinati, cioè al vertice di quelle prominenze epicarpiche, delle quali verrò ora esponendo i particolari anatomici, non foss'altro, per avere un addentellato a ciò che dovrò esporre in altra parte del presente lavoro.

Ma intanto non è inutile qui riferire d'un'altra forma di glandole stomatifere rinvenute sul ricettacolo del *Ficus elastica*, Roxb., le quali, essendo molto variate nella forma, nella grandezza e nel colorito, par che riassumano le specie innanzi descritte. Appariscono sul ricettacolo come piccole macchie bianche, ma in progresso di vegetazione assumono colore che varia dal giallo debole al giallo-rossigno, e talvolta ancora al rosso-mattone. Queste variazioni di colore non sono accidentali, bensì legate a variazioni di forma, ed a stadî di sviluppo. In fatti, sono bianche nei primordî della loro formazione e comparsa sul ricettacolo; sono gialle da che si mostrano come piccole prominenze emisferiche e mammellonari; son gialle-rossigne e rosso-mattone, allorchè somigliano a delle verruche scudiformi o a degli apotecî lichenosi. In quest'ultimo stadio di sviluppo, misurano circa un millimetro nel senso del loro diametro trasversale. Gli stomi vi sono allogati verso il centro della superficie là ove la tinta è sempre più intensa. In ciascuna glandola il microscopio fa riconoscere due specie di tessuti: uno corticale e l'altro centrale. Il primo è una continuazione del tessuto corticale dell'intero ricettacolo, il secondo è tessuto speciale fatto di cellule oblunghe, cilindracee,

unite capo a capo, e disposte in guisa, da formar serie moniliformi che sembrano filetti confervoidi. E questi filetti, ravvicinati ma non congiunti fra loro, sono legati alle parti circostanti, quali pei due capi opposti e quali per un solo. Essi non contengono clorofilla, nè altra materia pigmentale. La materia giallo-rossigna, cui è dovuto il colore delle glandole in parola, viene elaborata nel tessuto corticale e da cellule limitrofe agli stomi.

Occorre ancora notare, che il tessuto corticale del ricettacolo, in quel tratto per cui concorre alla costituzione delle glandole, si modifica notabilmente e, quel ch'è più, si divide in due zone una superiore od esterna, l'altra inferiore ed interna, sì che il corpo della glandola rimane tra esse compreso. Per queste relazioni anatomiche io credo che codeste glandole del *Ficus elastica* possano meritare la qualifica di glandule *corticali*, anzichè *epidermiche*. In quanto alla natura del loro prodotto secretivo non posso fin' ora pronunziarmi con sicurezza.

Il Pasquale in un suo lavoro monografico sull' Ulivo [1]), parlando del frutto di questa pianta, dice: « che l'epicarpio è segnato da gran numero di punti bianchi rile- « vati sulla superficie, i quali accennano ad un lieve rialzamento dell' epidermide, e che « ciascuno di questi punti corrisponde ad uno stoma, la cui bocca corrisponde ad una « lacuna sottostante, chiusa intorno da cellule simmetricamente disposte col loro dia- « metro maggiore diretto dal centro verso la circonferenza ». E nella tavola, che accompagna il citato lavoro, ritrae l'immagine di questi punti bianchi. Essi per me sono glandole stomatifere, come quelle rinvenute sul frutto della *Cydonia japonica*, della *Rosa glandulosa (Tav. V, fig. 14)*, del *Sorbus domestica*, del *Cephalotaxus Fortunei-drupaceus*, H. Neap. E trovo conforme al vero, ciò che l'illustre Botanico afferma della loro funzione secretiva ed escretiva di polvere glauca. Solamente mi corre l'obbligo osservare che *le cellule simmetricamente disposte*, per quanto io ne vidi e per quanto scorgo dalla figura ch'egli ne ha dato, non circondano la camera pneumatofora, ma il solo stoma a parte superficiale; e sono però cellule speciali d'origine dermatica.

Ritornando ora ai Cannacori soggiungo, che quelle prominenze epicarpiche sono costituite di tessuto cellulare distribuito in due coni, uno esterno e l'altro interno; che nel cono interno trascorrono alcuni fascetti vascolari, i quali convergono tutti verso l'apice; che quivi è una piccola troncatura trasversale e su questa una macula bruna. Questa macula è appunto uno stoma circondato d'alquante cellule speciali, voglio dire una glandola stomatifera. Vero è che questo stoma o glandola stomatifera conserva la sua turgescenza e la sua attività, fino a tanto che il frutto è in via di crescenza; perciocchè dopo tale epoca non vi si scorge che la sola macula, cioè l'avanzo delle cellule semilunari. Per rispetto alla funzione, esaminai codeste glandole stomatifere in diverse condizioni di sviluppo, e, solo nell'età giovanile dell'intiero organo, mi fu dato conoscere uno straterello impalpabile di polvere glauca. Le cose che verrò appresso esponendo, potranno, spero, illuminare questo argomento tuttora oscuro.

[1]) Pasquale G. A. — *Studî botanici e agronomici sull' Ulivo e sue varietà.* — Memoria con tavole — Vedi negli *Atti* e nel *Rendiconto dell' Accad. delle Sc. fis. e mat. di Napoli.* Anno 1873.

Sopra diverse specie di Glandole stomatifere

§ 6. — *Glandole stomatifere su germogli di* Solanum tuberosum, L.

I tuberi di questa specie, allorchè germogliano nelle condizioni ordinarie, non presentano alcuna cosa che possa avere attinenza col mio lavoro; ma quando, per contrario, mettono al di fuori del terreno o sul tavolo dell'osservazione, offrono fatti ben degni di nota. I nuovi germogli si convertono bentosto in novelli tuberi, quali più e quali meno bernoccoluti; la loro corteccia non si sviluppa normalmente, rimanendo delicata e ridotta alla sola epidermide. Alcuni di questi tuberi novelli conservano lungo tempo la forma tondeggiante, altri pigliano le forme di rami ascendenti; tra questi e quelli sviluppansi ancora grosse fibre radicali. Su i tuberi e sui rami, così sviluppati, bentosto si scorgono piccole prominenze mammellonari sotto sembianze di verruche *(Tav. V, fig. 23)*. Queste prominenze o verruche risaltano ancora dal piano dell' epidermide pel colore rosso che assumono, colore dovuto a materia pigmentaria elaborata dal tessuto periferico; mentre nella parte centrale abbondano di amido amorfo e granelloso. Ognuna d'esse porta un solo stoma all'apice, il quale v'è sostenuto da una rosetta di sei od otto cellule glandulari; qualche volta di tali stomi se ne trovano due o tre; in ogni caso al di sotto di esse corrisponde un gruppo di cellule non comuni, e sì lascamente congiunte tra loro, da offrire molti meati tracellulari.

La forma di questi stomi è ora oblunga ed ora tondeggiante, secondo la maggiore o minore turgescenza delle cellule semilunari, il che, val quanto dire, secondo lo stato più o meno rigoglioso della vegitazione in quei novelli germogli.

Siffatte prominenze stomatifere si sviluppano assai di buon'ora anche su tuberetti di secondo e terzo ordine, e tanto piccoli, che non misurano più di quattro o cinque millimetri nel senso del maggiore diametro. La materia colorante varia nella quantità ed ancora nell'intensità della tinta, secondo le condizioni in cui si trova il crescente tuberetto rispetto alla luce: è rosso-vivo, in quel che il tubero si sviluppa all'azione della luce diretta o diffusa; giallo-verdognolo e giallo del tutto se nell'ombra e nell'oscurità; e però sempre rosso nelle prominenze che si formano lungo i germogli ascendenti.

Il tubero che germoglia nel terreno ed in condizioni normali, non caccia tuberetti laterali se non ad epoca tardiva; nel quale caso questi assumono forma normale e caratteristica nella pianta in discorso, e non offrono punto prominenze stomatifere.

Le ricerche, qui sopra riassunte, sono state da me eseguite sopra tuberi germogliati sotto campana, e tenuti sul tavolo dell'osservazione per oltre sei mesi; durante qual tempo ho potuto esaminare le fasi evolutive delle prominenze mammellonari, nonchè i mutamenti cui va soggetta la materia colorante rossa, col mutar delle condizioni luminose e vegetative. Ed ho notato ancora, che i germogli, i quali avevano lungamente servito alle ricerche microscopiche, staccati dal tubero originario e messi a vegetare nel terreno, perdevano in pochi giorni la tinta rossigna, le loro prominenze mammellonari si ripianavano, e gli stomi sparivano totalmente. Da tutte codeste cose mi parve poter ritenere, che la formazione delle glandole stomatifere nei rizomi del *Solanum tu-*

berosum si debba a circostanze eccezionali anzichè normali. Di fatti, chi guardasse un tubero di questa pianta, germogliato nelle condizioni di sopra riferite, vedrete nell'insieme delle forme e del colorito gli effetti d'una vegetazione concentrata, e direi repressa, senza sviluppo, ma rigogliosa; gli è una vegetazione che dura fino all'esaurimento dell'amido che v'era prodotto dalla vegetazione precedente.

Da ultimo, non è inutile riferire che, da tuberi germogliati in condizioni meno anormali, ottenni pure lo sviluppo di prominenze stomatifere, le quali per essere state meno rosse e meno prominenti, somigliavano alle prominenze stomatifere esaminate nel ricettacolo del Fico, sul mallo della noce, sui giovani rami della *Paulownia imperialis*, ed ancora sul calice della *Carolinea alba*, Lodd. Tutte queste anologie mi hanno fatto nascere a poco a poco il bisogno di allargare le mie ricerche sopra ben altre piante e di natura più svariata. Ma intanto, per amor di brevità, taglierò corto, e dirò ciò che vidi in proposito su d'un'altra pianta che qui appresso verrà indicata.

§ 7. — *Di altre glandole stomatifere nello* Xanthium Strumarium, L.

Le piccole macchie, che adornano il fusto ed i picciuoli delle foglie in questa pianta, mi hanno dato tema di ricerche non estranee al presente lavoro. Esse, anzichè macchie, sono per verità piccole protuberanze di color rosso-livido, di figura, per lo più, ellittica, con gli estremi ristretti ed acuti. In ognuna di esse è uno stoma, e, talvolta, un gruppo di stomi. Da una parte la loro forma mi ricorda le prominenze mammellonari innanzi descritte, e, dall'altra, le lenticelle in generale. Quantunque somiglino più a queste che a quelle, per ragioni che appresso dirò, inclino a chiamarle *glandole stomatifere* della corteccia.

Per vedere quanto reggesse la rassomiglianza di queste glandole colle lenticelle, ho esaminato l'origine dell'une e dell'altre; ed a questo scopo ho preferito, sempre che l'ho potuto, le specie più note e prescelte dai precedenti osservatori. Ed ecco in succinto i risultati delle mie osservazioni.

Le glandole stomatifere dello *Xanthium Strumarium* traggono origine coll'epidermide e contemporaneamente alla formazione degli stomi che vi sono annessi. E questi stomi si formano nel modo abituale e già noto nell'epidermide in via di formazione, quando cioè, il tessuto sottoposto è ancora tutto omogeneo.

Ma ben presto questa omogeneità istologica sparisce naturalmente; giacchè l'epidermide s'individualizza, e l'involucro erbaceo si differenzia dalle altre parti della crescente corteccia. E pria che del tessuto sugheroso si vedesse l'inizio, là nella zona ove esso dovrà svilupparsi, si stabiliscono alcuni centri di maggiore attività formativa, da cui vengono alquante cellule speciali, e queste, aggruppandosi fin dal nascere, costituiscono altrettante glandole in abbozzo. Queste non restano immerse nel tessuto ove trassero origine, in vece si sollevano verso la superficie della corteccia, elaborano materia colorante rossa, e si presentano alla vista immediata come macchie di color rosso-livido. In questo stato sono già arrivate a perfezione.

La materia, cui è dovuto il loro colore, appartiene alla serie cianica, e si comporta agli acidi ed agli alcali come tintura di tornasole.

Alla superficie di ciascuna glandola sorgono, tra uno stoma e l'altro, alcune verruche, come fossero peli composti in via di formazione. Vero è che di somiglianti peli

o verruche se ne trovino pure sul resto dell'epidermide, e però la loro presenza mi parve insignificante.

La comparsa della materia colorante in ciascuna glandola è il segnale dell'incominciata virtù secretiva. Intanto giova ricordare, che siffatta materia colorante si forma in quelle cellule ghiandolari raccolte in gruppo, e che l'osservatore pratico può, mercè l'aiuto dei reattivi, riconoscerla anche prima che assuma la tinta rossa. Di fatti ho esaminato molti preparati eseguiti su glandole incipienti, nei quali non si scorgeva a prima giunta che succo cellulare amorfo ed incolore; ma questo succo all'arrivo della potassa si faceva azzurro, colore che si mutava in rosso-vivo alla sopravenienza d'un acido qualunque. Questi fatti mi autorizzano ad affermare che gli elementi chimici della materia colorante vengano direttamente dal plasma delle stesse cellule glandolari; e che la materia colorante rossa si formi là dove si trova, anzichè vi pervenga per trasfusione dalle parti circonvicine.

Per rispetto all'origine e struttura delle lenticelle, molte cose sono state dette e discusse fra i più eminenti osservatori. Nel 1872 il Trécul [1], in un suo particolare lavoro ne tracciò la storia, riportandone le definizioni formulate dai suoi predecessori. Quivi ha riferito che il De Candolle A. P. usò pel primo (1825) la parola *lenticelles*, per dinotare ciò che il Guettard, assai prima di lui (1745) aveva chiamato *glandes lenticulaires*; che il Mohl (1832) le credè formazioni parziali del sughero provenienti dal parenchima corticale, piuttosto che dal vero sughero; che i Signori Unger e Martius (1836) le hanno paragonato ai Soredii dei licheni, benchè il primo si fosse accorto della loro nascenza sotto il luogo occupato dagli stomi, e avesse concepito l'idea che potessero essere organi respirativi sotto forma di verruche prodotte dal periderma limitante. A quest'opinione aderirono il Vilckomme (1854) e lo Schacht (1855). Anche il Richard [2]) riconobbe l'origine delle lenticelle nei punti ove esisteva già uno stoma. Il Duchartre [3]) ed il Sachs si associano all'opinione del Mohl. Ma il Trécul, a sua volta, non trova esatta la espressione *escrescenza*, usata da questo illustre alemanno, e, nel suo citato lavoro, riporta i nomi di cinquanta specie, in cui ha veduto le lenticelle portare un solo stoma, tra le quali specie è il Fico, la Catalpa ed il noce da me pure esaminate per lo stesso scopo.

Il Trécul dimostra con varii esempii, che le lenticelle non in tutte le piante soggiacciono alle medesime fasi evolutive, e che però la loro struttura anatomica non è dappertutto la medesima; ed in quanto alla funzione dichiara che l'insieme di tutte le particolarità note, per le sue e per le altrui ricerche, lo farebbe propendere verso l'opinione dell'Unger, Meyen e Schleiden; cioè, ch'esse lenticelle siano destinate alla respirazione. Ma intanto stenta a credere, soggiunge egli medesimo, che le *lenticelles aient pour fonction speciale des phénomènes se rattachant à la réspiration;* e gli sembrerebbero piuttosto destinate a proteggere il tessuto della corteccia messa a nudo per la rottura dell'epidermide. Non accetta l'idea del Sig. Germain-de-Saint-Pierre, cioè [4]) : « *che une lénticelle est une hypértrophie locale du tissu céllulaire sous-épidermique, tant de la couche subereuse, que de la cuche herbacée, dont la naissance est déterminée par*

[1]) Trécul — *Rémarque sur l'origine des lénticelles.* — *Ann. des Sc. Nat.* 5e Série, T. XIV, pag. 233, 1872.
[2]) Richard — *Élements de Botanique.*
[3]) Duchartre — *Élements de Botanique etc.* Deuxième édition. Paris 1877, pag. 227.
[4]) V. *Dictionnaire de Botanique,* 1870, pag. 832.

la mise à jour du tissu céllulaire sous-épidermique dans le point où l'épidermique a subi une perte de substance par la destruction d'une partie soulevée en forme d'aiguillons ou de poils non glanduleux ou glanduleux. Malgrado ciò il Trécul tien fermo che le *lénticelles naissent au dessous des places qui étaient occupés par un ou plusieurs stomates* ».

In tanta discrepanza di opinioni io soggiungo, per ora, che le cose da me vedute, esaminando le glandole stomatifere dello *Xanthium Strumarium,* sono pressochè simili alle particolarità istologiche riconosciute nelle lenticelle in generale; che la presenza della materia colorante accenna a virtù fisiologica speciale, non punto a sostanziale differenza anatomica. Ond'è che io stimo dovere considerare queste glandole e queste lenticelle come organi della stessa natura, cioè come glandole stomatifere. Intanto, siano pure lenticelle anzichè glandole, io non posso accettare l'idea che siffatti organi si debbano tenere in conto di *escrescenze* o di *formazioni parziali del sughero o del periderma,* quando mi consta che esse glandole cominciano a formarsi prima che il sughero ed il periderma si fossero sviluppati. — E, quando anche fossero contemporanee a coteste formazioni, le cellule che costituiscono la massa ghiandolare o lenticellare, che si voglia dire, non sono mai da confondersi con gli elementi del sughero o del periderma, nè per la forma, nè per la natura del loro contenuto. Le lenticelle o le glandole stomatifere dello Xanthium sono organi particolari destinati ad una funzione temporanea, come temporanea è la loro esistenza, rispetto alla durata dell'intera pianta. — Esse vanno soggette a delle trasformazioni, per cui non sempre rivelano la loro primitiva natura organica e la lo ro finalità.

Su questo riguardo io mi riserbo di parlare in altro punto del presente lavoro, quando, cioè, avrò esposto altri fatti, i quali, insieme alle precedenti osservazioni, spero, potranno sorreggere la mia idea. — Intanto è fuor di dubbio che le glandole stomatifere dello *Xanthium Strumarium* e le lenticelle della *Catalpa,* del *Fico,* della *Carolinea* abbiano fra loro stretta rassomiglianza di forma, di struttura e di funzione. Sono organi frequentissimi su la corteccia e sui picciuoli delle piante di molte specie arboree, ma che pure si rinvengono sotto altre forme nelle foglie di parecchie altre piante erbacee. Di fatti è antica nozione che alla pagina inferiore delle foglie di alcune *Begonie* e di qualche *Saxifraga* si trovino stomi radunati in gruppi, e che questi gruppi dinotino nè più nè meno che un singolar modo di distribuzione degli stomi rispetto alla pianta in generale. Intanto io credo di non ingannarmi ravvisando in essi gruppi una parte di glandola stomatifera. Nella *Saxifraga sarmentosa,* siffatti gruppi corrispondono a delle prominenze di forma lenticolare colorate diversamente della superficie circostante. Quivi, tanto il derma che il parenchima sottoposto, sono sensibilmente modificati: il primo per avere le cellule più piccole e più depresse *(Tav. VI, fig. 5 r)*, il secondo per essere fatto di cellule ramose e conseguentemente lasco e lacunoso più che nelle parti circostanti. In alcune di coteste cellule ramose contiensi materia colorante rossa, come quella osservata nello *Xanthium.* Tutte queste particolarità istologiche, una ai loro rapporti immediati coll'epidermide e col parenchima sottoposto, ed il loro modo di generarsi, mi confermano nell'idea che anche nelle foglie di questa pianta trattasi di organi glandolari sotto forma di prominenze mammellonari, simili alle volute verruche dello *Xanthium Strumarium* ed alle lenticelle delle piante in generale.

Nella *Saxifraga rotundifolia,* L., oltre queste glandole della pagina inferiore della foglia, ne ho trovato altre ai margini; ove assumono forma e struttura che appresso descriverò.

§ 8.— *Glandole stomatifere secernenti umori particolari nei Dolichos ed in altre piante diverse.*

I rametti fioriferi nel *Dolichos unguiculatus*, L., e quelli di molte altre specie affini portano all'apice un leggiero ingrossamento sul quale sono inseriti i fiori. In esso abbonda il tessuto cellulare, tanto nella parte midollare che nella corticale; mentre alla superficie, tra un peduncolo fiorale e l'altro, sono alcune fossette larghe circa un millimetro ed altrettanto profonde. E queste fossette corrispondono ad altrettante glandole. Il loro margine è liscio e rivestito d'epidermide, il fondo n'è invece papilloso, senza epidermide ed umido. Nell'orifizio, e propriamente là dove termina l'epidermide, giacciono alquanti stomi disposti a corona. Da essi e dalle cellule papillari che sono al fondo geme umore zuccherino, che per avventura vi costituisce un dolce richiamo alle formiche.

In altre specie dello stesso genere, nel fondo di ciascuna fossetta, vedesi un forellino cinto d'un cercine alquanto rilevato. In tal caso l'umore zuccherino vien fuori solo da esso, mentre le parti adiacenti della fossetta si mostrano asciutte.

Nel *Phaseolus Caracalla*, L., coteste fossette sono in maggior numero e per giunta, allogate in certe prominenze che pajono le caruncole giacenti nell'ascella di alcune brattee rudimentali, e di peduncoli fiorali; quali prominenze, pel posto che occupano e per la loro disposizione alternante, come quella delle foglie propriamente dette, possono essere considerate quali abbozzi di altrettanti rami.

Esse prominenze portano alla superficie quattro fossette disposte in serie verticali *(Tav. V, fig. 19, m n)* cioè altrettante glandole, la cui struttura è analoga a quella osservata nei Dolichos. Il liquido che vien fuori è pure vischioso; ma in certe condizioni di vegetazione, assume forma polverosa e cristallina. In tal caso apparisce alla vista naturale sotto forma di piccole concrezioni, che ricolmano le rispettive fossette.—Queste glandole, a parer mio, son pure glandole stomatifere a struttura molto semplice, le quali fanno passaggio ad altre forme più complicate.

In qualche Cipresso ho veduto sul dorso delle piccole foglie squamiformi ed embriciate piccoli rigonfiamenti mammellonari, uno per ogni fogliolina, ancor essi vestiti da qualche squametta di materia bianca e resinosa; in alcuni di questi rigonfiamenti si scorge nel mezzo un infossamento ombelicato, dal cui centro sollevasi una piccola papilla di color verde. Questa papilla è la parte apicale d'una glandola immersa nel sottoposto tessuto ove tiene il luogo di una lacuna resinifera, come quella già riconosciuta dai Fitotomisti in molte Conifere cupressinee. Attorno a quella papilla giacciono alquanti stomi; mentre di tali organi non si vede neppure uno sul resto della foglia.

Per tanto io credo dover riconoscere in tali rigonfiamenti un'altra specie di glandola stomatifera, ma inversamente conformata rispetto a quelle vedute nei *Dolichos* e nei *Phaseolus*; perciocchè in quelle è infossamento con e senza foro, in queste, solo prominenza papillare messa allo scoverto. Ma sì nell'uno come nell'altro caso, il tessuto sottoposto alla fossetta od alla prominenza papillare è fatto di cellule ramose molto lascamente congiunte ed, in qualche punto, disposte in fili confervoidei od a rosario.

La mancanza di fossetta nelle glandule dei Cipressi è una circostanza che non conduce a diversità di tipo fondamentale, quando si consideri che nei Ginepri, e spe-

cialmente nel Ginepro Sabina, esiste pure una glandola al dorso di ciascuna foglia, che è ora prominente, ora infossata, secondo le condizioni di età e di vegetazione dell' organo a cui appartiene.

§ 9.— *Glandole linfatiche nell'Inula Helenium*, L.

Le foglie di questa specie, allorchè spuntano dei nuovi germogli, sono rivestite d'un folto e bianco tomento; e la loro prefoliazione conduplicativa fa sì che i suoi margini appena si scorgano alla vista immediata. Non pertanto questi offrono nella loro lunghezza tante papille di color rossigno quanti saranno i denti che vi si formeranno in progresso di sviluppo *(Tav. VI, fig. 1 m, m')*. In questo primo stato, la rachide della foglia sorpassa di qualche linea il vertice della lamina ed è glabra, come glabre sono del pari le papille dei margini. Queste sono fatte di tessuto cellulare, nel quale arriva, dalla rachide mediana, un tenue fascetto di vasi linfatici ed ivi si termina. Sopra ognuna di esse papille è un gruppo di stomi, che sembrano già adulti, quando sul resto della foglia altri sono ancora in via di formazione, e più grossi rimangono anche ad epoca di completo accrescimento.

Col crescere della foglia, il tessuto di cui sono fatte quelle papille marginali, si rassoda, ed i vasi, che sono all'interno, s'approssimano sempreppiù agli stomi soprapposti. Dopo alquanti giorni perdono la loro lucidezza e poi si essiccano completamente. In questo stato si presentano come punte appassite dei denti, non altrimenti di ciò che abitualmente osservasi nelle foglie dentate in generale.

Per verità io non ho ancora veduto uscir fuori da questi organi alcuna particolare sostanza; ma, in vista della loro struttura, analoga a quella di parecchie glandole secernenti, io le chiamerò pure *glandole*; e fra esse distinguerò *glandole marginali* e *glandole apicali*, secondo che si trovano ai margini, o solamente all'apice della foglia. — Nel *Leucanthemum latifolium*, D. C., le foglie sono dentato-serrate e portano all'apice di ciascun dente una piccola macchia bianca, anzichè rossa o bruna, la quale si mostra al microscopio come una superficie papillosa e ghiandolare. A prima giunta si crederebbe che il suo colore bianco accennasse a parziale essiccazione, come abitualmente accade osservare in altre piante; invece è dovuto ad una particolare conformazione del tessuto sottoposto, all' essere questo privo di clorofilla ed alla protuberanza di sei ad otto stomi. Questi stomi vi si trovano raccolti a rosetta in uno spazio che misura un mezzo millimetro quadrato. Un taglio trasversale, che sollevi la parte apicale di ciascun dente ed i rispettivi stomi, mette in evidenza questa condizione di cose, e fa notare inoltre come il derma sia, nella parte che riveste la superficie glandolare, di molto assottigliato. Nel taglio verticale poi si osserva, meglio che nell' *Inula Helenium*, come nel tessuto sottoposto agli stomi, vadano a terminare le ultime ramificazioni dei nervi, e come da essi esca fuori una materia finamente granellosa e di colore giallognolo. — Questa sostanza, trattata coll' alcool nel campo del microscopio, dopo qualche tempo si ravviva, ed indi si discioglie completamente. Essa però non m' è sembrata di natura diversa dell' abituale polvere glauca.

Queste glandole marginali del *Leucanthemum*, messe a confronto con quelle dell'*Inula Helenium*, differiscono pel colore e per la virtù secretiva, ma non per altra ragione anatomica.

Glandole cosiffatte ho trovato sui denti dell'*Hydrangea arborescens*, L., ed altre specie affini; nel *Conoclinium Ianthinum*, Morr.; nel *Senecio Kaempferi*, DC.; *S. coriaceus*, Ait.; *Aralia Papyrifera*, Hook.; *Hypericum hircinum*, L.; *Tussilago racemosa*, Tausch. *(Tav. VI, fig. 15)* ed altre ancora; *Nasturtium officinale*, R. Br. *(Tav. VI, fig. 3)*; *Iberis semperflorens*, L.; *Ranunculus repens*. L. *(fig. 2)*; *Bocconia frutescens*, L.; *Brassica oleracea*, L.

Nell'*Hypericum hircinum* coteste glandole sono solamente apicali, anzichè marginali, e non ve n'è che una sola per ciascuna foglia. Vi si presenta come piccola macchia bianca e come *glandola vescicolare*. Fino a che la foglia è tenera, detta glandola è rivolta alla faccia inferiore della foglia stessa; in progresso di crescenza si ripiega verso la faccia opposta e discende dal vertice, ove prima stava, per uno o due millimetri. In questo stato essa non ha più l'aspetto di papilla stomatifera, ma d'una sorta di callosità, alla quale termina il nervo mediano ed a cui convergono due altre nervature marginali. La persistenza degli stomi e la secrezione d'un certo umore linfatico, me la caratterizzano per glandola stomatifera linfatica. In quanto poi alla durata della sua funzione, posso dire che non va più oltre del periodo accrescitivo dell'intiero organo. Intanto giova osservare che gli stomi annessi sono di origine posteriore a quelli che si rinvengono sul resto dell'intiera foglia. — Nella *Tussilago racemosa*, gli stomi nati in corrispondenza di glandole somiglianti, sono per lo più appajati e contrafatti *(Tav. IV, fig. 1)*, come quelli che ho veduto sugli ovicini dell'*Iris tuberosa* (vedi *Tav. V*, *fig. 13*). — Quest'ultima circostanza mi sembra di qualche valore per quel che riguarda l'origine delle cellule stomatiche in generale. Nel *Senecio Kaempferie, S. Coriaceus*, le glandole marginali ed apicali sono circondate da grosse cellule piene di materia colorante rossa, mentre il loro tessuto proprio consta di cellule piccolissime e debolmente colorate in verde.

Gli stomi che vi corrispondono sono relativamente piccoli e con ostiolo circolare anzichè ellittico. Nelle stesse condizioni si trovano le glandole apicali ed i rispettivi stomi nell'*Iberis sempervivens*, L.

Nell'*Hydrangea Hortensia*, DC., ed *H. quercifplia*, Bartram., i denti delle foglie sembrano acuti alla vista naturale, ma la lente d'ingrandimento discuopre all'apice una troncatura orizzontale che misura in superficie circa $0^{mm},91$. Essa è rivestita d'epidermide molto sottile e di colore argentino, mentre il tessuto sottoposto contiene materia colorante rossa. Evidentemente trattasi pure di glandole apicali, giacchè in quelle troncature, vi è un infossamento nel quale giacciono da tre a cinque stomi, nè più piccoli nè più grandi di quelli esistenti sul resto della foglia; dai quali però differiscono pei loro rapporti col sottoposto tessuto ghiandolare, nonchè pel posto che occupano.

Nella *Grewia nitida*, Juss., le foglie han pure glandole marginali ed al vertice di ciascun dente. Gli stomi vi sono raccolti in gruppi contornati da cellule dermatiche, le quali offrono la particolarità che, nella foglia adulta, si colorano in bruno e non appassiscono, come accade osservare in altre piante, anzi vi rimangono a guisa piccole callosità.

Nella foglia del *Cyclamen neapolitanum*, Ten.; *C. persicum*, Mill.; *C. hederaefolium*, Ait., non ci sono denti; ma di glandole stomatifere ce n'è un gran numero, tutte disposte lungo il margine delle foglie stesse là dove vanno a terminare le estreme ramificazioni delle nervature. Il posto che occupano è additato da alcune vene bianche ed

alquanto rilevate sulla pagina superiore della foglia, le quali fanno bel contrasto col verde-cupo della stessa. Per contrario nella pagina inferiore, in corrispondenza di ciascuna venatura bianca, è una fossetta, ch'è appunto la faccia stomatifera della glandola che vi sta dentro. Il numero degli stomi per ciascuna glandola varia da cinque a dieci, e sono sempre più piccoli e più sporgenti dalla superficie epidermica di quello che sono gli altri sul resto della foglia. Il piano che divide la glandola per lo lungo, mentre taglia la foglia trasversalmente *(Tav. IV, fig. 16)*, mette in chiaro queste particolarità, e fa notare ancora come l'epidermide, che in ambo le pagine è piuttosto spessa, sia fatta sottile in quel che riveste la faccia esterna della glandola; e fa vedere inoltre che dal grosso al sottile dell'epidermide è un graduato passaggio; e che il tessuto sottoposto agli stomi è fatto di cellule piccolissime, di forma rotonda, a pareti spesse, e distribuite in tanti gruppi, per quanti sono gli stomi alla superficie. Tra questi gruppi termina e si sfiocca un fascetto vascolare appartenente al sistema scheletrico della foglia *(Tav. IV, fig. 16, v s)*.

§ 10. — *Altra glandola linfatica apicale.*

Una forma di glandola apicale, che raccoglie in sè tutte le particolarità istologiche scoverte nelle forme innanzi descritte, ho rinvenuto nella *Limnocharis Humboldtii*, Rich. *(Tav. VI, fig. 4, m)*, ed è all'apice di ciascuna foglia, ove si scorge, anche alla vista naturale, come una fossetta circolare cinta d'un margine calloso. Nei primordî della sua formazione è rivolta verso la pagina inferiore della foglia; mentre, durante il progressivo sviluppo, si ripiega verso la superiore, e quivi si ferma e mostra di godere una sensibile attività secretiva, onde si vede, massime nelle ore mattutine, ricoverta di brillante gocciolina linfatica. E questa sua attività si riconosce talvolta nelle ore canicolari, purchè cause naturali od artificiali sospendano o rendano più debole la traspirazione dell'intiera pianta.

In questa pianta lo scheletro della foglia offre due sistemi di nervature: uno principale, fatto dalla rachide e sue divisioni primarie; l'altro secondario, costituito da più sottili rametti fibro-vascolari. — Gli elementi del primo convergono direttamente alla glandola, quelli del secondo vi arrivano per mezzo di anastomosi; all'uno e all'altro sistema si associano vasi laticiferi e ne seguono l'andamento.

Il fondo di quella fossetta è tappezzato da sottile cuticola senza stomi, essendo questi raccolti sul margine calloso. Al di sotto della cuticola è un tenue strato di cellule, le quali, oltre l'estrema piccolezza, non offrono altre particolarità. I vasi linfatici arrivano al cercine, e vi si fermano; i laticiferi lo rasentano e passano oltre anastomizzandosi fra di loro. Queste glandole rispetto a quelle nell'*Hypericum hircinum* offrono struttura e relazioni anatomiche più notevoli. Frattanto giova ricordare, che le condizioni generali di questa pianta palustre rendono più facile l'osservazione del fenomeno escretivo per la via degli stomi, voglio dire più sensibile l'emissione dell'umore linfatico.

Atteso la vicinanza dei vasi laticiferi col margine della glandola, ho supposto che in quelle goccioline si potesse contenere del latte od altra sostanza particolare; ma le indagini microscopiche, rivolte a questo fine, non hanno confermato la mia supposizione. — Ho voluto segnalare questo fatto, il quale, quantunque negativo, costituisce un valido argomento per dimostrare che, le sostanze prodotte da particolari attitudini degli

organi, e tra queste il latte, non si trasfondono dall' uno all' altro tessuto, dall' uno all'altro elemento istologico, anche quando la giacitura e le condizioni fisiche di questi ce lo farebbero credere possibile: onde resterebbe ancor fermo il principio che le sostanze peculiari *si trovano là dove si formano.*

Glandole destinate ad espellere umore linfatico ho trovato ancora nella *Saxifraga rotundifolia,* L., e sono glandole marginali in rapporto immediato col sistema fibro-vascolare. La loro attività funzionale si conserva per tutta la durata della foglia cui appartengono.

Nel *Siphocampylus lanceolatus*, Hort., ho scoverto altre glandole, le quali hanno stretta analogia con quelle della *Limnocharis Humboldtii* e dell' *Hypericum hircinum.* Non sono nè al margine, nè all' apice della foglia normale, ma al lembo del calice, e propriamente ne' seni interposti tra un dente e l' altro. Quivi sono cinque, ed hanno forma semilunare ed aspetto di callosità *(Tav. V, fig. 4, mm).* Il loro contorno è rilevato e netto, mentre la superficie è alquanto depressa ed infossata nel mezzo, dove si scorgono alquanti punti diversamente colorati, cioè alquanti stomi. Questi sono più grossi dell' ordinario, mentre giacciono fra cellule dermatiche molto piccole e si legano pei rispettivi cistomi a lasco tessuto parenchimale. In questo mettono capo alquanti fascetti vascolari, appartenenti non a nervature primarie, come nella *Lymnocharis*, ma a rametti secondarî. E poichè anche qui trattasi di pianta lattiginosa, è facile intendere come a quei rametti fibro-vascolari si associino i vasi laticiferi, i quali, a dir vero, arrivano alle glandole, ne rasentano i margini e le oltrepassano, come nell'anzidetta *Limnocharis.* Consegue da ciò che l' umore emesso dalle glandole non contiene latte.

Il calice del *Syphocampylus lanceolatus* è tomentoso; e però queste sue glandole, essendo glabre, spiccano assai bene dalla superficie circostante. Spiccano ancor di più nel tempo della funzione, quando, cioè, si ricoprono di brillantissime goccioline.

Queste goccioline non sono di acqua pura, bensì di umore verdognolo e vischiosetto che bisogna ancora analizzare. Nella pianta che vive in tepidario, esse si conservano lungo tempo, e qualche volta sgocciolano dalla superficie glandolare; non se ne formano punto nella pianta coltivata in piena aria. Nel *Siphocampylus bicolor* non mancano siffatte glandole; ma da esse non vidi mai venir fuori alcuna gocciolina di liquido, così nelle piante viventi in condizioni simili a quelle della specie precedente, come in circostanze diverse. Per la qual cosa io son d' avviso che, il fenomeno della secrezione dev' essere favorito da condizioni intrinseche che bisogna ancora riconoscere ed apprezzare per mezzo di particolari esperimenti.

Glandole come queste nei *Siphocampylus* ho trovato ancora nell'*Hydrocotyle bonariensis*, Lam. però ai margini delle foglie ed in corrispondenza delle estreme nervature *(Tav. IV, fig. 12, mm).* La loro figura è semilunare, e la superficie è quando più quando meno infossata, secondo l' età dell' intiera foglia. Il sistema vascolare porta vasi propri, dei quali solo alcuni rasentano le glandule, ma non vi sboccano; sicchè il liquido segregato è pure umore linfatico.

Sopra alcune specie di glandole particolari.

§ 11.— *Glandole epidermiche e marginali nell'Escallonia rubra*, Pers.

Le foglie di questa specie mi hanno presentato due forme di glandole, una in ambe le due pagine, l'altra al contorno. La prima forma è rivelata dalla comparsa di piccole squame bianche, la seconda da mucchietti di sostanza pure bianca raddensata negli angoli rientranti alla base dei singoli denti *(Tav.VI, fig. 6 e 7)*. Quelle della prima forma sono più appariscenti durante i mesi d'aprile e maggio, quando cioè tutta la pianta gode del maggiore rigoglio: le altre (*fig.6, g*) si scorgono in ogni tempo. Ognuna di quelle squame nasconde una glandola, la quale misura nel senso del maggiore diametro circa un millimetro: ma ove non fossero ricoverte delle squame suddette, con la vista naturale si potrebbero scorgere appena. In ogni caso, il microscopio fa vedere al loro posto una sostanza glutinosa, che, raddensandosi, conformasi a squama, ed è propriamente sostanza cerosa, solubile nell'alcool e nell' etere. La glandola ch'è al di sotto di cosiffatta squama è fatta da sei o da otto cellule speciali, conformate e disposte come gli spicchi di una melarancia, le quali cellule tutte traggono origine da una sola cellula madre, compresa nello spessore del derma, al quale rimane attaccata per tutta la vegetazione. Il loro contenuto protoplasmatico è sempre finamente granelloso ed opaco. Al tempo del completo sviluppo, tutta la glandola *(Tav. VI, fig. 7)* così organizzata giace nel fondo di speciale infossamento del derma, dove la materia segregata, diffondendosi intorno intorno, piglia la forma di squama circolare. Le glandole marginali sono organizzate sul medesimo tipo *(fig. 6, g)*, ma se ne distinguono pel posto che occupano al vertice di ciascun dente, e per essere munite da breve peduncolo. In questo peduncolo arriva sempre un fascetto vascolare, che è un termine del sistema fibro-vascolare — Da queste glandole ho veduto venir fuori limpidissimo umore, il quale raccoglievasi intorno intorno come gocciola sferica. Ciò mi accadde di osservare su di una stessa pianta, in diversi tempi dell'anno, e in diverse condizioni dell'ambiente, e anche sotto la sferza di cocenti raggi solari; mentre la funzione secretiva delle altre glandole nelle foglie della medesima pianta dà un prodotto sensibile alla vista immediata, solamente nella primavera.—In ogni caso quelle goccioline emesse dalle glandole marginali, crescendo, s'abbassano nell'angolo che fa il peduncolo della glandola col margine della foglia, ed ivi, evaporandosi, lasciano un residuo bianco, e di natura ceroso, come è quello delle squamette.

I peli del *Croton penicillatum*, Ven., tanto noti per la loro forma e disposizione, sono glandole pedicellate *(Tav. VII, fig. 8)*. Hanno un piede ed una testa, e sono, quali più e quali meno grossi, secondo l'età ed il posto che occupano lungo i teneri rametti e sulle foglie. Nel piede io ravviso un organo, che dà umore grezzo e linfatico; e nella testa il corpo di una glandola destinata a secernere umore resinoso e balsamico. Sì nell'una, sì nell'altra parte, concorrono tre tessuti diversi: uno periferico, l'altro midollare, ed il terzo centrale. Il centrale consiste in un tenue fascetto di vasi a trachea, il quale s'ingrossa e sfiocca nella testa, dove termina; il midollare è un tenue parenchima verde; ed il periferico costituisce nella testa il corpo della glandola; nel piede un semplice tessuto corticale di piccol momento. Nel corpo della glandola le cellule

hanno forma regolare (*n*) e sono vestite esternamente di cuticola, come se fossero cellùle epidermiche, attraverso della quale cuticula geme l' umore elaborato. Queste glandole ricordano per la loro forma e struttura i peli della *Drosera rotundifolia*, L., da cui se ne distinguono per l' incapacità di movimento e per la forma globosa della loro testa. Essi rassomigliano altresì alle glandole marginali dell' Escallonia rubra; in quanto che constano di elementi istologici della stessa natura.

Glandole simili a queste ho trovato ancora in molte altre piante; e sentirei il dovere di descriverne le modalità, se per alcune non mi avesse preceduto il signor Martinet. Quest' illustre osservatore ha di fresco descritto molte forme tutte in rapporto con la sola epidermide, la cui maggior parte sono a mio credere *peli glandolosi all' apice* [1]). Quelle, onde ora mi limito a parlare, non appartengono nè alle specie, nè agli organi citati da lui: sono del *Nelumbium speciosum*, W.; della *Nymphaea alba*, L.; *Globularia salicina*, Lam.; *Saxifraga crassifolia*, L.; e del *Clorodendrum fragrans*, W., ed hanno forme diverse e assai degne di nota. Descrivendole nel presente lavoro, spero che varranno a stabilire dei punti di passaggio a forme più complicate.

Frattanto, dalle mie osservazioni risulta che la forma più semplice è ridotta ad una semplice cellula. Io l' ho trovata nel *Nelumbium speciosum*.

I fiori di questa pianta hanno petali rivestiti di sottilissima epidermide, le cui cellule dermatiche per la faccia esteriore si elevano a guisa di papille *(Tav. I, fig. 8)*. Tra esse rinvengonsi rari stomi, relativamente piccoli e contrafatti *(fig. 9, s)*. Vi sono pure, qua e là, alcune cellule cubiche *(fig. 8-9, r)*, le quali contengono sostanza finamente granellosa e di colore giallognolo, come quella veduta in altri organi ghiandolosi. Queste cellule cubiche sono appunto le glandole, le quali, durante la fioritura, elaborano e segregano umore particolare sul tipo delle sostanze resinose aromatiche.

Nei petali della *Nymphaea alba*, la natura fa un passo innanzi nella formazione delle glandole; giacchè, come si vede nel taglio trasversale dei petali, *(Tav. I, fig. 12, r)* esse glandole constano di due cellule simili, una superiore, l'altra inferiore, tutte e due comprese nello spessore del derma. Il loro protoplosma è pure finamente granelloso, ma di color verde giallognolo. Nella preparazione fatta secondo un taglio orizzontale, di queste due cellule se ne vede una sola, sicchè ti parrebbe di ravvisare glandole affatto simili a quelle nel *Nelumbium*. Intanto importa quì soggiungere che gli acidi spiegano sull' una e sull' altra forma un' azione speciale, ma analoga.

L'acido azotico rassoda il loro contenuto plasmico, e lo concentra in nucleo *(Tav. I, fig. 14)*; stacca la membrana interna dall' esterna e amplifica quest' ultima, facendola più trasparente di prima. L' acido solforico con la sua azione distruttiva dissolve le cellule adiacenti; fluidifica altresì la membrana interna ed il plasma delle cellule glandolari, ma ne lascia l' esterna; la quale assume forma di sacchetto vuoto e pendente dalla cuticola *(Tav. I, fig. 13, 17, 18 e 19)*. Questa sua resistenza all' azione d' un acido così energico, qual' è l'acido solforico del commercio, è l' effetto d' un processo di cuticulizzazione limitato e speciale. Ho detto *limitato*, in quanto ha luogo nella sola membrana interna d' una sola cellula glandolare e non nelle altre attigue; *speciale*, perchè destinato ad un fine speciale, così nel *Nelumbium*, come nella *Nymphaea* — Questo fatto ha riscontro in glandole di forma e struttura più complicata, e però ho creduto fin da ora fermare l'attenzione. Durante queste indagini microchimiche, osservai, specialmente

[1]) Martinet — *Organes de sécretion des végéteaux. — Ann. Sc. Nat.*, 5° Série, T. XIV.

nella *Nymphaea*, che la faccia superficiale di codeste glandole, al tempo del completo sviluppo è naturalmente interrotta; nel quale caso l'azione dei citati reattivi dilarga il forame, che ne risulta, e vi si mostra contornato da un cercine di sostanza cuticolare. Laonde giova soggiungere che nello stesso organo, anzi nello stesso preparato, accade incontrare glandole chiuse e glandole aperte, entrambe della stessa forma, ed ugualmente destinate ad espellere sostanza ceroso-resinosa.

Globularia salicina, Lam. — Anche le foglie di questa specie sono cosparse di piccoli punti bianchi, ai quali corrispondono altrettante glandolette. Queste in verità giacciono ad una ad una nel fondo di particolari infossamenti dell'epidermide, e sono costituite di tre cellule: una compresa nel derma, e due sporgenti al di sopra; queste traggono origine da quella. Le loro pareti sono alquanto dure, e contengono plasma granelloso. Guardando l'epidermide di prospetto e da su in giù, queste glandole sembrano cellule speciali appajate sì, da mentire l'aspetto di stomi *(Tav. I, fig. 10, t,* e *fig. 11, r)*. Ciò dipende da che le due cellule glandolari nascono gemelle da una cellula sottostante, e vi rimangono aderenti fra loro.

In quanto alla funzione, ancora non posso dire d'aver conosciuto alcun trasudamento particolare; giacchè i *punti bianchi*, che additano la loro presenza, non sono nè cumuli nè pellicole di materiale essudato, come nell'Escallonia rubra; bensì le stesse cellule glandolari, sfornite affatto di clorofilla. Ma, per rispetto alla struttura, riconosco in esse un terzo tipo di glandole epidermiche.

Nell'*Aeollanthus suavis*, Mart. Ho trovato sulle foglie due altre specie di glandole epidermiche, ch'io contradistinguo, dicendole *pedicellari* e *vescicolari*.

Le glandole vescicolari *(Tav. III, fig. 15, 16, 17* e *18)*, sono costituite d'alquante cellule, ordinariamente sono otto, disposte intorno ad un centro come gli spicchi d'una melarancia e tutte rivestite da una comune membrana; la quale si eleva naturalmente dalla faccia superiore delle medesime, assumendo sembianze di piccola ampolla. Essa è in origine la parete d'una cellula dermatica speciale; di quella stessa che ha generato le cellule in sè comprese. Esaminando l'origine e lo sviluppo di siffatte glandole, ho notato che fino ad un dato periodo di sviluppo la parete di questa cellula madre risponde ai reattivi chimici come la cellulosa in generale; che da indi innanzi comportasi come membrana cuticolare. La ragione di ciò è appunto un fenomeno di cuticolizzazione, ond'essa parete diviene silicica. Le cellule interne, giunte ad epoca di completo sviluppo, non conservano la forma di spicchi, in vece si fanno incurve e lasciano nel centro una cavità *(fig. 16* e *18, a)*, in cui pur si versa del liquido da esse segregato; il quale nei momenti di esuberanza passa nello spazio interposto tra la loro faccia esterna e la membrana cuticolare che le involge. È umore linfatico amorfo codesto; mentre l'altro che rimane nelle cellule, è finamente granelloso ed aromatico, come quello che rende olezzante tutta la pianta.

Le glandole pedicellari *(fig. 14)* sono sempre più piccole e constano di due, di tre, tutt'al più di quattro cellule. Una di esse, la prima a formarsi, rimane in tutto od in parte compresa fra le cellule dermatiche e ne costituisce il pedicello, le altre si elevano al di sopra e formano la glandola propriamente detta. Esse elaborano olio essenziale aromatico. Malgrado la loro piccolezza e semplicità di struttura sono però molto variate nella forma. Alcune son fatte come peli semplici unicellulari *(Tav. III, fig. 14, g)*, altre come piccolissime sferelline pedicellate *(fig. 14, rr)*.

Glandole foggiate su questi due tipi ebbi a scovrire ancora in molte altre labiate, sebbene con piccole varianti nella forma e nel grado di sviluppo. Intanto, considerando le glandole dell'*Aeollanthus suavis*, forma vescicolare, in raffronto alle due forme rinvenute nell'*Escallonia rubra*, non posso fare a meno di riconoscere una grande analogia sì per l'origine che per la struttura; quantunque queste dell'*Aeollanthus* avessero all'interno una cavità ed all'esterno una membrana cuticolare, cose che mancano in quelle dell'*Escallonia*, e la qualità dell'umore segregato fosse anche diversa.

Saxifraga crassifolia — Un'altra forma di glandola, che poco si discosta dalle due precedenti, si rinviene sulle foglie di questa pianta ed in gran numero *(Tav. III, fig. 19, 20* e *21)*. Sono glandole epidermiche a forma tondeggiante allogate ad una ad una dentro speciale avvallamento dell'epidermide. Le cellule, di che sono costituite, si distribuiscono in due piani orizzontali; e per ciò non circoscrivono una cavità centrale, come quelle dell'*Aeollanthus suavis*. Traggono origine non da una, ma da quattro cellule epidermiche a parete spessa e callosa. Al tempo del completo sviluppo, sono involte da una membrana cuticolare, che pare prodotta da un sollevamento della cuticola, ma ch'è pur essa la parete d'una cellula madre. E questa membrana, amplificandosi come nelle glandole dell'*Aeollanthus*, circoscrive al di sopra delle cellule glandolari un largo spazio destinato a contenere un liquido di natura gommosa, punto aromatico. Vi è dunque tra le due forme qui sopra descritte (quelle cioè della *Saxifraga crassifolia* e dell'*Aeollanthus suavis)* analogia nell'origine, nella forma e nella struttura, ma non nel prodotto secretivo! Intanto, ritornando sul fatto della membrana cuticolare, torna bene di aggiungere che tanto nelle glandole dell'*Aeollanthus*, quanto in quelle della *Saxifraga,* esso ha luogo evidentemente in organi superficiali in contatto originario colla cuticola propriamente detta. Laonde, quelli i quali dubitassero di cotesto fenomeno, perchè non hanno acquistato l'abito a tal genere di studi, potrebbero ammetterlo pure razionalmente, a vista del detto contatto. Un esempio di cuticolizzazione, noto alla più parte degli Osservatori naturalisti, si ha nei peli delle Ortiche, i quali sono anche glandolosi. Ma la cuticolizzazione delle membrane è ancora possibile nelle parti centralizzate che non hanno dipendenza immediata colla cuticola. Una pruova di ciò credo d'averla trovata nella *Brexia heterophylla*, Pasq. — In questa pianta nascono tra le foglie in via di formazione alcuni organi, che pajono peli composti, *(Tav. VI, fig. 16)* crescenti, ma in realtà sono glandole papillari epidermiche, quali più quali meno curve e claviformi. Constano di cellule speciali, disposte in un solo ordine periferico; vale a dire intorno ad una cavità, la cui parete è immediatamente rivestita di membrana anista. In questa cavità si raccoglie umore mucillaginoso, come quello che trasuda alla superficie dell'intiera glandola, e da cui si diffonde per tutte le foglie che crescono in vicinanza. La durata di queste glandole è piuttosto breve, perchè cadono non appena giunte a perfezione. Se in questo stato vengono immerse nell'acqua per qualche ora, e poi sottoposte alla pressione del copri-oggetti, lasciano scappar fuori per la via della base l'interna membrana cuticolare, la quale si presenta nel campo del microscopio come un sacchetto ancora pieno del suo contenuto mucillaginoso. Questo sacchetto, chiuso com'è da ogni lato, porta alla base un peduncolo filiforme *(fig. 16, r)*, del quale, fino a questo momento, non so dire l'origine e lo scopo della funzione. La natura cuticolare di tale sacchetto è manifestata dalla sua resistenza alla macerazione ed agli acidi ordinarî. Esso è però analogo alla vescica anista, che riveste le glandole dell'*Aeollanthus suavis*

(Tav. III, fig. 16, 17 e *18, v)* e della *Saxifraga crassifolia (fig. 20* e *21, c, idem)*. La differenza sta nel posto che occupa e nelle condizioni di sviluppo.

§ 12.— *Glandole dermatiche propriamente dette.*

Un' altra specie di glandola, non meno importante della precedente, ho rinvenuto nel *Clorodendrum fragrans,* W. Come è noto i fiori di questa verbenacea, raccolti in pannocchie compatte, sono un richiamo alle formiche. Ciò per l' umore zuccherino emesso dalle glandole esistenti sul loro calice, le quali si manifestano alla vista naturale come piccole macchie di color giallastro su di un fondo porporino, qual' è il colore del calice. Ve ne sono in numero variabile, circa sei per ogni calice, e se ne trovano pure sulle vicine brattee. All' aspetto esterno somigliano a quelle sul calice del *Syphocampylos bicolor* e *S. lanceolatus* perchè come quelle si ricoprono di goccioline brillanti; ma se ne distinguono per la figura circolare, nonchè pel numero e pel posto indeterminato. Hanno superficie convessa e alquanto rilevata, in cui non ho mai veduto alcuno stoma; e la loro struttura è molto semplice *(Tav. VI, fig. 11)*. La sezione trasversale le fa vedere costituite di cellule dermatiche, *(m)* modificate in un modo particolare; giacchè l' epidermide, *(e, fig. sud.)* in quel che cinge ciascuna glandola par che si sdoppii nella sua cuticola e nel suo derma: quella, per rivestire la faccia esterna, questa, per formare il corpo della glandola stessa. In questo corpo le cellule dermatiche si fan grandi più che le altre vicine, assumono forma prismatica *(fig. 11 m* e *fig. 12)*, e si collegano insieme senza lasciare spazî o meati tracellulari. Il loro contenuto è di sostanza finamente granellosa e di natura azotata.

Le ricerche organo-genetiche mi hanno riconfermato nell'avviso, che siffatte glandole sono di natura dermatica e però riferibili al tipo di quelle nella *Saxifraga crassifolia* e nell'*Aeollanthus suavis,* dalle quali differiscono per avere la cuticola aderente alle cellule glandolari, anzichè sollevata ad ampolla. Per questa circostanza e per essere fatte di cellule dermatiche, ho creduto controdistinguerle, chiamandole *glandole dermatiche.*

PARTE TERZA

GLANDOLE CALCIFERE

Le glandole stomatifere, che ho trovato sul disco o nettario delle piante, già rammentate, nonchè quelle esistenti ai margini delle foglie di parecchie altre specie, malgrado la varietà delle forme e delle condizioni topografiche, nelle quali si mostrano, concordano fra loro nell' essere destinate alla secrezione ed espulsione di sostanze organiche e liquide, cioè: *linfa, nettare, umore neutro zuccherino* e *sostanze cerose* e *resinose.* Ne ho trovato ancora ben altre, nel cui prodotto si contiene della materia minerale, voglio dire calce allo stato di carbonato calcare; ond' io vo' chiamarle *glandole calcifere.* Il piano fondamentale d' organizzazione non è sempre lo stesso, e variano pure i loro rapporti anatomici ed organografici. Alcune sono in perfetta continuità del sistema fibro-vascolare, e spesso occupano il vertice dell' estreme nervature; altre hanno rapporto col solo parenchima, e ve ne ha munite di stomi, e senza. Intanto, riguardo

alla natura del loro prodotto, più che per altra circostanza, mi sono avvisato di chiamarle complessivamente glandole calcifere, distinguendole però in due sotto tipi: *calcifere stomatifere* e *calcifere astomatifere*, secondo che sono, o no munite di stomi.

§ 1. — *Glandole calcifere astomatifere.*

Nel *Polypodium crassifolium* ne ho trovato una forma assai diffusa per la pagina superiore delle foglie, dove giacciono negli intervalli delle nervature secondarie. Quivi si mostrano alla vista immediata come punti bianchi disposti in serie, dove più e dove meno brevi e disordinate *(Tav. VI, fig. 10, p)*. Nella pagina inferiore non se ne trovano punto, ma invece vi abbondano gli stomi muniti di grossi cistomi vescicolosi.

Ciascuna glandola corrisponde ad un leggiero infossamento dell'epidermide *(Tav. VI, fig. 8, c)*, nel quale sta abitualmente un mucchietto di materia calcare, quella stessa che pare alla vista naturale un punto bianco — Nei tagli trasversali della foglia si vede chiaro, mercè sufficiente ingrandimento, che tutta la glandola ha forma di pera, la cui parte apicale è in contatto col derma, mentre il corpo *(m)* ed il pedicello *(p)* sono compresi nel mesofillo. E si vede ancora che il pedicello è in perfetta continuità del sistema scheletrico della foglia *(fig. 10, pp)*.

Nel corpo della glandola si distinguono due tessuti diversi: uno periferico *(fig. 8, t)*, l'altro centrale *(fig. 8, m)*. Il primo costituisce una sorta di tunica, fatta di un sol'ordine di cellule allungate fibriformi, che chiamerò *parte corticale* della glandola; dirò *mucleo* il secondo o centrale. Questo risulta da un insieme di cellule spirali quali più, quali meno corte e bozzolute *(fig. 8, m)*, cellule che fan passaggio alla forma vascolare, cioè alle trachee propriamente dette. Queste due specie di cellule si rinvengono pure nel pedicello *(fig. 8, p)*; e ciò risponde mirabilmente alla natura istologica di tutto il sistema fibro-vascolare della foglia.

Mi pare ancor degna di nota la parte che corrisponde alla faccia esterna della glandola, che è quella su cui raccogliesi la materia calcare. Essa è un dischetto di figura circolare, fatto di cellule prismatiche *(fig. 8, c* e *fig. 9)*, le quali, sì per l'origine, che per le relazioni istologiche, sono da considerarsi come una modalità delle cellule dermatiche. In fatti somigliano molto a quelle, e tutto il disco somiglia altresì alle glandule del *Chlerodendrum fragrans (fig. 11* e *12)*. Questo dischetto misura in superficie circa un millimetro quadrato, ed ha forma piano-convessa, tal quale si vede nella sezione trasversale *(fig. 8, c)*. Esso, da sè solo, costituisce nel *Chlerodendrum* una forma di glandola; mentre in queste del *Polypodium* ne rappresenta una parte, quella stessa cui è collegato il corpo della glandola. Di queste due parti la prima (il disco) è la più efficace nel lavorìo secretivo; mentre l'altra (il corpo) mi sembra destinata ad apprestare il grezzo materiale.

E qui, nell'interesse dell'anatomia elementare delle piante, non posso fare a meno d'osservare che la presenza di cellule o di vasi spirali, come queste che ho trovato nelle glandole del *Polypodium crassifolium*, sia un fatto tanto importante, quanto raro nella famiglia delle felci. Esso trova appoggio e spiegazione nei fatti da me riferiti in un precedente lavoro « *sulla presenza dei vasi a trachea nelle felci* [1]) ». In quello è dimostrato che i vasi scalariformi, in origine, sono veri vasi spirali o trachee, le quali in pro-

[1]) Vedi *Bullettino dell'Associazione dei Naturalisti e Medici di Napoli.* Febbraio 1871.

gresso di crescenza assumono forme prismatiche con righe equidistanti e parallele. Dal che fu dedotta l'esistenza dei vasi a trachea in tutta quanta la famiglia delle felci. Il *Polypopium crassifolium* ha vasi scalariformi nelle grosse nervature, ed ha veri vasi spirali nelle estreme loro diramazioni; cellule vasali o vasi molto brevi nel corpo delle glandole. Vuol dire che, nella formazione delle glandole calcifere del *Polypodium crassifolium,* le cellule ed i vasi spirali si conservano tali quali si formano in principio. Nel *Phlebodium areolatum,* H. B. K., altra felce polipodiacea, ho veduto ancora glandole calcifere come queste del *Polypodium*, ma disposte in una sola serie marginale.

In quanto al materiale espulso da siffatte glandole, debbo soggiungere solamente che esso viene essudato alla superficie allo stato di bicarbonato solubile, e può rimanervi per qualche tempo sotto forma di goccioline brillanti, se le condizioni dello ambiente non ne impediscono il condensamento; ma che, presto o tardi, queste goccioline lasciano un residuo bianco, una sorte di concrezione, la quale non è altro che carbonato calcare.

§ 2. — *Glandole calcifere stomatifere.*

Nel 1870 annunziai l'esistenza di alcune glandole calcifere nella *Crassula lactea,* Ait., ed in altre piante affini. La nota scritta a proposito [3]) rannodavasi con altra mia scrittura precedemente pubblicata [2]); ora stimo opportuno, nella presente memoria, aggiungere alcune cose che allora non potetti riferire, le quali sono frutto di novelle osservazioni.

Le glandole calcifere nella *Crassula lactea* sono distribuite in due serie marginali; una nella pagina superiore, l'altra sulla inferiore; ma nella *Crassula arborescens,* W., e *C. Cotyledonis*, L., invece, sono sparse senza ordine riconoscibile, però in maggior numero nella pagina superiore che nell'inferiore. In ogni caso, hanno, come quelle nel *Polypodium crassifolium* e nel *Phlebodium areolatum,* stretti rapporti col sistema fibro-vascolare; anzi ne sono la terminazione. La loro presenza è denunziata da piccole fossette nell'epidermide, qualche volta da piccole squame bianche, che vi si formano a spese di materiale essudato. Talvolta non è facile scorgerle con la vista immediata, sia perchè mancano questi segni esterni, sia perchè troppo piccole, o per altre circostanze che influiscono sulla vegetazione dell'intera pianta. In questo caso, volendo esaminare la loro struttura, si è costretti di andare a tentoni nella massa parenchimale, da cui sono circondate.

A schivar tanto, mi sono avvisato d'indagare qualche mezzo chimico, che le mostrasse ad evidenza; e le ricerche a tal fine non sono state senza efficace risultamento. Perciocchè ho appreso, fra le tante cose, che l'ebollizione della foglia dentro una soluzione di potassa colora in nero le glandole, senza punto alterare la tinta verde dei tessuti circostanti; che l'infusione nell'alcool rende, dopo un dato tempo, la fo-

[2]) Vedi *Bull. dell' Associazione dei Naturalisti e Medici di Napoli,* Aprile 1870 a pag. 24, *Sopra alcune relazioni degli stomi con le glandole calcifere di alcune piante.*

[3]) Licopoli — *Sopra alcune glandole calcifere nella* Statice monopetala — *Ann. dell'Acc. degli Aspiranti Naturalisti di Napoli,* Anno 1866.

— *Sopra le glandole calcifere delle Saxifraghe aizoidee* — Vedi *Rendic. della Reale Acc. delle Sc. fis. e mat. di Napoli.* Marzo 1868.

glia trasparente e fa le glandole opache e di color grigio. Tanto pel primo che pel secondo trattamento la ricerca diviene agevole ed efficace. Come nelle glandole del *Polypodium*, così in queste della *Crassula lactea* si riconosce un *corpo*, una *tunica* ed un *disco*. Il corpo è fatto di cellule parenchimatiche, non punto spirali; la tunica risulta di fibrocellule disposte in un solo ordine periferico; il disco è sottile perchè fatto di sole cellule dermatiche molto depresse. In esso sono alquanti stomi.

La colorazione in nero per la potassa è una reazione chimica, che ha luogo nella parte corticale della glandola, e non mica nel corpo, che però ne rimane inalterato; è una tinta assunta dalla sostanza contenuta in quelle cellule fibriformi, che nel campo del microscopio apparisce azzurra traente al verdognolo; è di quelle tinte che passano a rosso di sangue all' arrivo d' un acido ordinario.

Le differenze che queste glandole della *Crassula lactea* e specie affini offrono rispetto a quelle del *Polypodium crassifolium* e *Phlebodium areolatum* sono le seguenti: la faccia esterna di ciascuna glandola, cioè il disco, porta un certo numero di stomi assai più piccoli di quelli che esistono nel resto della foglia, ed hanno cistomi ad immediato rapporto col corpo della glandola; l'epidermide è molto sottile per straordinaria depressione delle cellule dermatiche; mentre nel *Polypodium* e *Phlebodium* il disco è spesso, e gli stomi mancano. Una forma di glandole più complesse ho trovato in altre piante di natura diversa, e di cui dirò qui appresso.

§ 3. — *Altre glandole calcifere in alcune Saxifraghe aizoidee.*

Le foglie della *Saxifraga stabiana*, Ten., e *S. lingulata*, Bell., portano glandole calcifere, disposte ad una ad una alla base dei denti; sicchè tutte insieme vi costituiscono serie marginali *(Tav. VI, fig. 17, a)*. In altre specie affini di tali glandole se ne trovano ancora per tutta la pagina superiore della foglia; nella *Saxifraga retusa*, Gouan. non se ne trovano che tre sole ed occupano tre punti diversi sulla stessa pagina; non mancano altre specie, nella stessa sezione delle aizoidee, che ne portano una sola all' apice. In ogni caso, la loro presenza è resa sensibile alla vista naturale, sì dal prodotto della loro secrezione calcare, sì dalle altre circostanze testè accennate. Nelle foglie di queste Saxifraghe il sistema fibroso-vascolare è naturalmente poco sviluppato, essendovi rappresentato da delicatissime nervature *(Tav. VI, fig. 17)*, in cui la rachide *(r)* è più sottile delle ramificazioni laterali; a rovescio di ciò che si osserva nella generalità delle piante; e queste ramificazioni si portano alle basi dei denti a fin di partecipare alla costituzione delle glandole. Mercè l' uso dei reattivi e della macerazione, sono riuscito ad isolare dalla foglia della *Saxifraga lingulata* tutto questo sistema vascolare, ed ho potuto quindi osservare che il peduncolo di ciascuna glandola è collegato con quello della glandola vicina per un rametto intermedio *(Tav. VI, fig. 17, n*, e *Tav. VII, fig. 5)*; che questo rametto è parte dello stesso peduncolo abitualmente diviso in due rami; voglio dire, che il ramo, il quale termina in una glandola, consta di due fascetti vascolari riuniti e che uno di essi diverge, perchè si ricongiunga al peduncolo d'una glandola vicina; mentre l'altro s'espande ed invade il corpo della glandola cui appartiene. A dir vero, v'è un sistema di fascetti vascolari, la cui disposizione non è facile descrivere a parole *(Tav. VII, fig. 5)*. Da queste condizioni anatomiche deriva, che ciascuna glandola può ricevere umore linfatico, non solo dal proprio peduncolo, ma da tutto il sistema vascolare della foglia.

Nella parte esterna di ciascuna glandola, e precisamente alle pareti della fossetta, sono alcune cellule papillari quali semplici, quali ramose *(Tav. VI, fig. 19* e *20, gg)*. Esse traggono origine dal derma sottoposto e sono anch'esse di natura glandolare, in quanto che contengono umore particolare e di color giallognolo. Le più grandi sono ai margini della fossetta, le più piccole al fondo *(Tav. VI, fig. 19, gg)*. Tra esse si condensa il materiale espulso dalla glandola sottoposta, e vi rimane incastrato. Per questa circostanza avviene, che cotesto materiale non si modelli a squame decidue, bensì a mucchi imbutiformi, i quali rimangono al posto fino all'essiccazione dell'intiera foglia.

Al fondo di ciascuna fossetta corrisponde la parte esterna della glandola, cioè il disco portante stomi, il numero dei quali varia da due ad otto *(Tav. VI, fig. 18, st.* e *Tav. VII, fig. 3, d)*; sono più piccoli degli altri sul resto della foglia ed hanno per giunta ostiolo circolare, non ellittico.

In quanto al corpo della glandola *(Tav. VI, fig. 22* e *Tav. VII, fig. 3)*, posso affermare che la parte corticale è costituita di due tuniche: una di cellule fibriformi *(Tav. VI, fig. 22, t,* e *Tav. VII, fig. 3, f)*, l'altra di cellule vasali *(Tav. VI, fig. 22, v,* e *Tav. VII, fig. 3 v)*. Nella prima si scorgono due suoli di cellule fibriformi; nella seconda, un solo ordine di vasi. E questa seconda tunica o zona vascolare comprende in sè il *nucleo* della glandola *(fig. 22, m* della *Tav. VI,* e *fig. 3, m* della *Tav. VII)* fatto da un particolare tessuto a cellule piccolissime ed angolose. Entrambe le tuniche sono una continuazione del sistema scheletrico della foglia sensibilmente modificato; ma il nucleo *(m)* non ha riscontro in altra parte della pianta, ed è, a mio avviso, parte speciale ed essenziale della glandola stessa. Le sue cellule, oltre all'essere piccole ed angolose, sono mai sempre nucleate; resistono più che le altre agli agenti chimici; e fu per questa ultima proprietà che io potetti, mediante l'ebollizione nell'acido nitrico, isolarle dal resto della glandola *(Tav. VII, fig. 4, m)*. Ho isolato pure il disco, cioè quella parte dell'epidermide che è al fondo della glandola *(Tav. VI, fig. 21, l)*; ed ho veduto che gli stomi in esso compresi vanno muniti di cistoma tuboloso. Questo è immerso abitualmente nella parte centrale della glandola *(nucleo)* ove la sua estremità alquanto gonfia *(zz)* giace a contatto immediato con alcune cellule tondeggianti e cuticolizzate. Egli è per questo che tutte le volte in cui mi son fatto ad isolare cotesto cistoma, ho veduto la sua parte inferiore a trascinar seco un gruppo di quelle cellule, le quali vi rimanevano aderenti come se fossero sferocristalli d' un cistolito aderenti al loro sostegno.

Queste glandole calcifere che, da una parte sono in perfetta continuità col sistema fibro-vascolare e dall'altra si collegano col sistema epidermico e coi cistomi, costituiscono nelle Saxifraghe aizoidee un apparato secretivo ed escretivo assai specioso, la cui importanza fisiologica può divenire oggetto di svariate esperienze. Allorchè io l' ebbi scoverto la prima volta nella *Saxifraga stabiana,* dubitai molto se il materiale fosse emesso dalla glandola, e per la via degli stomi, ovvero dalle cellule papillari che si trovano all'orifizio ed alle pareti della fossetta esterna; ma, dopo che riconobbi altre glandole a queste somiglianti, come quelle nella *Crassula lactea,* non munite all'esterno di cellule papillari, non esitai punto a riconoscere che il detto materiale venisse dalla glandola sottoposta. Anzi da qualche indagine microchimica mi risulta, che l'arrivo d'un acido determina fin nell'estremità del cistoma e nelle cellule circostanti, una sensibile effervescenza, durante la quale, si vede chiaro che, le bollicine gassose si fanno strada per le aperture stomatiche. Questo fenomeno ha luogo anche nei casi in cui alla faccia esterna della

glandola non v' è alcuna raccolta concrezionata. Ciò prova altresì che il materiale cui è dovuto il fenomeno dell' effervescenza, trovasi in quei tessuti allo stato solubile, stato che rende facile il suo passaggio attraverso agli stomi che vi sono annessi.

Di altre glandole calcifere.

§ 4. — *Glandole calcifere solitarie in alcune Epatiche.*

Il Mirbel nella sua celebre memoria sulla *Marchantia polymorpha,* L., descrisse molto diligentemente alcuni organi epidermici, che chiamò stomi, i quali sarebbero organizzati secondo un tipo affatto diverso di quello già noto in tutte le fanerogame e crittogame vascolari. Consterebbero, secondo lui, d'un numero di cellule speciali, disposte intorno ad una piccola cavità sottoepidermica, alla quale si accede per due aperture; l'una superiore nell' epidermide, l' altra inferiore e diametralmente opposta; la prima di figura circolare, la seconda crociforme.

Non per investigare la storia di cotesto argomento, ma per armonizzare le cose da me trovate con le risapute, è d'uopo che io accenni a qualche lavoro altrui. Il Nägeli chiamò *glandole epidermiche* gli stomi del Mirbel [1]), quantunque ne avesse riconosciuta la origine e la struttura conforme era stata precedentemente indagata. Intanto, messe a confronto le descrizioni che ne hanno dato i due illustri Osservatori col risultamento delle mie ricerche, mi avveggo che v'ha ancora qualche cosa da aggiungere, e qualche altra, che debbesi altrimenti interpetrare.

Fondamento di ciascuna glandola è una cellula speciale sottoepidermica; da questa vengono, per formazione endogena, altre quattro cellule anche speciali per forma e per contenuto protoplasmatico *(Tav. III, fig. 1)*. Ben tosto ciascuna di queste ne riproduce un' altra, o due; e tutte insieme crescendo, rimangono fra loro aderenti e disposte in guisa da circoscrivere una cavità di figura circolare, che è appunto la cavità dello *stoma,* secondo il Mirbel, o della *glandola,* secondo il Nägeli *(Tav. III, fig. 2)*.

Fin qui non si avrebbe che l'abbozzo d'una glandola vescicolare, simile a quelle che rinvengonsi in molte piante nei tessuti sotto-epidermici; cioè l'abbozzo d'un organo cavo e senza aperture di sorta alcuna. Nel progresso dello sviluppo osservasi, che le cellule fondamentali s'incurvano, si fanno piatte e circoscrivono più ampia cavità. In questo s'accostano alla faccia inferiore dell'epidermide, la quale, pel loro contatto e per l'ulteriore crescenza della glandola sottoposta, si modifica considerabilmente; le sue cellule dermatiche si fan depresse e si sollevano in alto, formandovi una piccola prominenza conica. E poi sopravviene un istante, che l'apice di questa prominenza si perfora per l'obliterazione di due o tre cellule, e vi si stabilisce un foro circolare *(Tav. III, fig. 3 e 4, a)*.

E questo foro è l'apertura esterna della glandola. A un tempo si forma l' interna od inferiore per un parziale scollegamento, che soffrono le parieti delle cellule fondamentali; ed è apertura crociforme *(Tav. III, fig. 5 e 6, x)*.

V'ha però ancora un altro periodo di formazione, che precede quest' ultimo, in cui le due aperture sono simili, perchè circoscritte ancora solo da quattro delle cellule fondamentali, cioè da quelle stesse, che, spogliate dalle parieti della prima cellula madre, si associano fra loro come le doghe d'una botte *(Tav. VI, fig. 14 e 15)*.

[1]) Nägeli — *Ueber Spaltöffnungen — Linnea,* 1842.

Ho detto testè che l'epidermide, per lo sviluppo delle glandole di cui ragiono, si solleva in alto e si perfora. Ora aggiungo che in questo stesso tempo si stabilisce al di sotto della glandola uno spazio vuoto, che è appunto la camera pneumatofora. Questa è tappezzata da cellule parenchimali per lo più disposte in fili confervoidei *(Tav. III, fig. 3, f)*.

Dal momento che le due aperture della glandola sono stabilite, la sua funzione secretiva è cominciata. Ciò avviene quando la fronda della Marchantia è appena formata, o è ancora molto tenera. Questo accidente ho potuto determinare per mezzo dei reattivi chimici; cioè per l'effervescenza, che vi determinano, come che il carbonato o bicarbonato di calce si vada formando. La qual cosa dagli Osservatori, che mi precedettero, non è stata notata.

Importa inoltre far conoscere che, durante il fenomeno dell'effervescenza prodotto nel campo del microscopio sopra sezioni diverse, si vede chiaramente che le bollicine gassose movono dalla faccia interna della glandola e si fanno strada verso l'apertura esterna, da cui talvolta escono, strozzandosi.

E non fu nemmanco osservato, che col tempo la faccia interna di siffatte glandole si rende bruna e granellosa pel deposito di materia minerale; che le pareti delle singole cellule s'inspessiscono più dell'ordinario e si cuticolizzano in guisa, che tutta la glandola acquista una certa resistenza all'azione degli acidi o della macerazione. Per questa proprietà io l'ho potuto più volte isolare dalle parti annesse e ritrarne le forme *(Tav. III, fig. 5)*.

Il fatto dell'effervescenza per materiale calcare e la cuticolizzazione delle pareti glandolari, non sono le sole ragioni che m'inducono a ritenere, che nella *Marchantia polymorpha gli stomi* pel Mirbel, le *glandole cutanee* pel Nägeli sieno organi di secrezione e propriamente glandole calcifere, ma la grande analogia che ho riconosciuto fra esse, ed altre glandole calcifere che appresso descriverò.

Il Sachs[1]) recentemente ha considerato queste glandole della *Marchantia* come produzioni epidermiche; ma, se io non mi sono ingannato nel vederle nascere in un piano sotto-epidermico, come di sopra ho riferito; se ho potuto, mercè dei reattivi, isolarle dall'epidermide e dai tessuti circostanti senza arrecare lacerazioni alla medesima, ho ragion d'affermare che sieno glandole piuttosto *parenchimali,* anzichè *epidermiche.*

Dalla *Marchantia polymorpha* passando alla *Lunularia vulgaris,* Radd. e da questa all'*Anthoceros laevis,* L. e ad altre specie affini, codeste glandole calcifere si riducono ad una semplice lacuna, cui corrisponde un foro dell'epidermide; tanto che si potrebbero tenere in conto di piccole camere pneumatofore. Le quali sarebbero, solo nella *Lunularia vulgaris,* e non nelle altre specie, tappezzate da cellule papillari e confervoidee.

Sulla funzione di queste glandole siffattamente semplificate e mancanti di pareti proprie, io non saprei fin da ora pronunziarmi con tutta certezza; giacchè gli agenti chimici non mi hanno presentato alcuna reazione, nè ho mai veduto intorno al loro orifizio alcuna raccolta di materiale segregato. Però la loro riduzione, sì nella forma, che nel grado di sviluppo m'inducono a pensare che appartengono ad un tipo d'organizzazione, il quale raggiunge il massimo grado di sviluppo e di perfezione nella *Marchantia polymorpha;* e che solo in questa specie il loro scopo fisiologico si rivela agli attuali mezzi d'investigazione.

[1]) Sachs J. — *Traité de Botanique etc.* — Traduzione del Van Tiegem. Paris 1874.

§ 5. — *Ancora di altre glandole calcifere solitarie.*

Nella famiglia delle Plumbaginee ho trovato parecchie specie fornite di glandole calcifere, segnatamente nei generi *Statice, Plumbago* ed *Armeria*. — Nella *Plumbago europaea*, Ten.; *P. Larpentae*, Lindl.; *P. coerulea*, H. B.; ed ancora nella *Syringa vulgaris*, L., delle Jasminee, ce ne sono sparse per tutte le parti verdi, e la loro presenza è denunziata da una certa scabrezza e da un certo colore grigiastro alla superficie di quelle parti, colore e scabrezza dovuti al carbonato di calce, che vi si trova sparso sotto forma di granulazioni o di squamette.

Codeste glandole sono organizzate sul tipo di quelle da me già scoverte nella *Statice monopetala*, e descritte in un precedente lavoro [1]). Non essendo però qui necessario farne minuta descrizione, mi restringo a chiarire alcune cose non riferite in quel lavoro, le quali ben s' attagliano al soggetto della presente memoria.

Queste glandole per la natura del loro prodotto e per la loro forma fondamentale somigliano a quelle nella *Marchantia polymorpha*, ma intanto, raffrontate con quelle, vedesi chiaro che queste delle Statice sono più dermatiche che parenchimali; poichè il derma ha molta parte alla loro costituzione. In ognuna di esse *(Tav. VI, fig. 13)* distinguo due parti: l'una *essenziale*, l'altra *accessoria:* la prima è una particolare *borsetta (fig. 13, b)* giacente sulla faccia inferiore del derma, la seconda è una piccola *prominenza mammellonare (fig. 13, n)*. E questa prominenza ha un orifizio, una specie di vestibolo che mena alla sottoposta borsetta. Essa risulta in origine dal sollevamento di alquante cellule dermatiche; la borsetta, per contrario, trae origine da una sola cellula speciale sottoepidermica, la quale si riproduce per quattro, non altrimenti di quello che ho riferito innanzi sull'origine delle glandole nella *Marchantia polymorpha*. E queste quattro cellule *(fig. 14* e *15)* figlie, crescendo, si saldano pei lati in modo, da circoscrivere uno spazio di figura quadrilatera o quasi quadrilatera, che in progresso di sviluppo diventa cavità dell'anzidetta borsetta, le cui pareti non è a credere che rimangono in ogni specie circoscritte dalle sole quattro cellule fondamentali, ma da otto o intorno a dieci.

Nella *Statice Limonium*, L., e *S. splendens*, Lagas., e nella *Plumbago alba* ho trovato esempio della prima combinazione *(Tav. III, fig. 10* e *13)*, nella *Statice Duriei* per la seconda. In ogni caso queste glandole hanno due aperture, l'una esterna in corrispondenza del vestibolo, l'altra interna, e al tutto opposta. Nella *Statice Duriei, S. splendens* e *S. Limonium (fig. 7, p)* l'apertura esterna è circolare e si mostra come munita d'un cercine, che in realta è il margine delle quattro cellule *(p)* alquanto ingrossate. Il rammollimento per l'acido azotico fa scorgere in esso quattro piccoli sporgimenti interni *(fig. 7, 8* e *13)*, i quali corrispondono alle unioni delle cellule parietali. Questi sporgimenti interni, od angoli rientranti, che voglionsi dire, non si rinvengono nelle glandole sparse sullo stelo e sui picciuoli delle foglie nella *Statice splendens*. Ivi il detto cercine, sottoposto all'azione dell'acido azotico diluito e bollente, si conserva invece liscio e continuo *(fig. 10* e *11, p)*. L'apertura inferiore non è in tutte le specie, nè in tutte le condizioni di sviluppo e di vegetazione ugualmente beante. È chiusa o semichiusa nelle glandole in via di sviluppo; è aperta nelle adulte. In queste ho sperimentato che l'azione

[1]) Licopoli. — Ricerche microscopiche sopra alcuni organi particolari della *Statice monopetala*. — *Ann. dell' Accad. degli aspiranti Naturalisti di Napoli* — Anno 1866.

dell'acido azotico diluito e bollente, pel rammollimento che vi produce, fa sì che i margini dell'apertura si ravvicinino fino a ridurla ad una semplice fessura tetragona, ovvero ad un semplice meato tracellulare *(fig. 10, x)*. L'azione della potassa, a caldo o a freddo, produce effetti contrarii. Di fatti quando la borsetta è naturalmente chiusa, come è nella *Plumbago Larpentae,* la potassa ne la dilata.

Durante queste esperienze, ho notato che l'azione dei reattivi adoperati si limita alle estremità dell'apertura crociforme, dilatandola o richiudendola; e che il rimanente delle commessure non ne risente punto. Ciò avviene anche allorchè, per soverchia energia del reattivo, le pareti dell'intiera borsetta ne rimangono disciolte. In tal caso, le estremità che resistono, rimangono come scheletro. Questa loro resistenza è dovuta a processo di cuticolizzazione.

La parte accessoria o superficiale di queste glandole non è in tutte le piante sviluppata, come nella *Statice monopetala;* anzi nella *S. splendens,* segnatamente nelle glandole dello stelo, e nella *S. Limonium,* L., e *S. scorzoneraefolium,* Link., è poco prominente; e nella *Plumbago Larpentae* ed in altre con epidermide sottile è spianata del tutto ed anzi in taluni punti è per contrario infossata.

Nella pagina inferiore delle foglie queste glandole calcifere sono frammiste agli stomi ordinarii, coi quali non presentano alcuna relazione anatomica.

Nella *Statice Limonium* è frequente il fatto dell'esistenza di stomi giacenti ad uno ad uno nel perimetro d'una sola cellula dermatica, *(Tav. III, fig. 13),* come fu osservato dall'Hildebrand nell'*Aneimia fraxinifolia* [1]).

E tornando ora alla borsetta, parte essenziale della glandola, debbo aggiungere che nella *Statice Duriei,* essa è, per la parte inferiore, ad immediato contatto col parenchima verde, il quale conserva forma abituale e comune ad altre parti. Per converso, nella *Statice monopetala* tra la faccia esteriore della borsetta ed il parenchima ordinario s'interpone un ordine di cellule cubiche piene di sostanza protoplasmatica *(Tav. VI, fig. 13, m)*. Queste fan parte della glandola, od esercitano funzione secretiva. Sono indotto a credere ciò dall'analogia che offrono colle cellule glandolari nel *Clerodendrum fragrans* e nel *Polypodium crassifolium.* Da ultimo, giova far sapere che tra le forme spettanti a questo tipo di glandole calcifere solitarie, malgrado lo scarso numero che ho potuto fin ora scoprire, si può riconoscere un certo progresso graduato, sì nella grandezza, sì nella struttura; e che la forma più completa è osservabile nella *Statice monopetala;* la più semplice, nella *Syringa vulgaris.*

RIASSUNTO E CONCLUSIONI

Ho dichiarato già nelle considerazioni preliminari che il mio lavoro si propone allargare le cognizioni anatomiche, fin ora possedute, intorno alla struttura degli stomi; nonchè chiarire alcuni punti oscuri o tuttora controversi. E però nella prima parte della presente memoria ho riferito cose, che riguardano segnatamente la struttura anatomica degli stomi; nella seconda ho trattato della loro distribuzione rispetto alle diverse parti della pianta in generale, nonchè dei rapporti che in alcune specie assumono con organi particolari; nella terza ho descritto nuove forme di glandole, alcune delle quali aventi stretti rapporti con gli stomi e col sistema fibro-vascolare della pianta. Ed ora, che

[1]) Hildebrand (F). — *Ueber die Entwickelung des Farnkrautspaltöffnungen* — *Bot. Zeit.* 1866, N.° 32, pag. 110.

pongo termine alla descrizione dei fatti da me trovati, sento il bisogno di riassumere per sommi capi le cose già dette, non fosse altro, per vedere se lo scopo prefissomi sia stato raggiunto e fin dove.

Ricercando sulla struttura anatomica degli stomi, ho creduto rivolgere l'attenzione ad ognuna delle loro parti ed esaminarle comparativamente sopra un gran numero di specie; ed ho studiato infatti con quest'ordine di preferenza: il *cistoma,* le *cellule semilunari,* ed il *derma circostante.*

Secondo risulta dalle mie ricerche, lo stoma non è un organo ridotto alla semplicità d'una apertura lenticolare cinta da due cellule speciali, ma un *apparato* organico, a cui il cistoma è necessariamente legato, sì da farne parte integrante. Onde posso affermare; che questo cistoma, non è una semplice introflessione della cuticola ed una *parte accidentale* dell'apparato stomatico, bensì un organo che assume forme varie, secondo la natura della pianta e dell'organo cui appartiene; che la forma più semplice e meno sensibile alla vista armata di microscopio è come sottil diaframma, quando più e quando meno abbassato nello spazio lenticolare, e che la più complessa somiglia ad un imbuto. Nell'*Aloe verrucosa, A. ferox, A. elongata*, *Amaryllis formosissima, Lilium candidum, Oxalis cernua*, *Rhipsalis Cassitha*, *Cereus peruvianus*, ed *Opuntia Ficus-indica,* in molte piante crasse, ed ancora nelle semenze dei Cannacori esso cistoma raggiunge le maggiori dimensioni. La parte tubulare v'è abitualmente compressa, perchè modellata nello spazio lenticolare; di raro è cilindrica com'è negli stomi ad ostiolo circolare sui semi della *Canna indica* e *C. flaccida (Tav. V, fig. 17)*, della *Lachenalia pendula* e di qualche Narciso. Talvolta offre delle accidentalità sotto forma di cercini e di rigonfiamenti; e di fatti nell'*Aloe ferox (Tav. I, fig. 4, m m')*, esso tubo ha due cercini, uno all'entrata, l'altro all'uscita dell'ostiolo; nell'*Oxalis cernua* ne presenta un solo. *(Tav. II, fig. 13, m)*. In quelli dell'*Amaryllis Belladonna* invece è un rigonfiamento bulbiforme *(fig. 9, m)*. E così il lembo è, dove liscio, dove grinzuto (Lilium candidum), dove semplice e dove ramoso. Queste ed altre modalità, non riconosciute dagli Osservatori, che mi precedettero nella ricerca, mi confermano nel concetto che il cistoma prende forma e proporzione secondo le specie. In ogni caso trae origine dalla cuticola, come fu notato dal Gasparrini; ma a senso mio, è sempre un organo vescicoloso terminato a fondo chiuso, il cui lembo s'espande alla faccia inferiore delle cellule semilunari di rincontro alla camera pneumatofora.

Consegue da tutto ciò che le quistioni surte fin dai tempi dell'Hedwig sull'*apparenza* o *realità* dell'apertura stomatica; se le cellule semilunari fossero capaci di movimento, per cui l'apertura, ne rimanesse ora aperta ed ora chiusa; se l'aria passasse liberamente per la detta apertura, ora per movimento d'inspirazione ed ora d'espirazione o per l'uno o per l'altro insieme, non hanno più alcuna importanza. L'aria e gli umori vi passano come attraverso un apparato dializzatore. Le cellule semilunari stomatiche si generano dappertutto nel modo come fu detto dal Mohl, e sono sempre due, *mai quattro e disposte in due coppie alterne.* Gli Autori che hanno creduto trovarne quattre nell'*Agave americana*, nell'*Ambrosinia Bassi* e nel *Pittosporum sinense* sono stati tratti in errore, forse per non avere esaminato gli stomi di quelle piante fin dai primordii della loro formazione, ma solo ad epoca di completo sviluppo. Nell'*Agave americana* l'inganno dipende da che, col crescere dell'epidermide, quattro cellule dermatiche si sollevano intorno allo stoma e ne delimitano l'apertura, sì che pare rettangolare o

quadrilatera. Ma questa apertura è il vestibolo, non lo spazio lenticolare, il quale è, come ho detto, semprremai circondato da due cellule semilunari. Nel *Pittosporum sinense,* in cui parrebbe che due coppie di cellule semilunari giacessero nello stesso piano orizzontale ed una compresa nell'altra, l'errore sarà derivato da un' altra circostanza, ed è che l'unica coppia di cellule semilunari stomatiche, porta nel margine interno due ricrescimenti labriformi, i quali mentiscono tutte le apparenze di due altre cellule, ovvero d' un' altra coppia di cellule inscritte.

Nello stesso inganno sarebbe incorso chiunque avesse esaminato con superficialità gli stomi del *Lilium candidum (Tav. II,* dalla *fig. 15* a *18),* dell'*Isoloma Decaisneana (Tav. IV, fig. 1, u, st)*, del *Restio tectorum (Tav. V, fig. 1* e *2 p, x),* della *Globa saltatoria (Tav. V, fig. 9, p'*, della *Zea Mäis (Tav. II, fig. 10, p)* ed altre graminacee; più dell'*Opuntia Ficus,* indica *(Tav. V, fig. 3, p p' p")* ed ancora di altre piante non citate nel presente lavoro, quantunque le cause ne fossero ben differenti. Ed in vero, nel *Restio tectorum* le cellule semilunari sono comprese da due altre d'indole dermatica, le quali, perchè conformate a *calotta,* in qualunque senso si guardi il preparato, esse si presentano come due altre cellule semilunari. Nella *Globa saltatoria* ve ne sono anche due meno arcuate, ma più grandi delle vere cellule stomatiche. Nella *Zea Mäis*, di cosiffatte cellule dermatiche ve ne sono quattro disposte in due coppie, delle quali coppie quella a contatto delle cellule stomatiche *(Tav. II, fig. 10 p)* è meno grande dell'altra successiva. Tre coppie se ne trovano nell'*Opuntia Ficus* indica *(Tav. V, fig. 3)*, con forma semilunare più perfetta nelle due interne che nell'esterna; così ancora nel *Cercus peruvianus* ove la gradazione è però invertita. *(Tav. V, fig. 6, p p' p").* Ancora nell'*Euphorbia pendula* il numero è più cresciuto e vi si distribuiscono in due piani, uno superiore e l'altro inferiore e raccolte a rosetta. Ve ne sono disposte pure a rosetta, ma in un sol piano, nei semi della *Canna flaccida*, e *C. indica (Tav. V, fig. 17).* In qualunque modo, queste coppie non sono di cellule semilunari propriamente dette, ma invece di cellule dermatiche speciali, che prendono parte alla costituzione dello apparato stomatico.

Le cellule semilunari offrono spesso una particolarità *non per anco riconosciuta dai precedenti osservatori,* ed è la proprietà di cuticolizzarsi per cui talvolta si fan resistenti all'azione degli acidi. E questa cuticolizzazione è per tutta la loro superficie negli *Equiseti*, per la sola faccia superiore nell'*Ephedra*, limitata al solo margine interno in altre, è nulla nella gran maggioranza delle specie da me fin ora esaminate. La ragione istologica di questo fatto è d'attribuirsi a quelle stesse cause che influiscono sulla formazione della cuticola, nonchè del cistoma che n'è sua dipendenza. Le due cellule semilunari, sia che portino o no ricrescimenti labriformi, ad epoca di completo sviluppo si trovano allogate in un piano inferiore al derma. Ciò avviene perchè le cellule dermatiche intorno allo stoma si modificano in modo, che da una parte s'abbassano e dall'altra si elevano. E, levandosi dal piano ordinario, formano il vestibolo, abbassandosi possono dar luogo ad un'altra concavità o preostiolo. Talvolta l'abbassamento od il sollevamento è dovuto a particolari modalità assunte dalle cellule circostanti, tal'altra da solo inspessimento della cuticola. Questo ultimo caso m'accadde osservare nel *Dasylirium glaucum (Tav. IV, fig. 4, 5* e *6)*, e nell'*Equisetum ramosissimum (Tav. IV, fig. 3).*

Abbiamo adunque intorno allo stoma cellule dermatiche che si sollevano al di sopra dell'apertura stomatica per formare il vestibolo *(Agave, Dasylirion, Ephedra),* e cellule dermatiche che si abbassano, per formarvi un infossamento destinato a raccogliere

materia espulsiva, spesso di natura cerosa ed in sensibile quantità come nel *Pinus Pinsapo*, *Libocedrus chilensis*, ed altre piante diverse. D'ordinario queste cellule speciali sono tanto ampie che sorpassano le cellule semilunari, sì dalla faccia superiore che dall'inferiore *(Amaryllis)* e pajono lacune; si dispongono a coppie *(Opuntia)* ed a rosetta *(Cannacoro)*; e poichè quest'ultima disposizione è osservabile altresì intorno a stomi facienti parte d'organi ghiandolari, come nel nettario dell'*Isoloma Decaisneana*, *(fig. 1 e 2 Tav. IV)*, e nel frutto della *Passiflora racemosa (fig. 8 idem)*, la loro presenza abituale autorizza a pensare che l'apparato stomatico sia esso stesso un apparato glandalare.

In quanto alla distribuzione degli stomi, in generale si è ritenuto fin'oro ch'essi trovansi sopra organi messi a nudo e colorati in verde, come: la corteccia, le foglie propriamente dette ed ogni altro organo d'indole foliacea; e che, solo in via eccezionale si rinvengono sopra organi fiorali, sul frutto di parecchie specie fanerogame e sull'urna di qualche Musco. Le mie ricerche hanno allargato queste nozioni; giacchè mi fu dato scovrirne sulla faccia interna dell'ovario *(Papaver Rhoeas*, *Hyacinthus* etc.*)*, sui fascetti trofospermici *(Iris tuberosa)*, sugli ovoli, sulle semenze, *(Canna e Pancratium)* accanto alle papille stimmatiche *(Globa saltatoria)* ed ancora intorno e nell'orifizio di particolari glandole *(Phaseolus*, *Dolichos, Crassula lactea, Saxifraghe* etc*)*. Ben vero, in tutte codeste condizioni organografiche, gli stomi mi hanno presentato modalità relative alla grandezza totale ed alla disposizione; ma non differenze sostanziali in ordine all'origine e struttura delle cellule semilunari che ne formano la parte precipua.

Queste scoverte, una alla descrizione d'alcune glandole marginali, hanno formato il soggetto della seconda parte della presente memoria. Così nelle papille nettarifere dell'*Isoloma Decaisneana* ho notato un'insolita grandezza delle cellule semilunari e del cistoma corrispondente; nell'Ovario del *Narcissus*, *Hyacinthus*, *Papaver* etc. esse sono ancora più ampie ma contrafatte, ed, invece di granuli clorofillini, contengono granellini amidacei misti a protoplasma amorfo; il loro cistoma non è di rincontro a lacuna più o meno appariscente, bensì sta a contatto immediato di particolare tessuto ghiandolare. Le stesse accidentalità offrono gli stomi appartenenti alle glandole marginali del *Cyclamen*, dell'*Inula*, della *Tussilago* ed altre piante già di sopra rammentate. Consegue da tutte siffatte circostanze che gli stomi, pur conservando la stessa struttura fondamentale ed i loro rapporti con l'epidermide, prendono parte alla costituzione di apparati glandolari, ed assumono funzione espulsiva sensibile, sì negli effetti che nel magistero. E questi effetti variano più secondo la natura dell'organo che della pianta a cui appartengono. Le glandole marginali ed apicali, organizzate come quelle nell'*Inula*, *Leucantemo*, *Ciclamino*, *Iperico, Ortensia*, *Limnocaride*, e quelle solitarie ed apicali nei *Narcisi*, nelle *Scille*, *Giacinti* e simili, gemono umore linfatico. Quantunque questo fatto io l'avessi riconosciuto in un grandissimo numero di piante, io non mi sento ancora autorizzato a ritenerlo come regola generale. Ed infatti nell'*Escallonia rubra* vi sono pure glandole marginali a cui mettono capo le nervature della foglia; ma il loro prodotto secretivo è umore ceroso e resinoso. Nel *Clerodendrum fragrans*, oltre le glandole marginali delle foglie, vi sono glandole sul calice organizzate diversamente; queste gemono umore dolcigno, quelle emettono linfa.

La presenza o la mancanza del sistema vascolare influisce sulla qualità del materiale segregato, nonchè sulla durata della virtù secretiva; le glandole marginali della *Saxifraga rotundifolia* dell'*Hydrochotyle bonariensis*; le glandule apicali della *Limno-*

charis Humboldtii, che sono in rapporto del sistema vascolare, funzionano per tutta la durata delle rispettive foglie; quelle del Clerodendro, collegate coll'epidermide e col parenchima sottoposto, s'esauriscono assai prima che il calice perda il suo vigore vegetativo.

Intanto perchè forse le mie ricerche sugli stomi sono piuttosto anatomiche che sperimentali o fisiologiche, esse non mi offrono finora fatti bastevoli a determinare con precisione quale e quanta sia l'influenza che questi stomi esercitano nel lavorio secretivo ed espulsivo delle glandole cui appartengono. Giacchè trovo glandole stomatifere nei *(Dolichos, Phaseolus, Hedera, Trewesia)*, che producono zucchero; e glandole stomatifere, (nelle *Crassule*, nelle *Saxifraghe aizoidee)*, che espellono carbonato di calce. Anzi v'è di più: che di due glandole dello stesso tipo anatomico (nel *Polypodium crassifolium* e nel *Clerodendrum fragrans)*, una è calcifera, l'altra nettarifera. Ma qualunque sia la natura della sostanza emessa, il suo passaggio attraverso le parieti del cistoma o della faccia esterna delle glandole, è sempre l'effetto d'una dialisi cuticolare.

Tra le glandole stomatifere ve ne sono di quelle destinate ad emettere sostanza comune a tutte le piante, voglio dire materia cerosa sotto forma di polvere glauca. Ricordo a tal riguardo le glandole epicarpiche della *Passiflora racemosa*, della *Cydonia japonica*, del *Sorbus domestica*, del *Cephalotaxus Fortunei-drupaceus* e dell'*Euphorbia pendula;* quelle sui rizomi del *Solanum tuberosum* e quelle sulla corteccia dello *Xanthium Strumarium*, tutte forme simili per origine e costituzione; alle quali forme, secondo io credo d'aver dimostrato, si collegano le cosidette lenticelle. Tra queste e le glandole qui sopra rammentate v'è uniformità di struttura e di funzione; e però io non credo che alcuno possa, di qui innanzi, negare alle lenticelle l'attributo di glandole stomatifere. Se v'è differenza nella breve durata e nella facile trasformazione di queste ultime in tessuto sugheroso, è differenza insignificante dovuta alle fasi vegetative cui va soggetto l'organo od il tessuto sottoposto.

Nella terza parte del presente lavoro ho descritto due forme di glandole calcifere: una collegata al sistema fibro-vascolare, l'altra al sistema parenchimale. Alla prima appartengono le glandole del *Polypodium crassifolium*, della *Crassula lactea* ed altre specie affini, nonchè quelle delle *Saxifraghe aizoidee*. Spettano alla seconda quelle nelle *Piombaggini*, nelle *Statici* ed altre specie. E son tutte glandole che segregano ed espellono carbonato di calce.

Come ho dichiarato in principio, il presente lavoro non è inteso a descrivere solo nuovi trovati istologici sulla costituzione degli stomi, ma ancora a mettere in maggiore rilievo cose non ben vedute e non bene interpetrate. Se gli sforzi da me sostenuti abbiano o no raggiunto questo intento, non spetta a me dichiarare. Intanto mi sia lecito almeno affermare che l'esistenza del cistoma, come parte integrante dell'apparato stomatico, sia un fatto irrepugnabile; e che talvolta, come nelle *Saxifraghe*, esso acquisti stretti rapporti anatomici col corpo di organi glandolari *(Tav. VI, fig. 21, st. l* e *fig. 4, Tav. VII)*. E se in ciò non sarò stato tratto in errore, sembrami del pari irrepugnabile il legame fisiologico che ho trovato tra stomi e glandole. Ritengo fermamente inoltre, che in questi casi la virtù secretiva od espulsiva da parte degli stomi non sia da mettersi in forse.

Resterebbe ora a sapere se a questo doppio scopo fossero pur destinati gli stomi ordinarî, voglio dire tutti quelli che non mostrano alcun legame anatomico con glandole di

sorta. Il presente mio lavoro non registra su tal riguardo molti dati sperimentali; ma, ricordando che gli stomi disposti in serie lineari nelle foglie del *Pinus Pinsapo;* e quelli in linee flessuose sulle foglie del *Libocedrus chilensis* e *L. Doniana* sono sempremai ricoverti di polvere glauca, per cui l'intera pianta piglia il colore che tutti conoscono, m'è lecito attribuire ad essi la stessa virtù secretiva ed espulsiva. Il dubbio resterebbe sempre per quelli esistenti in organi chiusi, (ovario, ovoli e semenze) nei quali non mi fu dato ancora poter riconoscere alcuna sorta di prodotto secretivo.

Intanto sommando insieme tutti i fatti da me trovati sulla struttura degli stomi e sui loro rapporti con le glandole stomatifere; e mettendo tutto in raffronto con ciò ch'è già sotto il dominio della scienza, io veggo chiaramente che tra *glandola* e *stoma* vi sono tali legami, tali analogie che *il concetto della glandola non può essere disgiunto da quello dello stoma* e che nei casi in cui questi organi si presentano naturalmente divisi si debbono considerare, in un senso teoretico, come due elementi d'*un apparato glandolare tipico.*

In ogni modo, è bello riflettere che ciò che il Malpighi (Opera citata) scrisse di questi organi, or son circa due secoli: « *Inter utriculos et fibrosum rete, in plerisq̄; foliis peculiares folliculi seu loculi disperguntur, qui patenti hiatu foras, vel halitum, vel humorem fundunt* » sia oggi una verità comprovata dall'osservazione e dalla ricerca anatomica.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

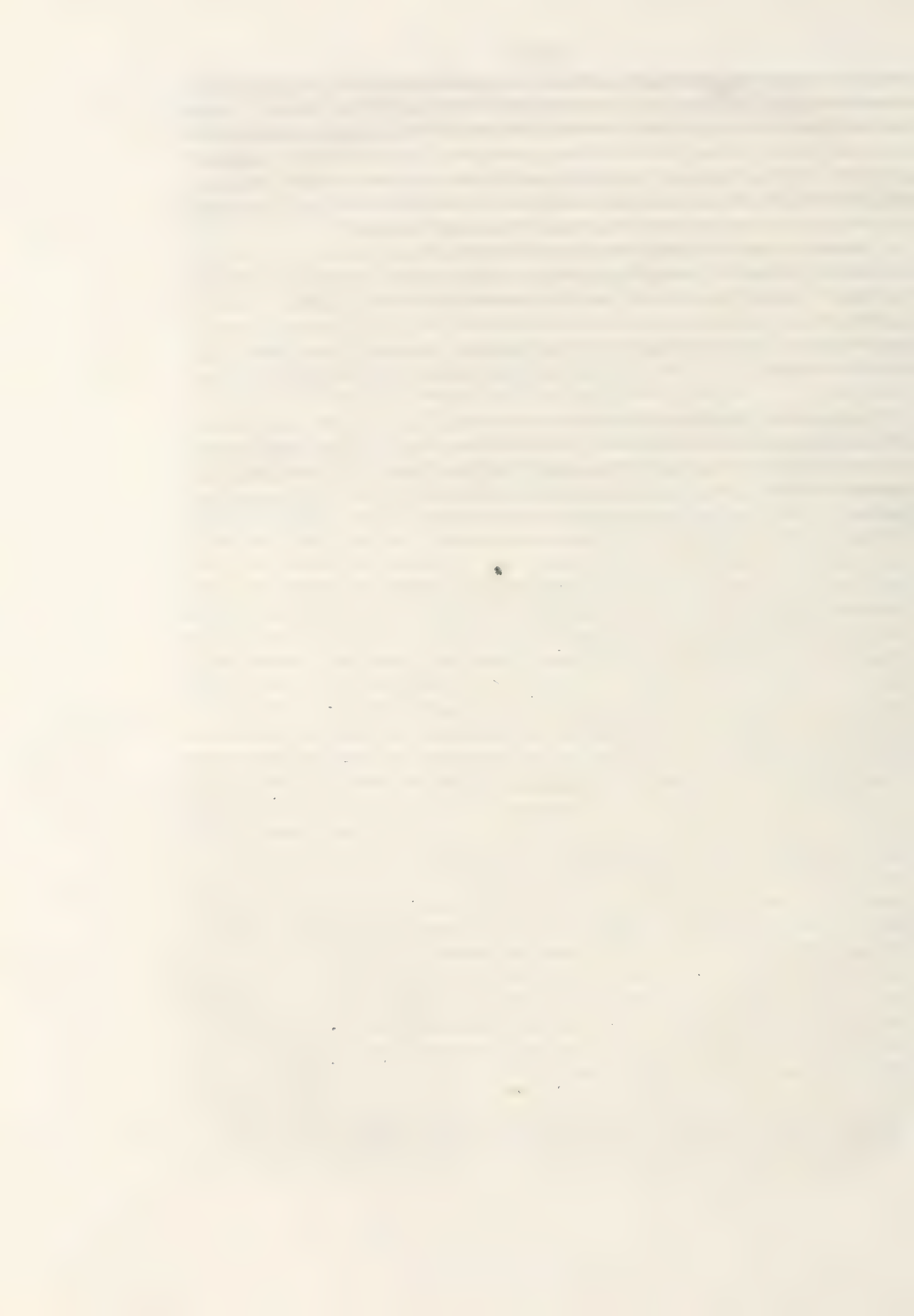



Tavola I.

Fig. 1.ª — Frammento d'epidermide nella foglia dell'*Aloe verrucosa*, Ait.; rappresenta il taglio verticale eseguito secondo un piano che divide trasversalmente in due parti eguali uno stoma; e mostra il vestibolo *a*, scavato, in gran parte, nello spessore della cuticola *c*. Questa è stratificata solo nella faccia in contatto delle cellule dermatiche *d*; le cellule semilunari *xx* sono fiancheggiate da due grosse cellule speciali *pp*, le quali si collegano con un'altra cellula *p'*, che giace di rincontro allo spazio lenticolare; da questo scende il cistoma imbutiforme *t*, il cui lembo rimane rinchiuso nella cellula *p'*. In questa si contiene materia finamente granellosa *g*, di colore giallognolo.

Fig. 2.ª — Altro frammento d'epidermide con stoma appartenente alla specie anzidetta. Il taglio verticale è condotto nel senso d'un piano che rasenta il margine esterno delle cellule semilunari; le quali però si veggono per lo lungo. Le parti essenziali dello stoma sono rappresentate per intiero. La figura è presa da un preparato trattato coll'acido azotico diluito ed è destinata a mostrare come il cistoma *t*, di cui il lembo *l*, rammollito e ripiegato in dentro per l'azione del detto acido, attraversi lo spazio lenticolare, sì che il tubo *t*, modellandosi in quello, si fa lateralmente compresso. Il vestibolo *a* è tappezzato da sottile strato di cuticola, quivi diversamente colorata rispetto al resto.

Fig. 3.ª — Stoma nell'*Aloe ferox*, Lam., veduto da sopra in sotto e per trasparenza. Le cellule semilunari *xx*, essendo molto infossate, appariscono oscure, e lo spazio lenticolare *u*, da esse circoscritto, è come piccola fessura lineare.

Fig. 4.ª — È il cistoma isolato dalle parti annesse mercè la bollitura nell'acido nitrico diluito. Porta seco il vestibolo *a*; ed ha due cercini *m* ed *m'* in corrispondenza della parte tubulosa *t*. Il lembo *l* è rilasciato.

Fig. 5.ª — Taglio verticale dell'epidermide nell'*Aloe ferox*, L. L'acido solforico distrusse i tessuti vicini in contatto dello stoma, cioè: le sue cellule semilunari, le speciali *pp* ed il parenchima verde sottostante; lasciandovi la cuticola *c*, uno scheletro delle cellule dermatiche *d* ed il cistoma *t* ed *l* in tutta la sua interezza. Questo rimase sospeso al fondo del vestibolo *a*; l'azione dell'acido ne ha reso sfrangiato il lembo e bavosa la superficie. Nelle cellule dermatiche *dd* è notevole la presenza di alcune sporgenze coniche a guisa di produzioni stallattiche, le quali sono effetto di speciale cuticulizzazione della parete delle stesse cellule dermatiche; però dal lato rivolto all'esterno.

Fig. 6.ª — Altro cistoma nell'*Aloe elongata*, Salm., isolato per mezzo degli acidi. Differisce da quello nell'*Aloe ferox* per la mancanza dei cercini lungo la parte tubu-

losa. La parte in *a* è il vestibolo aperto anteriormente dallo scalpello anatomico; ed uno dei margini dell'apertura è ripiegato in fuori; la faccia interna n'è granulosa ed oscura.

Fig. 7.ª — Altro taglio verticale o trasversale eseguito come quello nella *fig.* 1ª. Appartiene all'*Aloe elongata* ed è destinato a mostrare come le cellule semilunari *x* sieno fiancheggiate da due coppie di cellule speciali *p* ed *e*, anzichè dalla sola *p;* e come questa s'abbassi per circoscrivere anch' essa la camera pneumatofora *n*. Le altre lettere hanno lo stesso significato, che nelle precedenti figure.

Fig. 8.ª — Taglio trasversale in un petalo del *Nelumbium speciosum,* Wild. Mostra nell'epidermide *e* una cellula *r* per forma e per contenuto diversa dalle altre adiacenti, ed è cellula di natura glandolare, anzi rappresenta una semplicissima glandola dermatica.

Fig. 9.ª — Frammento d'epidermide nella specie anzidetta veduto di prospetto. Offre uno stoma *s* con apertura lineare o quasi; ed una glandoletta unicellulare *r*.

Fig. 10.ª Epidermide nella *Globularia salicina,* Lam., con uno stoma *s* della forma ordinaria ed una glandola bicellulare *t*. Questa, atteso l'infossamento in cui giace, mentisce l'aspetto dello stoma che sta vicino; ma n'è più grande e realmente diversa.

Fig. 11.ª — Epidermide con parenchima nella foglia della specie precedente veduta nel taglio perpendicolare. Mette in maggior rilievo la differenza tra lo stoma *s* e le glandole *r*. Queste sono costituite di cellule dermatiche bicorporee. La cuticola *c,* spessa più dell'ordinario, comprende in se le cellule semilunari *s*. A queste corrisponde in basso il cistoma *l* col lembo naturalmente spiegato a ventaglio. Innanzi all'ostiolo dello stoma *s* vedesi un mucchio di sostanza polverosa.

Fig. 12.ª — Taglio trasversale in un petalo della *Nymphaea alba*, L., Mostra in *r* una glandola costituita di due cellule dermatiche diverse dalle altre adiacenti per forma, grandezza, disposizione e contenuto. Questo è granelloso e di color giallastro.

Fig. 13.ª — La glandola *r* della figura precedente veduta di prospetto dopo la bollitura nell'acido azotico diluito. È divenuta più grande del naturale. La cellula inferiore s'è fatta a mo' di borsetta ed a pareti grinzute. Essa però conserva ancora la sostanza granellosa e giallastra di cui era naturalmente colma.

Fig. 14.ª — Glandola simile a quelle delle due precedenti figure tolta da un sepalo della stessa *Nymphaea* e veduta di prospetto. In essa si scorge un protoplasma nucleiforme. La sezione *n* è orizzontale; ed il sepalo era in via di sviluppo.

Fig. 15.ª — Stoma della *Plantago lanceolata*, L., veduto in sezione perpendicolare. Le cellule semilunari *x* sono piccolissime e come fossero due escavazioni nella cuticola *c*. Questa è interrotta naturalmente nell'apertura stomatica per formarvi un accenno di vestibolo *a*. Immediatamente sotto a questo vestibolo è una piccola cavità lenticolare, ch'è appunto lo spazio lenticolare ordinario. Il cistoma è impercettibile, ma si scorge la camera pneumatofora.

Fig. 16.ª — Glandola semplicissima fatta d'una sola cellula dermatica *r*. Appartiene alla *Plantago lanceolata;* la figura intiera rappresenta ancora una parte della sezione trasversale della foglia. Detta glandola differisce da quelle nei petali del *Nelumbium*, *(fig. 8 e 9)* per essere infossata. Il parenchima verde sottoposto non è punto modificato.

Fig. 17.ª — Glandola nei petali del *Nelumbium* veduta da sotto in sopra dopo la bollitura nell'acido azotico diluito. Il parenchima, ch'era in contatto colla faccia inferiore del derma, è distrutto; non resta che la cuticola coll'impronta delle cellule dermatiche preesistenti. Ad essa è attaccata la parete della glandola stessa fatta vescicolosa.

Fig. 18.ª — È la glandola anzidetta veduta di fianco e di prospetto. Il suo orifizio è ornato d'un cercine *m*, fatto della cuticola circostante.

Fig. 19.ª — Altra glandola simile a quella rappresentata nelle due precedenti figure. Il suo orifizio era precluso da sottile diaframma cuticolare *x*. Esso è parzialmente distrutto per l'azione della bollitura negli acidi. Appartiene alla stessa *Nymphaea alba.*

Tavola II.

Fig. 1.ª — Taglio trasversale dell'epidermide appartenente allo stelo dell'*Equisetum ramosum*, Desf. Nello spessore di quest'epidermide *ee* vedesi scavato il vestibolo *a*, a cui corrispondono in sotto le cellule semilunari *xx*. Tra queste ed il fondo del vestibolo è un'altra cavità *a'*. Lo spazio lenticolare apparisce come un canaletto cilindrico, ed è tanto lungo per quanto sono spese le cellule semilunari *xx*. Esso mena giù in una grossa cellula speciale *p*, di cui la membrana interna *y*, fatta grinzuta per l'azione dell'acido azotico, contiene ancora corpuscoli protoplasmatici.

Fig. 2.ª — Uno stoma dell'anzidetto *Equisetum* veduto dalla faccia inferiore. La cellula speciale *q* è lacerata in modo che un suo brandello rivolto in sopra, lascia vedere chiaramente le cellule semilunari *xx* e la faccia inferiore del derma *d*. Le cellule semilunari sono disgiunte ad un estremo per l'azione del compressore. Tutta la figura è tolta da un preparato sottoposto all'ebollizione nell'acido nitrico diluito; *q* ha lo stesso significato di *p* nella figura precedente.

Fig. 3.ª — Brandello d'epidermide nella specie anzidetta. È destinato a mostrare l'apertura *t* esterna del vestibolo e le cellule semilunari vedute in ombra ed in sotto.

Fig. 4.ª — Altro brandello d'epidermide a cui, mediante un taglio orizzontale, fu tolta la parte superficiale ed esterna; sicchè le cellule semilunari *x*, messe quasi allo scoverto, mostrano nettamente due solchi paralleli *r*, le righe o ricrescimenti trasversali e la fessura lenticolare. Il contorno *f* indica la sezione orizzontale del vestibolo segnato *a* nella *fig. 1.*

Fig. 5.ª — Stoma nell'*Ephedra altissima,* Desf., sezione trasversale. Le cellule semilunari *xx* sono saldate alla cuticola pel loro margine interno; e la loro faccia superiore *z* è inspessita notabilmente. Lo spazio lenticolare è limitato da due margini taglienti *u* (qui in sezione trasversale); la cuticola *c* è stratificato nella parte inferiore in contatto delle cellule dermatiche *e*; le cellule speciali *q* comprendono solo la faccia superiore delle cellule semilunari e non l'inferiore; a questa è applicato il lembo del cistoma *t; a* è il vestibolo.

Fig. 6.ª — E lo stesso preparato dalla figura precedente rappresentato dopo l'azione dell'acido solforico. Ne rimasero la parte superficiale della cuticola *c*, le pareti del vestibolo *a*, la faccia superiore *zz* delle cellule semilunari ed il cistoma *t* slargato come il lembo d'un imbuto; più, sono messi allo scoverto due concamerazioni *yy*

appartenenti al fondo del vestibolo *a* col quale si comunicano. Di queste concamerazioni ce ne sarebbero quattro in tutto l'apparato stomatico. Queste terminano a fondo chiuso; e sono come cornette rivolte in sopra.

Fig. 7.ª — Stoma del *Pittosporum sinense*, Desf., trattato coll'acido solforico. Non si vede che la faccia superiore delle cellule semilunari *zz* perchè cuticulizzate, ed il cistoma *t* pendente dalla cuticola *c*. Questo cistoma è trilobato.

Fig. 8.ª — Avanzo di due cellule semilunari sottoposte all'azione dell'acido solforico. Hanno conservato il margine interno e porzione della loro pariete cuticulizzata. Appartengono all'*Ephedra altissima*, rametto tenero.

Fig. 9.ª — Stoma nell'*Amaryllis formosissima*, L., taglio trasversale nella foglia. Nel fondo d'una depressione dell'epidermide (vestibolo), giacciono le cellule semilunari *xx* aventi alla faccia superiore due ricrescimenti labriformi *uu*, i quali circoscrivono lo spazio lenticolare *k*. Da questo spazio, ch'è l'ostiolo diviso in due, si passa già nel cistoma *t*. Questo offre all'estremo della sua parte tubolosa un rigonfiamento speciale, che nella preparazione era tagliato dal passaggio dello scalpello in due lati opposti, anteriore e posteriore. Le cellule speciali *pp* sono relativamente molto ampie e vuote del tutto. Esse cingono solo i margini laterali delle cellule semilunari.

Fig. 10.ª — Taglio trasversale nella foglia della *Zea Mays*, L. Alla faccia superiore è uno stoma di cui le cellule semilunari *x* sono lateralmente compresse, sì che lo spazio lenticolare è reso impervio; la loro parete è inspessita tanto che le rispettive cavità sono piccolissime e spostate verso la faccia inferiore. Esse sono accompagnate da due coppie di cellule speciali *p* più piccole delle dermatiche. Alla faccia inferiore poi si vede, di rincontro allo stoma un gruppo di tre cellule particolari *vvv*, formanti un organo non ancora definito. In esse non ho mai veduto alcuna sorta di contenuto; *c* camera pneumatofora; *e* cellule dermatiche.

Fig. 11.ª — Frammento d'epidermide nella specie precedente con stomi veduti di prospetto e da sopra in sotto. Dietro l'azione dell'acido azotico bollente, lo spazio lenticolare s'è aperto ad ambo gli estremi *k* delle cellule semilunari *xx*; ed il cistoma *t*, come borsetta di figura romboidale, giace rilasciato al disotto.

Fig. 12.ª — Stoma e cistoma dell'*Ephedra altissima* veduto dalla faccia inferiore. Il cistoma ha il lembo diviso in due lobi *t* che pajono due bandelette. In *a* è l'apertura esterna del vestibolo, ed in *xx* è un avanzo delle cellule semilunari, come quello rappresentato nella *fig. 8.* La cuticola *c* ha la faccia inferiore ineguale e scabrosa.

Fig. 13.ª — Cistoma nell'*Oxalis cernua*, Thunb. È munito d'un anello circolare *m*; il suo tubo *t* è stretto ed il lembo n'è sfrangiato. Le altre parti circostanti mancano perchè distrutte dagli acidi. Ne rimangono le cellule dermatiche *ee* con la pariete uniformemente cuticolizzata. Il vestibolo *a* conserva forma di calice, qual era naturalmente prima del trattamento coll'acido.

Fig. 14.ª — Cistoma isolato dell'*Amaryllis Belladonna*, L. La parte superiore *a* è il vestibolo; *xx* sono gli avanzi delle due cellule semilunari distrutte dagli acidi; al di sotto di esse il detto cistoma offre un rigonfiamento bulbiforme.

Fig. 15.ª — Stoma nel *Lilium candidum*, L., veduto nel taglio trasversale. Le cellule semilunari *xx* giacciono nel medesimo piano delle dermatiche *ee*, o vi sono un poco

sporgenti in sopra. Lo spazio lenticolare *k* è contornato da due grossi ricrescimenti labriformi ed è pieno di materia polverosa.

Fig. 16.ª — Altro stoma della specie anzidetta veduto da sopra in sotto prima che fosse stato esposto ad alcun trattamento microchimico. Le cellule semilunari *xx* hanno due grossi ricrescimenti labriformi *uu*.

Fig. 17.ª — Lo stesso stoma della figura precedente con porzione d'epidermide. È veduto dalla faccia inferiore, dopo l'azione dell'acido nitrico bollente. Il cistoma *tt* è molto largo e col lembo pieghettato e crenato; i ricrescimenti labriformi *uu* fatti più diafani, mentiscono l'aspetto di due cellule oblunghe; delle cellule semilunari *xx* della figura precedente, qui ne rimane solo l'impronta.

Fig. 18.ª — Lo stesso organo veduto nella sua integrità e da sopra in sotto. I due ricrescimenti labriformi *uu* hanno tutte le apparenze di due altre cellule semilunari soprapposte alle normali *x*. Le cellule speciali *qq* non sono gran fatto diverse dalle altre cellule dermatiche.

Fig. 19.ª — Uno stoma nel *Rhipsalis Cassytha*, Gaert. In esso è notevole la grandezza dei ricrescimenti labriformi *uu* e l'aderenza delle cellule speciali *pp* colle cellule semilunari *xx*. I ricrescimenti labriformi *uu* giacciono nel fondo di largo e profondo vestibolo *a*; *b* cuticola che sovrasta due ordini di cellule dermatiche.

Fig. 20.ª — Stoma con cistoma isolato. Appartiene alla specie anzidetta ed è stato ottenuto colla macerazione nell'acqua e colle abluzioni con acido azotico bollente. Il cistoma è ramoso-sfrangiato.

Fig. 21.ª — Taglio trasversale nella corteccia del *Rhipsalis salicornoides*, Haw. Mostra uno stoma fiancheggiato da due lacune sotto-epidermiche *pp*. Queste hanno una pellicola membraniforme alla faccia interna e sono circondate da parenchima verde; contengono sostanza mucosa e filante. Tra esse ed il cistoma è interposto un ordine di cellule parenchimali. In *v* è uno stoma tagliato verticalmente; ed è munito di cistoma *l*. Al di sopra dello spazio lenticolare è un mucchio di materia polverosa.

Tavola III.

N. B. — Le figure, da 1 a 6, appartengono alla *Marchantia polymorpha;* e le lettere hanno in tutte lo stesso significato.

Fig. 1.ª — Taglio trasversale in una fronda ancora in via di formazione. Però l'epidermide *e* era già ben distinta dal parenchima verde sottoposto. In questo è un gruppo di cellule *s*, le quali costituiscono l'abozzo d'una glandola calcifera, o, secondo l'altrui opinione, d'uno stoma particolare.

Fig. 2.ª — Le cellule ghiandolari *s*, fatte più ampie che nella figura precedente, si accostano alla faccia inferiore del derma *e;* circoscrivono uno spazio di figura circolare, ch'è la cavità della glandola ancora in via di sviluppo.

Fig. 3.ª — Le cellule glandolari *s*, divenute ancora più grandi, premono l'epidermide; e questa, sollevandosi in sopra, si assottiglia, si rompe e così vi si stabilisce un foro *a* di figura pressochè circolare. Quale foro è l'apertura esterna della glandola. Il parenchima verde nel quale per l'innanzi la glandola era immersa, ora è modificato sensibilmente; giacchè vedesi fatto di cellule più piccole e disposte in fi-

letti confervoidei *f*. Tra esse e la glandola rimane pure un certo spazio vuoto che rappresenta la camera pneumatofora.

Fig. 4.ª — Taglio verticale d'una glandola adulta. Le sue pareti, costituite dalle cellule speciali *s* come nelle precedenti figure, sono giunte a perfezione e contengono ancora materia granellosa di natura protoplasmatica. Essa glandola offre due aperture *a* ed *x*. La prima è superiore ed esterna, la seconda inferiore e sta di rincontro ad un parenchima particolare come nella precedente figura. Questa apertura crociforme si forma per lo scollamento delle quattro cellule circostanti.

Fig. 5.ª — Glandola isolata dalle parti circostanti per mezzo dei reattivi chimici. Compressa alquanto fra le lastrine del microscopio, mostra la sua apertura crociforme *x* e l'apertura circolare *a*.

Fig. 6.ª — Glandola veduta da sopra in sotto. L'apertura *a* è munita d'un cercine che disegna lo spessore delle cellule circostanti. In fondo v'è l'apertura crociforme *x*.

Fig. 7.ª — Epidermide della *Statice Duriaei,* Girard., bollita nell'acido nitrico diluito. Contiene in breve spazio uno stoma *s t*, ed una glandola calcifera. Questa è sul tipo di quelle nella *Marchantia polymorpha*. L'apertura esterna *a* è contornata dai margini di quattro cellule dermatiche *p;* ha nei fianchi altre quattro cellule *p'* ed ancora nel fondo altre quattro più piccole , tutte disposte con simmetria. Lo stoma *s t* non offre altro di notevole che la sua grossezza presso che eguale all'apertura superiore della glandola. In *p''* è un avanzo di alcune cellule speciali che fiancheggiano la glandola. Le cellule dermatiche hanno parete flessuosa, tal che si uniscono fra di loro come per suture; la loro membrana interna *m m* è fatta grinzuta dal trattamento cogli acidi.

Fig. 8.ª — Glandola calcifera nella *Statice splendens,* Lagas., veduta da sopra in sotto. La figura è destinata a mostrare l'ampiezza delle cellule dermatiche *d* che la circondano; nel suo fondo e nei suoi fianchi le cellule *p'*, *p''* sono simmetricamente disposte. Di queste la membrana esterna è molto amplificata per l'azione dell'acido, e però tutte insieme formano una sorta di cuffia trasparentissima *s*.

Fig. 9.ª — Taglio longitudinale in una glandola calcifera della *Statice Limonium,* L. L'apertura esterna giace in un infossamento dell'epidermide , nel quale s'accumula la materia espulsa *p*. Questa è carbonato di calce in forma granellosa.

Fig. 10.ª — Glandola calcifera isolata. Appartenente alla foglia della *Statice splendens,* Lagasc. In questo stato mostra nel fondo una piccola apertura crociforme *x* e le commessure delle cellule, come fossero piccoli cordoni; le pareti essendo flessuose e rammollite; *p* indica la figura esterna e di figura circolare.

Fig. 11.ª — Altra glandola della specie anzidetta, ma tolta dallo stelo. È più piccola di quelle nelle foglie della stessa pianta. Mostra i suoi rapporti immediati col parenchima circostante, ch'è fatto di cellule arrotondate. La sua bocca si apre nelle cellule del derma *e e*.

Fig. 12.ª — Taglio verticale d'uno stoma nella *Statice Duriaei*. L'apertura è circoscritta da un particolare sollevamento della cuticola conformato a vestibolo, come in qualche *Aloe* ed *Amarillide*.

Fig. 13.ª — Frammento d'epidermide con glandola calcifera e stoma nella *Statice Limonium*. La glandola calcifera *p* è circondata da otto cellule dermatiche più grandi delle altre contigue; e sono angolari, cuneiformi ed a superficie striata. V'è ac-

canto alla glandola uno stoma *s t* compreso nell' àmbito d'una sola cellula esagonale. Tutto il preparato è veduto da sopra in sotto ed è rappresentato più in grande che nella *fig. 9.*

Fig. 14.ª — Epidermide con glandole pedicellate nell'*Aeollanthus suaveolens*, Mart. Le glandole in *r* sono in via di formazione, l'altra in *g* è completa e pare un pelo alquanto rigonfiato.

Fig. 15.ª — Una glandola *r* della figura precedente giunta a perfezione. È veduta da sopra in sotto e mostra la disposizione delle cellule che la costituiscono. La sua cavità si vede per trasparenza ed è aperta alla base. Tutte le cellule contengono sostanza finamente granellosa e di color giallo-verdognolo.

Fig. 16.ª — La stessa glandola veduta dalla faccia inferiore. Oltre le cellule *s* che la costituiscono, mostra una membrana *v* che tutta l'involge. Essa è una continuazione della cuticola; in origine era la membrana esterna della cellula madre.

Fig. 17.ª — Altra glandola simile alla precedente veduta di profilo, sì che fa vedere i suoi rapporti originarî colla epidermide, più la disposizione delle sue cellule parietali e la membrana cuticolare involgente. Questa è naturalmente divenuta molto ampia e sollevata al di sopra delle cellule come fosse una bolla.

Fig. 18.ª — Altra glandola della stessa specie fatta naturalmente più grandē. È veduta dalla faccia inferiore. Mostra la sua apertura *a* con cui era in comunicazione sull'epidermide; le cellule parietali *s* e la membrana cuticolare *v*.

Fig. 19.ª — Una glandola particolare in via di formazione nella *Saxifraga crassifolia,* L. È inserita sull'epidermide *e*. Le cellule ghiandolari *g* sono rivestite d'una comune membrana cuticolare e raccolte in un solo gruppo o fascio *c;* tra essa e le cellule sottostanti si raccoglie il liquido segregato.

Fig. 20.ª — La stessa specie di glandola divenuta pressochè adulta, giace in un infossamento dell'epidermide *e*. Le cellule *g*, che nello stadio precedente erano papillari e raccolte in un sol fascio, ora sono rotonde e disposte in due piani; e la veste cuticolare *c* s'è naturalmente sollevata in sopra ed ha assunto forma mammellonare. Entro di essa si raccoglie umore limpido.

Fig. 21.ª — La glandola rappresentata nelle due precedenti figure giunta a completo sviluppo. In questo stato lascia vedere alla base quattro cavità, che sono le cavità di quattro cellule originarie sebbene in questa figura, ch'è del taglio verticale, non se ne scorgano che due sole *aa*. La membrana cuticolare *c* è fatta proporzionatamente più ampia, ed ha assunto forma vescicolare e tondeggiante.

Tavola IV.

Fig. 1.ª — Mostra uno stoma *s t* grosso e turgido sopra una prominenza nettarifera nell'*Isoloma Decaisneana,* Hort. È sostenuto da una corona di cellule papillari e geme umor nettareo. Le cellule che lo sostengono hanno pareti assai delicate e trasparenti. Il suo ostiolo è largo e munito di ricrescimenti labriformi *u*.

Fig. 2.ª — Due prominenze nettarifere nella specie anzidetta vedute di profilo. Sono sormontate rispettivamente da uno stoma *s t* grosso e turgido come nella precedente figura. Non sottoposte ad alcun trattamento microchimico, ma leggermente compresse fra le lastrine del microscopio, pur lasciano vedere i ricrescimenti la-

briformi *u*, ed il cistoma *t*. Questo discende fra le cellule sottostanti e vi si mostra come il cannello d'un imbuto.

Fig. 3.ª — Stoma completo nell'*Equisetum ramosissimum*, Desf., Oltre le cose espresse dalla *figura 1ª, 2ª e 6ª della Tav. II.* Offre una cellula speciale *v*, conformata quasi a ferro da cavallo; la quale circoscrive per metà le pareti della camera pneumatofora. Questa cellula non è da confondersi con altra che sta di rincontro al cistoma (*fig. 2ª q, della Tav. II*). Il vestibolo *a* mostra due sole concamerazioni *y*; le altre due essendo state asportate dallo scalpello anatomico.

Fig. 4.ª — Stoma nelle foglie del *Dasylirium glaucum*, Hort., taglio verticale. Il vestibolo *a* è circoscritto da un particolare sollevamento della cuticola *c* ed è un *provestibolo*, per rispetto ad un'altra cavità *s*, la quale invece è delimitata da un'ulteriore introflessione della cuticola stessa *c c*. In questa seconda cavità è lo spazio lenticolare, il quale corrisponde all'entratura della parte tubulosa del cistoma *l*. Questo ha lembo relativamente molto dilargato. In oltre si veggono in sezione trasversale le cellule semilunari *x*, conformate ad *s*, le quali, anche in questa specie, sono fiancheggiate da due grosse cellule dermatiche *p* di forma speciale.

Fig. 5.ª — È lo stoma della figura precedente veduto di prospetto. Atteso lo spessore della cuticola, non mostra che la sola apertura esterna e per trasparenza le due cellule speciali *p*.

Fig. 6.ª — Rappresenta il vestibolo ed il cistoma nell'*Agave geminiflora*, Brand.; le altre parti annesse essendo state distrutte dagli acidi. Tutta la figura serve a mostrare come la cuticola non si abbassi accidentalmente per prendere parte alla costituzione dell'apparato stomatico, ma in modo particolare.

Fig. 7.ª — Frammento d'epidermide a cui corrisponde la faccia esterna d'una glandola stomatifera *a* ed uno stoma ordinario *s*. Questo è grande poco più del doppio di quelli in *a* appartenenti alla glandola anzidetta.

Fig. 8.ª — Una glandola stomatifera sul frutto della *Passiflora racemosa*, Brot. L'unico stoma che porta è grosso e turgido più dell'ordinario; ed è sostenuto da una zona di sei cellule dermatiche conformate a mezza luna (*z*), sì che con i loro estremi si saldono allo stoma tenendolo incastrato nel mezzo.

Fig. 9.ª — Altro stoma di forma e grandezza ordinaria appartenente alle foglie della specie anzidetta. Serve a dinotare la diversità delle proporzioni tra esso e quello della glandola anzidetta.

Fig. 10.ª — La glandola rappresentata dalla *fig. 8*, veduta nel taglio perpendicolare al piano dell'epidermide. Le cellule speciali *pp'*, disposte in due piani; le più grandi *p'* fiancheggiano il cistoma *l* per tutta la sua lunghezza, le altre *p* si posano sopra un altro ordine di cellule dermatiche.

Fig. 11.ª — Altra glandola stomatifera nell'*Euphorbia pendula*, Link. È organizzata come nella *Passiflora* (*fig. 8ª*). Però quella è prominente, questa è infossata, ed ha un doppio ordine di cellule speciali *p*, *p'*. La lettera *a*, dinota il vestibolo formato da parziale abbassamento dell'epidermide; *e*, *l* ed *x*, hanno il solito significato.

Fig. 12.ª — Frammento di foglia circolare nell'*Hydrocotyle bonariensis*, Lam., con glandole marginali *m*. Queste sono ingrandite del doppio.

Fig. 13.ª — Una glandola *m* della precedente figura rappresentata più in grande e secondo un taglio radiale. In questa figura si vede manifestamente come il sistema vascolare *vs* della foglia vada a terminarsi al di sotto delle aperture stomatiche *i*.

Fig. 14.ª — Rappresenta l'apice d'un dente nella foglia della *Tussilago racemosa*, Tausch. Ed è una glandola *marginale* o *terminale* con stoma grosso tre volte più di quelli esistenti nel resto della foglia medesima. Il sistema vascolare *vs*, messo allo scoverto, va a terminare al di sotto dello stoma *st*.

Fig. 15.ª — Stomi appajati rinvenuti al vertice delle glandole terminali nella specie anzidetta.

Fig. 16.ª — È un'altra glandola marginale nella foglia del *Cyclamen hederaefolium*, Ait. Taglio radiale. Gli stomi *st* vi sono prominenti; ed i rispettivi cistomi giacciono in un tessuto particolare a cellule sferiche *n*, nel quale tessuto arrivano le ultime cellule vascolari *vs*. Tale glandola è rivolta alla pagina superiore anzi che all'inferiore.

Fig. 17.ª — La stessa glandola veduta di prospetto e mostra quattro stomi giacenti in un disco a cellule epidermiche molto più piccole delle altre contigue.

Fig. 18.ª — Brandello d'epidermide dell'*Equisetum Telmateja* veduto dalla faccia inferiore. Fra uno stoma e l'altro vi è una cellula *v* conformata ad *x*. Ciascuno stoma è garentito da una cellula *r* conformata a calotta. Ma ne riveste la faccia inferiore. Questa è analoga alla cellula *q* nella *figura 1ª e 2ª della Tav. II*. Tutta la figura ritrae il preparato dopo la protratta bollitura nell'acido azotico. Gli stomi hanno le cellule semilunari *x* con una doppia serie di righe trasversali.

Tavola V.

Fig. 1.ª — Stoma e cistoma nel *Restio tectorum*, L. fil. Le piccole cellule semilunari *x* sono comprese a metà dalle cellule speciali *p*; il cistoma *l*, relativamente molto largo, ha la estremità immersa in un tessuto particolare *n*; mentre nella sua lunghezza è fiancheggiato da cellule parenchimali oblunghe.

Fig. 2.ª — È il cistoma della precedente figura isolato dalle parti annesse per mezzo degli acidi. Esso pende da un brandello di cuticola; nella sua lunghezza veggonsi ancora le impronte delle cellule *l* che erano accanto; ed eran cellule parenchimali.

Fig. 3.ª — Stoma nell'*Opuntia Ficus-indica*, Mill., veduto di prospetto e da sopra in sotto. È notevole la forma e la disposizione a coppie delle cellule p, p', p'', che fiancheggiano le cellule semilunari stomatiche.

Fig. 4.ª — Calice del *Siphocampylus bicolor*, G. Don., in dimensioni naturali. Mostra negli angoli rientranti *m m* del suo lembo le glandole stomatifere a forma di mezzaluna.

Fig. 5.ª — Lo stesso organo con avanzo di corolla veduto in sezione verticale ed ingrandito poco più del vero. Nelle pareti delle due cavità *m* ed *n* esistono parecchi stomi.

Fig. 6.ª — Stoma nel *Cereus peruvianus*, Haw., veduto nel taglio perpendicolare rispetto all'epidermide. La figura è destinata a mostrare la disposizione e la forma delle cellule speciali p, p', p''; ancora la straordinaria grandezza del cistoma *l* ed i suoi rami *y*, tutto in proporzione dello spessore dell'epidermide. In *x* corrisponde il vestibolo relativamente poco profondo.

Fig. 7.ª — È lo stimma con parte dello stilo nella *Globba saltatoria*, Roxb. Lo stimma è imbutiforme e porta esternamente alquanti stomi che gemono umore particolare.

Fig. 8.ª — È uno stoma della precedente figura rappresentato a forte ingrandimento e veduto secondo un piano verticale e tangenziale rispetto allo stilo. Mostra il suo cistoma *l* ch'è a forma di anfora con larga bocca circolare *u*.

Fig. 9.ª — Lo stoma anzidetto veduto di prospetto e pure a forte ingrandimento. Le lettere *x* e *p* hanno il solito significato.

Fig. 10.ª — Uno stoma tolto dal disco d'una Ferula (*Ferula neapolitana,* Ten.), è grosso più di quelli esistenti in altre parti della pianta, ed è infossato e mezzo nascosto dalle cellule vicine. Queste sono papillari e con pariete di aspetto fibroso.

Fig. 11.ª — Frutto della *Trevesia palmata,* Vis., in via di crescenza. Nel piano che separa lo *stilopodio* dallo stilo propriamente detto porta alcune glandole foveolari e stomatifere *m*, dalle quali geme glucosio e saccarosio.

Fig. 12.ª — Stoma asimmetrico veduto sulla faccia interna dell'endocarpio del *Hyacinthus orientalis*, L.

Fig. 13.ª — Altro stoma assimmetrico straordinariamente grosso veduto sull'endocarpio d'un Narciso.

Fig. 14.ª — Glandola stomatifera sul frutto della *Rosa glandulosa,* Bellard., le cellule *p* e *p'* cingono d'ogni lato le cellule semilunari *x*.

Fig. 15.ª — Gruppo di cellule glandolari *n* sottoposte allo stoma rappresentato nella precedente figura.

Fig. 16.ª — È il vertice d'un'antera della *Zantedeschia aethiopica,* Spr., che mostra due stomi *st*, in rapporto del connettivo e disposti con simmetria.

Fig. 17.ª — Grosso stoma sull'episperma della *Canna iridiflora,* R. P.; è circondato da una zona di cellule speciali *p*. Le cellule semilunari *x* sono arcuate più dell'ordinario, sì che lo spazio *a*, da esse circoscritto, è relativamente molto ampio e di figura ellittica; l'asse maggiore è perpendicolare all'asse che congiungerebbe, come d'ordinario, gli estremi delle solite cellule semilunari.

Fig. 18.ª — Lo stoma della precedente figura nel taglio verticale. Mostra la concavità dello spazio *a*, la forma singolare delle cellule semilunari *x* ed i loro ricrescimenti labbriformi; più in sotto una lacuna *z* fiancheggiata da cellule cilindracee *m*. Essa lacuna è la camera pneumatofora nella quale non mi fu dato vedere cistoma; forse perchè troppo delicato o perchè non regge alla preparazione.

Fig. 19.ª — È un rametto fiorifero del *Phaseolus Caracalla*, L., veduto poco dopo della fioritura con foglie bratteali e peduncoli fiorali recisi. Mostra in *m* delle prominenze a forma di caruncole, sul cui dorso sono quattro o cinque fossette *a* disposte in serie. E queste fossette sono gli orifizi di altrettante glandole stomatifere.

Fig. 20.ª — Stomi imperfetti veduti nell'ovario dell'*Iris tuberosa*, L. Il plasma delle cellule semilunari è sempre amorfo ed offre delle vacuole; non mai granellini amidacei o clorofillini.

Fig. 21.ª — Frammento d'episperma nel *Pancratium maritimum*, L., con stomi apparenti *sss*. Ciò che mentisce la presenza di cellule stomatiche è ricrescimento delle parieti cellulari. In *n* è il nucleo delle cellule epispermiche convertite in cellule dermatiche.

Fig. 22.ª — Altro frammento dell'episperma anzidetto veduto nel taglio perpendicolare alla superficie. In *s* è uno stoma apparente veduto nel senso della sezione.

Fig. 23.ª — È una prominenza mammellonare ovvero una glandola stomatifera del *So-*

lanum tuberosum. Le cellule sottostanti allo stoma *st*, sono lascamente congiunte e formano il corpo della glandola.

Tavola VI.

Fig. 1.ª — Piccola foglia dell'*Inula Helenium*, L. appena uscita dalla gemma. Porta al lembo le glandole marginali *m* sotto forma di papille colorate in rosso-bruno; tutto il resto della lamina essendo bianca e tomentosa.

Fig. 2.ª — Frammento di foglia nel *Ranunculus repens*, L. con glandole *m* al vertice di ciascun dente.

Fig. 3.ª — Piccola foglia di *Nasturtium officinale*, R. B. con glandole marginali *m*.

Fig. 4.ª — Foglia normale della *Limnocaris Humboldtii*, Rich., con una sola glandola apicale stomatifera *m*, alla quale glandola convergono tutte le nervature della foglia.

Fig. 5.ª — Sezione trasversale nella foglia della *Saxifraga sarmentosa*, L. Ed è propriamente la sezione d'una glandola stomatifera. Mostra gli stomi *st* alla superficie; ai quali stomi corrisponde in sotto un lasco parenchima *r* fatto di cellule ramose, che costituisce il corpo della glandola.

Fig. 6.ª — Glandola marginale pedicellata nella foglia dell'*Escallonia rubra*. Non ha stomi, e trasuda umore ceroso e resinoso. Ad essa vanno a terminare le trachee del sistema fibro-vascolare.

Fig. 7.ª — Un'altra glandola simile alla precedente, ma sessile, anzi infossata nella pagina superiore delle foglie nella stessa *Escallonia rubra*.

Fig. 8.ª — Una glandola calcifera nella foglia del *Polypodium crassifolium* tagliata secondo un piano perpendicolare alla superficie di essa foglia. In *m* è il corpo della glandola fatto di cellule spirali; in *p* il peduncolo; ed in *c* la faccia esterna della glandola. Questa faccia è un disco fatto di cellule dermatiche modificate. Il corpo della glandola ed il pedicello sono rivestiti d'una tunica di cellule fibriformi *t*. Il parenchima della foglia, che cinge la glandola, non offre alcuna particolarità notevole. In *e* corrisponde il derma.

Fig. 9.ª — Frammento d'epidermide del *Polypodium crassifolium*, nel quale corrisponde il disco o la parte esterna d'una glandola calcifera. Le lettere *e c* hanno lo stesso significato che nella figura precedente.

Fig. 10.ª — È un brandello di foglia nella specie anzidetta, che mostra, in proporzioni poco più ingrandite del vero, le glandole calcifere coi loro peduncoli *p*, i quali provengono dalle nervature secondarie *n*. Tutto il brandello era reso trasparente per protratta immersione nell'alcool.

Fig. 11.ª — Sezione verticale d'una glandola calicinale nel *Clerodendrum fragrans*, W.; *e* cellule dermatiche ordinarie; *c* cuticola che riveste la faccia superiore della glandola; *e'* faccia inferiore in contatto al parenchima sottoposto. Tra *c* ed *e'* v'è il corpo della glandola fatto di cellule speciali e con forma prismatica.

Fig. 12.ª — Cellule prismatiche vedute in sezione trasversale. Appartengono al corpo della glandola rappresentata nella precedente figura.

Fig. 13.ª — È una glandola calcifera nella *Statice monopetala*, L., veduta in sezione verticale. Mostra in *a* una borsetta con apertura quasi circolare; in *b* cellule pa-

rietali della stessa: in *a'* altra apertura inferiore. A contatto della borsetta *a* è una serie di cellule particolari *m*, al di sotto delle quali è il parenchima ordinario *ii*; con *n* sono indicate alquante cellule dermatiche speciali fatte naturalmente più grandi, e disposte in modo per circoscrivere uno spazio vestibolare.

Fig. 14.ª — Quattro cellule glandolari nate da una sola cellula fondamentale. Costituiscono l'abozzo d'una borsetta, com'è quella in *a*, *b* ed *a'* della figura precedente.

Fig. 15.ª — Le quattro cellule della figura precedente vedute per lo lungo.

Fig. 16.ª — È una glandola epidermica nella *Brecxia heterophylla*, Pasq., *a* involucro cellulare; *e* vescichetta cuticulare in forma di sacchetto; *r* peduncolo della stessa.

Fig. 17.ª — È il sistema fibro-vascolare d'una foglia della *Saxifraga lingulata*, Bell., a denti tagliati naturalmente a sbieco, alla base dei quali corrispondono le glandole calcifere *a*. Queste sono le terminazioni del sistema fibro-vascolare *r* rachide.

Fig. 18.ª — Glandola calcifera isolata dal parenchima in cui era immersa. La figura è destinata a mostrare il disco cuticolare *n* con gli stomi *s t* e le fibro-cellule, di cui è costituita la tunica esterna della stessa glandola.

Fig. 19.ª — Taglio trasversale fatto in corrispondenza dell'orifizio esterno della glandola, ed in un piano superiore al disco cuticolare rappresentato nella precedente figura. Mostra le glandole papillari epidermiche *g g*.

Fig. 20.ª — È un dente nella foglia della *Saxifraga stabiana*, Ten. Intorno all'orifizio esterno della glandola sono due ordini di glandolette papillari epidermiche *gg*, quasi tutte ramose.

Fig. 21.ª — È il disco cuticolare stomatifero della glandola rappresentata dalla *fig. 18*. Esso mostra, dopo il trattamento cogli acidi, l'impronta delle cellule semilunari *st* da cui pendono due cistomi *l l* l'estremo dei quali è immerso fra gruppi di cellette tondeggianti *z z*.

Fig. 22.ª — Taglio trasversale fatto nel mezzo d'una glandola calcifera, mostra all'esterno il parenchima verde *p*, la tunica fibrosa *t*, la tunica vascolare *v* ed il corpo della glandola *n*. Questo è fatto di cellule minutissime angolari e nucleate.

Tavola VII.

Fig. 1.ª — Taglio longitudinale nel peduncolo d'una glandola calcifera. Mostra in *c c* un avanzo del parenchima della foglia, in *f* due serie di cellule fibriformi costituenti la tunica fibrosa della glandola; in *v* tre vasi a trachea.

Fig. 2.ª — Le stesse cose della figura precedente ritratte in sezione trasversale.

Fiy. 3.ª — Glandola calcifera nella *Saxifraga lingulata*, Bell. veduta secondo un taglio longitudinale, relativamente a se stessa, trasversale rispetto alla foglia. La figura è destinata a mostrare pure la struttura delle parti circostanti: *e* epidermide a pagina inferiore, meno spessa di quella *e s* a pagina superiore. L'una e l'altra vanno assottigliandosi intorno allo stoma *d*. In *gg* è un gruppo di glandolette papillari epidermiche che fiancheggiano da un solo lato lo sbocco della sottoposta glandola. In *d* è uno stoma; in *z* un gruppo di cellule tondeggianti che nascondono il lembo del cistoma, quali cellule sono immerse nel nucleo *m* della glandola; in *f* è la sua tunica esterna fatta di due ordini di fibrocellule; *v* tunica vascolare. Entrambe queste tuniche vengono dal peduncolo *x*.

Fig. 4.ª — È la glandola della figura precedente, veduta dopo l'azione dell'acido nitrico bollente: *c* brandello di cuticola da cui pende un cistoma *l*, il quale è ancora legato col nucleo *m* della glandola; *v* avanzi delle tunica vascolare.

Fig. 5.ª — Frammento del sistema vascolare rappresentato nella *fig. 17 della Tav. VI.* Vi sono tre glandole *ppp* denudate della tunica fibrosa, ma tuttavia vestite della tunica vascolare, sicchè il nucleo non si vede punto. Il loro peduncolo è diviso in rami anastomizzati. In *r* corrisponde la rachide della foglia.

Fig. 6.ª — Frammento d'epidermide con stoma e cistoma *e* cuticola, *c* donna epidermide; *p* parenchima cellulare verde.

Fig. 7.ª — Brandello di cuticola mostrante, anche dopo protratta bollitura negli acidi, l'impronta delle cellule dermatiche. Da esso pendono due cistomi *ll*, uno intiero e ramoso, l'altro reciso.

Fig. 8.ª — Pelo glandoloso del *Croton penicillatum,* Vent. Ha per tutta la sua lunghezza un fascetto vascolare *v*, il quale s'ingrossa all'apice e si sfiocca in mezzo ad un tenue tessuto cellulare *n*. A questo succede un ordine di cellule speciali *s*, le quali costituiscono il corpo della glandola, e sono rivestite di cuticola; *x* dinota la parte verticale di esso pelo. Tutto l'organo è rappresentato in sezione longitudinale.

CONTENUTO DELLA MEMORIA

RICERCHE PRELIMINARI

PARTE PRIMA

Gli stomi ed i cistomi in diverse specie vengono esaminati dal lato anatomico e microchimico.

PARTE SECONDA

Sulla distribuzione degli stomi e sui loro rapporti con organi glandolari diversi.

STOMI IN RAPPORTO AD ORGANI FIORALI

STOMI IN RAPPORTO AD ORGANI GLANDOLARI DIVERSI

DIVERSE SPECIE DI GLANDOLE STOMATIFERE

SOPRA ALCUNE ALTRE GLANDOLE PARTICOLARI

PARTE TERZA

Glandole calcifere

D'UN ALTRO TIPO DI GLANDOLE CALCIFERE

finita stampare il dì 6 maggio 1879

Licopoli dis.

Richter & C. Napoli

L'Autore dis.

Richter & C. Napoli

Licopoli dis.

Richter e C. Napoli

Licopoli dis. Lit. Richter & C. Napoli.

Licopoli dis. Lit. Richter & C. Napoli

Licopoli dis. Richter & C. Napoli

Liepoli dis.

Lit. R. ... Napoli

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SUI CONNESSI TERNARII DI 2° ORDINE E DI 2ª CLASSE IN INVOLUZIONE SEMPLICE

NOTA

del Socio Ordinario G. BATTAGLINI

Letta nell'Adunanza del dì 12 Luglio 1879.

Oggetto di questa breve Nota è la discussione di un caso speciale del connesso di punti e di rette di 2° ordine e di 2ª classe.

1. Essendo v_i e V_i $(i=1\,,2\,,3)$ le coordinate di un punto V e di una retta v rispetto ad una terna fondamentale di rette e di punti, se si pone

$$\Phi_{rs}=\Sigma_i\Sigma_j U_{ij\,.\,rs}v_iv_j \quad , \quad \varphi_{rs}=\Sigma_i\Sigma_j u_{ij\,.\,rs}V_iV_j\,,$$

$$(i\,,j=1,2,3) \quad ; \quad U_{rs\,.\,ij}=u_{ij\,.\,rs} \quad ; \quad (r\,,s=1,2,3)\,,$$

l'equazione generale di un connesso ternario (di punti e di rette) di 2° ordine e di 2ª classe, sarà

$$(\Phi\varphi)=\Sigma_r\Sigma_s\Phi_{rs}V_rV_s=\Sigma_r\Sigma_s\varphi_{rs}v_rv_s=0\,.$$

Il caso più semplice del connesso si ha quando coincidono tra loro tutte e sei le linee di 2° ordine Φ_{rs}, o pure tutte e sei le linee di 2ª classe φ_{rs}; ponendo allora

$$\Phi_{rs}=u_{rs}\Phi\,, \quad \text{o pure} \quad \varphi_{rs}=U_{rs}\varphi\,,$$

$$\Phi=\Sigma_r\Sigma_s U_{rs}v_rv_s \quad , \quad \varphi=\Sigma_r\Sigma_s u_{rs}V_rV_s\,,$$

onde

$$u_{rs}U_{ij}=U_{ij\,.\,rs} \quad , \quad U_{rs}u_{ij}=u_{ij\,.\,rs}\,,$$

l'equazione del connesso diverrà $(\Phi\varphi)=\Phi\varphi=0$: in tal caso nel connesso la linea di 2ª classe corrispondente ad un punto qualunque V del piano sarà la linea φ, e la linea di 2° ordine corrispondente ad una retta qualunque v del piano sarà la linea Φ, sicchè

saranno *elementi* del connesso un punto arbitrario di Φ con una retta qualunque del piano, ed una retta arbitraria di φ con un punto qualunque del piano. Il connesso si dirà allora in *involuzione identica*.

Supponiamo ora che tutte le linee Φ_{rs}, o pure tutte le linee φ_{rs}, siano in *involuzione semplice* [formino una serie semplice di 1° grado (un fascio) di linee di 2° ordine, o una serie semplice di 1° grado (una schiera) di linee di 2ª classe]; essendo allora (Φ_a, Φ_b), o pure (φ_A, φ_B), due linee di 2° ordine, o di 2ª classe, che determinano l'involuzione, si dovrà supporre

$$\Phi_{rs} = a_{rs}\Phi_a + b_{rs}\Phi_b, \qquad \text{o pure} \qquad \varphi_{rs} = A_{rs}\varphi_A + B_{rs}\varphi_B,$$

sicchè ponendo

$$\Phi_a = \Sigma_r\Sigma_s A_{rs} v_r v_s \quad , \quad \Phi_b = \Sigma_r\Sigma_s B_{rs} v_r v_s \quad ; \quad \varphi_A = \Sigma_r\Sigma_s a_{rs} V_r V_s \quad , \quad \varphi_B = \Sigma_r\Sigma_s b_{rs} V_r V_s,$$

onde

$$a_{rs}A_{ij} + b_{rs}B_{ij} = U_{ij,rs} \quad , \quad A_{rs}a_{ij} + B_{rs}b_{ij} = u_{ij,rs},$$

l'equazione del connesso diverrà

$$(\Phi\varphi) = \Phi_a\varphi_A + \Phi_b\varphi_B = 0 . \tag{1}$$

Diremo allora che il connesso è in *involuzione semplice*.

Ponendo con

$$Aa + Bb = 0,$$

$$\Phi_{ab} = a\Phi_a + b\Phi_b = 0 \quad , \quad \varphi_{AB} = A\varphi_A + B\varphi_B = 0,$$

si vedrà che se il punto V appartiene alla linea Φ_{ab} dell'involuzione (Φ_a, Φ_b), la linea corrispondente di 2ª classe nel connesso $(\Phi\varphi)$ sarà la linea φ_{AB} dell'involuzione (φ_A, φ_B), e viceversa se la retta v appartiene alla linea φ_{AB} dell'involuzione (φ_A, φ_B), la linea corrispondente di 2° ordine nel connesso $(\Phi\varphi)$ sarà la linea Φ_{ab} dell'involuzione (Φ_a, Φ_b); diremo Φ_{ab} e φ_{AB} linee corrispondenti (l'una di 2° ordine, l'altra di 2ª classe) del connesso; esse sono in dipendenza proiettiva nelle serie (Φ_a, Φ_b), (φ_A, φ_B), ed in questa dipendenza a Φ_a corrisponde φ_B, ed a Φ_b corrisponde φ_A. Adunque *in un connesso di 2° ordine e di 2ª classe $(\Phi\varphi)$ in involuzione semplice, le linee di 2ª classe φ corrispondenti ai diversi punti V del piano hanno tutte quattro tangenti comuni, e le linee di 2° ordine Φ corrispondenti alle diverse rette v del piano hanno tutte quattro punti comuni; per tutt' i punti V appartenenti ad una delle Φ si ha una stessa linea corrispondente φ, e viceversa per tutte le rette v appartenenti ad una delle φ si ha una stessa linea corrispondente Φ; queste linee corrispondenti Φ e φ sono (nelle serie cui appartengono) in dipendenza proiettiva.*

Per ciascuno dei quattro punti V comuni alle Φ, o per ciascuna delle quattro rette v comuni alle φ, la linea corrispondente φ o Φ è indeterminata.

Essendo

$$\Phi = (U_1v_1 + U_2v_2 + U_3v_3)^2 = (Uv)^2 = 0, \qquad \text{e} \qquad \varphi = (u_1V_1 + u_2V_2 + u_3V_3)^2 = (uV)^2 = 0,$$

le equazioni, in notazione ombrale, di una linea di 2° ordine Φ e di una linea di 2ª classe φ, è noto che se a Φ può appartenere una terna di punti V coniugata a φ (e quindi infinite terne analoghe), o ciò che vale lo stesso se a φ può appartenere una terna di rette v coniugata a Φ (e quindi infinite terne analoghe) si annullerà l'invariante espresso simbolicamente da $(U_1 u_1 + U_2 u_2 + U_3 u_3)^2 = (Uu)^2$, o sia si avrà tra i coefficienti effettivi U_{ij} ed u_{ij} di Φ e φ la relazione $\Sigma\Sigma\, U_{ij} u_{ij} = 0$; si dice allora che le linee Φ e φ sono *armoniche* fra loro. Ciò posto consideriamo nell'involuzione delle Φ, e nell'involuzione delle φ, rispettivamente una linea $\Phi_{a'b'}$ ed una linea $\varphi_{A''B''}$ che siano armoniche fra loro; si avrà la condizione

$$\Sigma\Sigma (a'A_{ij} + b'B_{ij})(A''a_{ij} + B''b_{ij}) = 0 ,$$

o sia

$$a'A''(Aa)^2 + a'B''(Ab)^2 + b'A''(Ba)^2 + b'B''(Bb)^2 = 0 , \tag{2}$$

sicchè ad ogni linea di 2° ordine nell'involuzione delle Φ corrisponde una linea di 2ª classe nell'involuzione delle φ che le è armonica, e viceversa; queste linee armoniche corrispondenti $\Phi_{a'b'}$ e $\varphi_{A''B''}$ sono (nelle involuzioni cui appartengono) nella dipendenza proiettiva espressa dall'equazione (2).

Siano nel connesso $(\Phi\varphi)$ $\Phi_{a''b''}$ e $\varphi_{A'B'}$ le linee che corrispondono rispettivamente alle linee $\varphi_{A''B''}$ e $\Phi_{a'b'}$; essendo $A'a' + B'b' = 0$, ed $A''a'' + B''b'' = 0$, potrà supporsi $a' = B'$, $b' = -A'$, $a'' = B''$, $b'' = -A''$, con ciò l'equazione (2) prenderà una delle forme seguenti:

$$\begin{aligned} a'a''(Ab)^2 - b'b''(Ba)^2 &= a'b''(Aa)^2 - b'a''(Bb)^2 , \\ A'A''(aB)^2 - B'B''(bA)^2 &= B'A''(aA)^2 - A'B''(bB)^2 . \end{aligned} \tag{3}$$

Queste equazioni dimostrano che sono in dipendenza proiettiva nella involuzione delle Φ le $\Phi_{a'b'}$ e $\Phi_{a''b''}$, e nella involuzione delle φ le $\varphi_{A'B'}$ e $\varphi_{A''B''}$: se in queste dipendenze proiettive le $\Phi_{a'b'}$ e $\Phi_{a''b''}$ coincidono con la stessa Φ_{ab}, e quindi le $\Phi_{A'B'}$ e $\Phi_{A''B''}$ coincidono con la stessa φ_{AB}, le equazioni (3) daranno le condizioni

$$\begin{aligned} a^2(Ab)^2 - b^2(Ba)^2 &= ab[(Aa)^2 - (Bb)^2] , \\ A^2(aB)^2 - B^2(bA)^2 &= AB[(aA)^2 - (bB)^2] ; \end{aligned} \tag{4}$$

i valori di $a : b$ e di $A : B$ ricavati da queste equazioni determineranno evidentemente due coppie di linee corrispondenti Φ_{ab} e φ_{AB} nel connesso $(\Phi\varphi)$ che saranno armoniche fra loro. Adunque *nel connesso di 2° ordine e di 2ª classe* $(\Phi\varphi)$ *in involuzione semplice vi sono due coppie (reali, coincidenti, o immaginarie) di linee corrispondenti* Φ *e* φ *che sono armoniche fra loro.*

Le linee $\Phi_{a'b'}$, $\varphi_{A''B''}$ sono linee corrispondenti nel connesso di 2° ordine e di 2ª classe, in involuzione semplice, rappresentato dall'equazione

$$\Phi_a\varphi_A(Bb)^2 - \Phi_a\varphi_B(Ba)^2 + \Phi_b\varphi_B(Aa)^2 - \Phi_b\varphi_A(Ab)^2 = 0 , \tag{5}$$

e le linee $\Phi_{a''b''}$, $\varphi_{A'B'}$ sono linee corrispondenti nel connesso di 2° ordine e di 2ª classe, in involuzione semplice, rappresentato dall'equazione

$$(6) \qquad \Phi_a \varphi_A (Aa)^2 + \Phi_a \varphi_B (Ba)^2 + \Phi_b \varphi_B (Bb)^2 + \Phi_b \varphi_A (Ab)^2 = 0 :$$

per ogni elemento (V, v), di punto e retta, appartenente al connesso (5) le linee φ e Φ, alle quali nel connesso $(\Phi\varphi)$ appartengono rispettivamente il punto V e la retta v, sono armoniche fra loro; e per ogni elemento (V, v), di punto e retta, che appartiene al connesso (6) le linee φ e Φ, che nel connesso $(\Phi\varphi)$ corrispondono rispettivamente al punto V ed alla retta v, sono armoniche fra loro. Diremo (5) il connesso delle *linee armoniche* di $(\Phi\varphi)$, e (6) il connesso *associato* a $(\Phi\varphi)$.

Siano $(\Phi_{\mathbf{a}}, \varphi_{\mathbf{B}})$ e $(\Phi_{\mathbf{b}}, \varphi_{\mathbf{A}})$ le coppie delle linee corrispondenti del connesso $(\Phi\varphi)$ armoniche fra loro; indicando con $a_{\mathbf{a}} : b_{\mathbf{a}}$ ed $a_{\mathbf{b}} : b_{\mathbf{b}}$, o pure con $A_{\mathbf{A}} : B_{\mathbf{A}}$ ed $A_{\mathbf{B}} : B_{\mathbf{B}}$ i due valori di $a : b$, o di $A : B$, tratti dalle equazioni (4), si avrà

$$\Phi_{\mathbf{a}} = a_{\mathbf{a}} \Phi_a + b_{\mathbf{a}} \Phi_b \quad , \quad \Phi_{\mathbf{b}} = a_{\mathbf{b}} \Phi_a + b_{\mathbf{b}} \Phi_b ,$$

$$\varphi_{\mathbf{A}} = A_{\mathbf{A}} \varphi_A + B_{\mathbf{A}} \varphi_B \quad , \quad \varphi_{\mathbf{B}} = A_{\mathbf{B}} \varphi_A + B_{\mathbf{B}} \varphi_B ,$$

con le condizioni

$$(7) \qquad A_{\mathbf{B}} a_{\mathbf{a}} + B_{\mathbf{B}} b_{\mathbf{a}} = 0 \quad , \quad A_{\mathbf{A}} a_{\mathbf{b}} + B_{\mathbf{A}} b_{\mathbf{b}} = 0 ,$$

onde

$$(8) \qquad \begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= a_{\mathbf{a}} A_{ij} + b_{\mathbf{a}} B_{ij} \quad , \quad \mathbf{B}_{ij} = a_{\mathbf{b}} A_{ij} + b_{\mathbf{b}} B_{ij} , \\ \mathbf{a}_{ij} &= A_{\mathbf{A}} a_{ij} + B_{\mathbf{A}} b_{ij} \quad , \quad \mathbf{b}_{ij} = A_{\mathbf{B}} a_{ij} + B_{\mathbf{B}} b_{ij} . \end{aligned}$$

Ora si sostituiscano nelle formole (1), (2), (3), (4) a tutte le lettere a, b, A, B rispettivamente le $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, il che equivale a prendere per linee di 2° ordine e di 2ª classe che definiscono le involuzioni delle Φ, o delle φ, le $(\Phi_{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{b}})$ invece delle (Φ_a, Φ_b), o le $(\varphi_{\mathbf{A}}, \varphi_{\mathbf{B}})$ invece delle (φ_A, φ_B): le nuove equazioni (4) dovendo essere allora soddisfatte da $\mathbf{b} = 0$, ed $\mathbf{a} = 0$, o pure da $\mathbf{A} = 0$, e $\mathbf{B} = 0$, si avrà $(\mathbf{Ab})^2 = (\mathbf{bA})^2 = 0$, e $(\mathbf{Ba})^2 = (\mathbf{aB})^2 = 0$, e ciò condurrà, per le relazioni (8), con le condizioni (7), alle equazioni che esprimono essere $a_{\mathbf{a}} : b_{\mathbf{a}}$ ed $a_{\mathbf{b}} : b_{\mathbf{b}}$, o pure $A_{\mathbf{B}} : B_{\mathbf{B}}$ ed $A_{\mathbf{A}} : B_{\mathbf{A}}$, radici delle equazioni (4); le nuove equazioni (3) saranno poi

$$\mathbf{a}'\mathbf{b}''(\mathbf{Aa})^2 - \mathbf{b}'\mathbf{a}''(\mathbf{Bb})^2 = 0 \quad , \quad \mathbf{B}'\mathbf{A}''(\mathbf{aA})^2 - \mathbf{A}'\mathbf{B}''(\mathbf{bB})^2 = 0 ,$$

e si troverà

$$(\mathbf{Aa})^2 = a_{\mathbf{a}} A_{\mathbf{A}} (Aa)^2 + a_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{A}} (Ab)^2 + b_{\mathbf{a}} A_{\mathbf{A}} (Ba)^2 + b_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{A}} (Bb)^2 = (\mathbf{aA})^2 ,$$

$$(\mathbf{Bb})^2 = a_{\mathbf{b}} A_{\mathbf{B}} (Aa)^2 + a_{\mathbf{b}} B_{\mathbf{B}} (Ab)^2 + b_{\mathbf{b}} A_{\mathbf{B}} (Ba)^2 + b_{\mathbf{b}} B_{\mathbf{B}} (Bb)^2 = (\mathbf{bB})^2 ,$$

sicchè tenendo presenti le condizioni (7), e le relazioni fra le radici delle equazioni (4) ed i loro coefficienti, se si pone

$$(\mathrm{A}a)^2+(\mathrm{B}b)^2=(\mathrm{H}h) \quad , \quad (\mathrm{A}a)^2(\mathrm{B}b)^2-(\mathrm{A}b)^2(\mathrm{B}a)^2=(\mathrm{K}k) ,$$

si troverà facilmente

$$(9) \qquad \frac{(\mathrm{Aa})^2}{(\mathrm{Bb})^2}=\frac{(\mathrm{H}h)+\sqrt{(\mathrm{H}h)^2-4(\mathrm{K}k)}}{(\mathrm{H}h)-\sqrt{(\mathrm{H}h)^2-4(\mathrm{K}k)}}=\frac{(\mathrm{aA})^2}{(\mathrm{bB})^2} .$$

Indicando questo rapporto con $k=\mathrm{K}$ si avrà dunque

$$\frac{\mathrm{a}''}{\mathrm{b}''}=k\frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{b}'} \quad , \quad \frac{\mathrm{B}''}{\mathrm{A}''}=\mathrm{K}\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'} ,$$

sicchè deducendo successivamente ciascuna delle linee

$$\Phi_{\mathrm{a}'\mathrm{b}'} , \Phi_{\mathrm{a}''\mathrm{b}''} \cdots \Phi_{\mathrm{a}^{(n)}\mathrm{b}^{(n)}} , \qquad \text{o} \qquad \varphi_{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} , \varphi_{\mathrm{A}''\mathrm{B}''} \cdots \varphi_{\mathrm{A}^{(n)}\mathrm{B}^{(n)}} ,$$

dalla precedente con la condizione

$$\frac{\mathrm{a}^{(m)}}{\mathrm{b}^{(m)}}=k\frac{\mathrm{a}^{(m-1)}}{\mathrm{b}^{(m-1)}} \quad , \quad \frac{\mathrm{B}^{(m)}}{\mathrm{A}^{(m)}}=\mathrm{K}\frac{\mathrm{B}^{(m-1)}}{\mathrm{A}^{(m-1)}} ,$$

se si suppone $k^n=\mathrm{K}^n=1$, la linea $\Phi_{\mathrm{a}^{(n+1)}\mathrm{b}^{(n+1)}}$ coinciderà con $\Phi_{\mathrm{a}'\mathrm{b}'}$, e la linea $\varphi_{\mathrm{A}^{(n+1)}\mathrm{B}^{(n+1)}}$ coinciderà con $\varphi_{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$; in tal caso il connesso $(\Phi\varphi)$ si dirà *ciclicamente proiettivo* secondo n, o in involuzione di *grado n*. Adunque *se il connesso di 2° ordine e di 2ª classe* $(\Phi\varphi)$ *è in involuzione di grado* n, *prendendo una linea qualunque* $\Phi_{\mathrm{a}'\mathrm{b}'}$ *del connesso, nell' involuzione delle* Φ, *di questa la linea armonica* $\varphi_{\mathrm{A}''\mathrm{B}''}$, *nell' involuzione delle* φ, *di questa la linea corrispondente* $\Phi_{\mathrm{a}''\mathrm{b}''}$ *del connesso, nell' involuzione delle* Φ, *e così per* n *volte di seguito, la linea* $\Phi_{\mathrm{a}^{(n+1)}\mathrm{b}^{(n+1)}}$ *coinciderà con la linea* $\Phi_{\mathrm{a}'\mathrm{b}'}$; *ed analogamente se si opera incominciando da una linea* $\varphi_{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$ *del connesso nell' involuzione delle* φ.

Se $n=1$, nel connesso $(\Phi\varphi)$ ogni linea Φ_{ab} sarà armonica con la sua linea corrispondente φ_{AB}; in tal caso, per le equazioni (4), si avranno le condizioni $(\mathrm{A}b)^2=0$, $(\mathrm{B}a)^2=0$, $(\mathrm{A}a)^2=(\mathrm{B}b)^2$. Per $n=2$ si avrà poi la condizione $(\mathrm{A}a)^2+(\mathrm{B}b)^2=0$.

Le nuove equazioni dei connessi (1), (5), e (6) essendo

$$(10) \qquad \begin{gathered} \Phi_{\mathrm{a}}\varphi_{\mathrm{A}}+\Phi_{\mathrm{b}}\varphi_{\mathrm{B}}=0 , \\ \Phi_{\mathrm{a}}\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{Bb})^2+\Phi_{\mathrm{b}}\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{Aa})^2=0 \quad , \quad \Phi_{\mathrm{a}}\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{Aa})^2+\Phi_{\mathrm{b}}\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{Bb})^2=0 , \end{gathered}$$

se si applicano ad essi le nuove equazioni (4), e si osserva che si ha $(\mathrm{Ab})^2=(\mathrm{bA})^2=0$, $(\mathrm{Ba})^2=(\mathrm{aB})^2=0$, si vedrà che le linee corrispondenti armoniche fra loro saranno, per il secondo di quei connessi, tutte le linee corrispondenti (come del resto è chiaro per la definizione di questo connesso), e per il primo ed il terzo saranno le stesse

coppie (Φ_a, φ_B) e (Φ_b, φ_A); inoltre se il primo di quei connessi è ciclicamente proiettivo, lo sarà ancora il terzo, mentre il secondo è evidentemente ciclicamente proiettivo secondo 1. Se si pone la condizione

$$(Kk) = (Aa)^2 (Bb)^2 - (Ab)^2 (Ba)^2 = 0 ,$$

il che conduce ad $(\mathbf{Aa})^2 = 0$, o pure a $(\mathbf{Bb})^2 = 0$, secondo il segno che nella formola (9) si dà al radicale, le equazioni del secondo e del terzo dei connessi (10) si ridurranno a $\Phi_a \varphi_A = 0$, e $\Phi_b \varphi_B = 0$, o pure $\Phi_b \varphi_B = 0$, e $\Phi_a \varphi_A = 0$, sicchè in tal caso quei connessi saranno in involuzione identica; sarà allora Φ_a, o pure Φ_b, armonica con una qualunque delle φ, e φ_A, o pure φ_B, armonica con una qualunque delle Φ.

Se le due radici nelle equazioni (4) sono eguali fra loro, le due coppie di linee corrispondenti Φ e φ, del connesso $(\Phi\varphi)$, armoniche fra loro coincideranno in una sola: in tal caso supporremo che con questa coppia coincida la coppia (Φ_a, φ_B), o pure la coppia (Φ_b, φ_A), essendo (Φ_b, φ_A), o pure (Φ_a, φ_B), un' altra coppia qualunque di linee corrispondenti Φ e φ del connesso; le nuove equazioni (4) dovranno allora ridursi a $\mathbf{b}^2 = 0$, $\mathbf{A}^2 = 0$, o pure $\mathbf{a}^2 = 0$, $\mathbf{B}^2 = 0$, onde le condizioni

$$(\mathbf{Aa})^2 = (\mathbf{Bb})^2 \quad \text{ed} \quad (\mathbf{Ab})^2 = 0 , \quad \text{o pure} \quad (\mathbf{Ba})^2 = 0 .$$

Con ciò le nuove equazioni (3) daranno

$$\frac{\mathbf{a}''}{\mathbf{b}''} - \frac{\mathbf{a}'}{\mathbf{b}'} = \frac{(\mathbf{Ba})^2}{(\mathbf{Bb})^2} , \quad \frac{\mathbf{B}'}{\mathbf{A}'} - \frac{\mathbf{B}''}{\mathbf{A}''} = \frac{(\mathbf{aB})^2}{(\mathbf{bB})^2} ,$$

o pure

$$\frac{\mathbf{b}''}{\mathbf{a}''} - \frac{\mathbf{b}'}{\mathbf{a}'} = \frac{(\mathbf{Ab})^2}{(\mathbf{Aa})^2} , \quad \frac{\mathbf{A}'}{\mathbf{B}'} - \frac{\mathbf{A}''}{\mathbf{B}''} = \frac{(\mathbf{bA})^2}{(\mathbf{aA})^2} ,$$

dalle quali apparisce chiaramente che in tal caso il connesso $(\Phi\varphi)$ non può essere mai ciclicamente proiettivo.

2. Cerchiamo nel conneso $(\Phi\varphi)$ le coppie di linee corrispondenti $(\Phi_{ab}, \varphi_{AB})$ per le quali la linea di 2° ordine $\Phi_{a'b'}$ si riduce ad una coppia di rette, o pure la linea di 2ª classe $\varphi_{A''B''}$ si riduce ad una coppia di punti (coppie *singolari* del connesso): indicando con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ le ombre nelle equazioni di Φ_a e Φ_b in coordinate di rette, e con $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ le ombre nelle equazioni di φ_A e φ_B in coordinate di punti, la condizione che per le coppie singolari $(\Phi_{ab}, \varphi_{AB})$ si annulli il discriminante di $\Phi_{a'b'}$ o di $\varphi_{A''B''}$ condurrà all'una o all' altra delle equazioni

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta_{a'b'} &= a'^3 (Aa)^2 + 3a'^2 b' (Ba)^2 + 3a' b'^2 (Ab)^2 + b'^3 (Bb)^2 = 0 , \\ \delta_{A''B''} &= A''^3 (a\mathbf{A})^2 + 3A''^2 B'' (b\mathbf{A})^2 + 3A'' B''^2 (a\mathbf{B})^2 + B''^3 (b\mathbf{B})^2 = 0 . \end{aligned}$$

Siano $a'_1 : b'_1$, $a'_2 : b'_2$, $a'_3 : b'_3$, o $A''_1 : B''_1$, $A''_2 : B''_2$, $A''_3 : B''_3$ le tre radici $a' : b'$, o $A'' : B''$, della prima, o della seconda, di queste equazioni; saranno $\Phi_{a'_1 b'_1}$, $\Phi_{a'_2 b'_2}$, $\Phi_{a'_3 b'_3}$ le linee di

2° ordine che nell'involuzione delle Φ si riducono a coppie di rette, e $\varphi_{A''_1 B''_1}$, $\varphi_{A''_2 B''_2}$, $\varphi_{A''_3 B''_3}$ le linee di 2^{a} classe che nell' involuzione delle φ si riducono a coppie di punti; essendo $\varphi_{A'_1 B'_1}$, $\varphi_{A'_2 B'_2}$, $\varphi_{A'_3 B'_3}$, o $\Phi_{a''_1 b''_1}$, $\Phi_{a''_2 b''_2}$, $\Phi_{a''_3 b''_3}$, le linee di 2^{a} classe, o di 2° ordine, che ad esse corrispondono rispettivamente nel connesso $(\Phi\varphi)$, saranno $A'_1 : B'_1$, $A'_2 : B'_2$, $A'_3 : B'_3$, o $a''_1 : b''_1$, $a''_2 : b''_2$, $a''_3 : b''_3$, le tre radici $A' : B'$, o $a'' : b''$, della prima, o della seconda, delle equazioni

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
\delta_{A'B'} &= A'^3 (Bb)^2 - 3A'^2 B' (Ab)^2 + 3A' B'^2 (Ba)^2 - B'^3 (Aa)^2 = 0 , \\
\Delta_{a''b''} &= a''^3 (b\mathbf{B})^2 - 3a''^2 b'' (a\mathbf{B})^2 + 3a'' b''^2 (b\mathbf{A})^2 - b''^3 (a\mathbf{A})^2 = 0 .
\end{aligned}
$$

Adunque *nel connesso* $(\Phi\varphi)$ *di* 2° *ordine e di* 2^{a} *classe, in involuzione semplice, i punti* V, *per i quali la linea corrispondente di* 2^{a} *classe* φ *si riduce ad una coppia di punti, costituiscono una linea di* 6° *ordine (la locale* singolare *del connesso) decomponibile in tre linee di* 2° *ordine* $(\Phi_{a'_1 b''_1}, \Phi_{a''_2 b''_2}, \Phi_{a''_3 b''_3})$ *appartenenti all' involuzione delle* Φ, *e tutte quelle coppie di punti coincidono con le tre coppie di punti* $(\varphi_{A''_1 B''_1}, \varphi_{A''_2 B''_2}, \varphi_{A''_3 B''_3})$ *che appartengono all' involuzione delle* φ; *analogamente le rette* v, *per le quali la linea corrispondente di* 2° *ordine* Φ *si riduce ad una coppia di rette, costituiscono una linea di* 6^{a} *classe (l'inviluppo* singolare *del connesso) decomponibile in tre linee di* 2^{a} *classe* $(\varphi_{A'_1 B'_1}$, $\varphi_{A'_2 B'_2}$, $\varphi_{A'_3 B'_3})$ *appartenenti all' involuzione delle* φ, *e tutte quelle coppie di rette coincidono con le tre coppie di rette* $(\Phi_{a'_1 b'_1}, \Phi_{a'_2 b'_2}, \Phi_{a'_3 b'_3})$ *che appartengono all' involuzione delle* Φ.

Se la coppia di equazioni $\Delta_{a'b'} = 0$, $\Delta_{a''b''} = 0$, ammette una radice comune $a : b$, anche la coppia di equazioni $\delta_{A'B'} = 0$, $\delta_{A''B''} = 0$, ammetterà una radice comune $A : B$, legata con la prima dalla relazione $Aa + Bb = 0$; allora le linee Φ_{ab} e φ_{AB}, determinate rispettivamente, nell' involuzione delle Φ e nell' involuzione delle φ, da quelle radici comuni $a : b$, ed $A : B$, saranno ad un tempo linee singolari, e linee corrispondenti del connesso $(\Phi\varphi)$; la coppia di linee corrispondenti $(\Phi_{ab}, \varphi_{AB})$ del connesso, presenterà quindi la doppia singolarità di avere ridotta Φ_{ab} ad una coppia di rette, e φ_{AB} ad una coppia di punti: analogamente se quelle coppie di equazioni hanno una seconda, o anche la terza, radice comune; in quest' ultimo caso i coefficienti dell' equazione del connesso $(\Phi\varphi)$ dovranno soddisfare alle condizioni

$$
\frac{(Aa)^2}{(b\mathbf{B})^2} = - \frac{(Ba)^2}{(a\mathbf{B})^2} = \frac{(Ab)^2}{(b\mathbf{A})^2} = - \frac{(Bb)^2}{(a\mathbf{A})^2} .
$$

Indichiamo con W uno qualunque dei quattro punti comuni a tutte le linee di 2° ordine Φ, e con v la tangente di una delle Φ in quel punto; con w una qualunque delle quattro tangenti comuni a tutte le linee di 2^{a} classe φ, e con V il punto di contatto di una delle φ [quella che nel connesso $(\Phi\varphi)$ corrisponde a (Φ)] con quella tangente: siano (v'_1, v'_2, v'_3) e (V''_1, V''_2, V''_3) le posizioni di v e di V allorchè Φ e φ sono le linee singolari Φ' e φ'' del connesso $(\Phi\varphi)$; (v''_1, v''_2, v''_3) e (V'_1, V'_2, V'_3) le posizioni di v e di V allorchè Φ e φ sono le linee Φ'' e φ' che nel connesso $(\Phi\varphi)$ corrispondono rispettivamente alle linee φ'' e Φ'. Il gruppo di rette $(v, v'_1, v'_2, v'_3, v''_1, v''_2, v''_3)$ sarà pro-

iettivo al gruppo di punti $(V, V'_1, V'_2, V'_3, V''_1, V''_2, V''_3)$: i valori del parametro $a:b$ che determinano nel primo gruppo le posizioni delle rette (v'_1, v'_2, v'_3), o delle rette (v''_1, v''_2, v''_3), rispetto alle tangenti v in W alle due linee di 2° ordine Φ_a e Φ_b, sono le radici dell'equazione $\Delta_{a'b'}=0$, o $\Delta_{a''b''}=0$; ed i valori del parametro A : B che determinano nel secondo gruppo le posizioni dei punti (V'_1, V'_2, V'_3), o dei punti (V''_1, V''_2, V''_3), rispetto ai punti di contatto V di w con le due linee di 2ª classe φ_A e φ_B, sono le radici dell'equazione $\delta_{A'B'}=0$, o $\delta_{A''B''}=0$. Se Φ è una delle tre linee *armoniche*, o pure è una delle due linee *equianarmoniche*, appartenenti all'involuzione (Φ_a, Φ_b) (vale a dire una linea Φ per la quale il gruppo delle rette che congiungono un suo punto qualunque con i quattro suoi punti fissi W è un gruppo armonico, o pure è un gruppo equianarmonico) la sua tangente v in W determinerà con le tre rette (v'_1, v'_2, v'_3) un gruppo armonico, o pure un gruppo equianarmonico, e quindi (per le note proprietà delle forme binarie cubiche) il parametro $a:b$ che la determina annullerà il covariante cubico della forma binaria cubica $\Delta_{a'b'}$, o pure annullerà il suo Hessiano; allora la linea φ, che nel connesso $(\Phi\varphi)$ corrisponde a Φ, toccherà la retta w in un punto V determinato dal parametro A : B che annulla il covariante cubico di $\delta_{A'B'}$, o pure annulla il suo Hessiano. Analogamente se φ è una delle tre linee *armoniche*, o pure è una delle due linee *equianarmoniche* appartenenti all'involuzione (φ_A, φ_B) (vale a dire una linea φ per la quale il gruppo dei quattro punti d'incontro di una sua tangente qualunque con le quattro sue tangenti fisse w è un gruppo armonico, o pure è un gruppo equianarmonico) il suo punto di contatto V con w determinerà con i tre punti (V''_1, V''_2, V''_3) un gruppo armonico, o pure un gruppo equianarmonico, e quindi (per le note proprietà delle forme binarie cubiche) il parametro A : B che lo determina, annullerà il covariante cubico della forma binaria cubica $\delta_{A''B''}$, o pure annullerà il suo Hessiano; allora la linea Φ, che nel connesso $(\Phi\varphi)$ corrisponde a φ, avrà per tangente in W una retta v determinata dal parametro $a:b$ che annulla il covariante cubico di $\Delta_{a''b''}$, o pure annulla il suo Hessiano.

Consideriamo le linee corrispondenti Φ_{ab} e φ_{AB} del connesso $(\Phi\varphi)$ rappresentate dalle equazioni

$$\text{(3)}\qquad \Phi_{ab} = a(Av)^2 + b(Bv^2) = 0 \quad , \quad \varphi_{AB} = A(aV)^2 + B(bV)^2 = 0 \,,$$

con

$$Aa + Bb = 0 \,.$$

Ponendo simbolicamente

$$A_2B_3 - A_3B_1 = \mathbf{c}_1 \quad , \quad A_3B_1 - A_1B_3 = \mathbf{c}_2 \quad , \quad A_1B_2 - A_2B_1 = \mathbf{c}_3 \,,$$

$$a_2b_3 - a_3b_1 = \mathbf{C}_1 \quad , \quad a_3b_1 - a_1b_3 = \mathbf{C}_2 \quad , \quad a_1b_2 - a_2b_1 = \mathbf{C}_3 \,,$$

le equazioni di Φ_{ab} in coordinate di rette, e di φ_{AB} in coordinate di punti saranno rispettivamente

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned} &a^2(\mathbf{a}V)^2 + 2ab(\mathbf{c}V)^2 + b^2(\mathbf{b}V)^2 = 0 \,, \\ &A^2(\mathbf{A}v)^2 + 2AB(\mathbf{C}v)^2 + B^2(\mathbf{B}v)^2 = 0 \,, \end{aligned}$$

ed eliminando $a:b$ ed A : B tra queste equazioni e la terza delle (3) si avrà l'equazione

$$(5)\qquad \begin{aligned}(\Theta\theta) = [&(\mathbf{A}v)^2(\mathbf{a}V)^2 + 2(\mathbf{C}v)^2(\mathbf{c}V)^2 + (\mathbf{B}v)^2(\mathbf{b}V)^2] \\ &- 4[(\mathbf{A}v)^2(\mathbf{B}v)^2 - (\mathbf{C}v)^2(\mathbf{C}v)^2][(\mathbf{a}V)^2(\mathbf{b}V)^2 - (\mathbf{c}V)^2(\mathbf{c}V)^2] = 0\,,\end{aligned}$$

la quale rappresenta un connesso $(\Theta\theta)$ di 4^o ordine e di 4^a classe; nel connesso $(\Theta\theta)$ ad una retta qualunque v del piano, corrisponde una linea di 4^o ordine decomponibile in due linee di 2^o ordine, le quali sono, in coordinate di punti, le due linee appartenenti all'involuzione delle φ, che nel connesso $(\Phi\varphi)$ corrispondono alle due linee appartenenti all'involuzione delle Φ che toccano la retta v; analogamente nel connesso $(\Theta\theta)$ ad un punto qualunque V del piano, corrisponde una linea di 4^a classe decomponibile in due linee di 2^a classe, le quali sono, in coordinate di rette, le due linee appartenenti all'involuzione delle Φ che nel connesso $(\Phi\varphi)$ corrispondono alle due linee appartenenti all'involuzione delle φ che passano pel punto V.

Le coppie di tangenti condotte da un punto X a tutte le linee di 2^a classe che nel connesso $(\Phi\varphi)$ corrispondono ai diversi punti V del piano, o sia a tutte le linee appartenenti all' involuzione delle φ, saranno rette appartenenti ad una *coincidenza* del connesso; il luogo dei punti di contatto V delle φ con queste coppie di tangenti si otterrà eliminando A : B fra le equazioni

$$\mathrm{A}(axv)^2 + \mathrm{B}(bxv)^2 = 0\,, \qquad \text{ed} \qquad \mathrm{A}^2(\mathbf{A}v)^2 + 2\mathrm{AB}(\mathbf{C}v)^2 + \mathrm{B}^2(\mathbf{B}v)^2 = 0\,;$$

si perviene così all'equazione di 6^o grado in v_i

$$(6)\qquad (\mathbf{A}v)^2(bxv)^2(bxv)^2 - 2(\mathbf{C}v)^2(axv)^2(bxv)^2 + (\mathbf{B}v)^2(axv)^2(axv)^2 = 0\,.$$

Similmente le coppie dei punti d' incontro di una retta x con tutte le linee di 2^o ordine che nel connesso $(\Phi\varphi)$ corrispondono alle diverse rette v del piano, o sia a tutte le linee appartenenti all'involuzione delle Φ, saranno punti appartenenti ad una *coincidenza* del connesso; l'inviluppo delle tangenti v delle Φ in queste coppie di punti si otterrà eliminando $a:b$ fra le equazioni

$$a(\mathrm{AXV})^2 + b(\mathrm{BXV})^2 = 0\,, \qquad \text{ed} \qquad a^2(\mathbf{a}V)^2 + 2ab(\mathbf{c}V)^2 + b^2(\mathbf{b}V)^2 = 0\,;$$

si perviene così all'equazione di 6^o grado in V_i

$$(7)\qquad (\mathbf{a}V)^2(\mathrm{BXV})^2(\mathrm{BXV})^2 - 2(\mathbf{c}V)^2(\mathrm{AXV})^2(\mathrm{BXV})^2 + (\mathbf{b}V)^2(\mathrm{AXV})^2(\mathrm{AXV})^2 = 0\,.$$

Se poi si cerca il luogo del punto V tale che la retta v che lo congiunge con un punto fisso X costituisca con V un elemento (V, v) appartenente alla *coincidenza principale* del connesso $(\Phi\varphi)$, bisognerà eliminare $a:b$ ed A : B fra le equazioni

$$a(\mathrm{A}v)^2 + b(\mathrm{B}v)^2 = 0\,, \qquad \text{ed} \qquad \mathrm{A}(axv)^2 + \mathrm{B}(bxv)^2 = 0\,,$$

e la terza delle (3); si ottiene così l'equazione

$$(8)\qquad (\mathrm{A}v)^2(axv)^2 + (\mathrm{B}v)^2(bxv)^2 = 0\,,$$

che rappresenta una linea di 4° ordine con un punto doppio in X. Similmente se si cerca l'inviluppo della retta v tale che il suo punto V d'intersezione con una retta fissa x costituisca con v un elemento (V, v) appartenente alla *coincidenza principale* del connesso $(\Phi\varphi)$, bisognerà eliminare $A : B$ ed $a : b$ fra le equazioni

$$A(aV)^2 + B(bV)^2 = 0 , \qquad \text{ed} \qquad a(AXV)^2 + b(BXV)^2 = 0 .$$

e la terza delle (3); si ottiene così l'equazione

$$(aV)^2(AXV)^2 + (bV)^2(BXV)^2 = 0 , \tag{9}$$

che rappresenta una linea di 4ª classe, con una tangente doppia in x.

Si può osservare che il luogo dei punti di contatto V delle linee di 2° ordine appartenenti all'involuzione delle Φ con le tangenti condotte da un punto X è rappresentato dall'equazione di 3° grado nelle v_i

$$(Av)^2(Bv)(Bx) - (Bv)^2(Av)(Ax) = 0 ,$$

e che l'inviluppo delle tangenti v delle linee di 2ª classe appartenenti all'involuzione delle φ nei loro punti d'incontro con una retta x è rappresentato dall'equazione di 3° grado nelle V_i

$$(aV)^2(bV)(bX) - (bV)^2(aV)(aX) = 0 .$$

Finalmente il luogo dei punti V per i quali passano le linee corrispondenti di 2ª classe φ nel connesso $(\Phi\varphi)$ si ottiene eliminando $a : b$ ed $A : B$ fra le equazioni

$$a(Av)^2 + b(Bv)^2 = 0 \quad , \quad A^2(\mathbf{A}v)^2 + 2AB(\mathbf{C}v)^2 + B^2(\mathbf{B}v)^2 = 0 ,$$

e la terza delle (3), il che dà l'equazione di 6° grado nelle v_i

$$(Av)^2(Av)^2(\mathbf{A}v)^2 + 2(Av)^2(Bv)^2(\mathbf{C}v)^2 + (Bv)^2(Bv)^2(\mathbf{B}v)^2 = 0 . \tag{10}$$

Similmente l'inviluppo delle rette v che toccano le linee corrispondenti di 2° ordine Φ nel connesso $(\Phi\varphi)$ si ottiene eliminando $A : B$ ed $a : b$ fra le equazioni

$$A(aV)^2 + B(bV)^2 = 0 \quad , \quad a^2(\mathrm{a}V)^2 + 2ab(\mathrm{c}V)^2 + b^2(\mathrm{b}V)^2 = 0 ,$$

e la terza delle (3), il che dà l'equazione di 6° grado nelle V_i

$$(aV)^2(aV)^2(\mathrm{a}V)^2 + 2(aV)^2(bV)^2(\mathrm{c}V)^2 + (bV)^2(bV)^2(\mathrm{b}V)^2 = 0 . \tag{11}$$

finita stampare il dì 7 agosto 1879

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

STRUMENTI IN PIETRA DELLE PROVINCIE CALABRESI

MEMORIA

del Socio Ordinario G. NICOLUCCI

Letta nell'Adunanza del dì 9 Agosto 1879

Le Provincie Calabresi (Cosenza, Catanzaro e Reggio), come le rimanenti dell'Italia, han fornito una serie numerosa di oggetti preistorici, dei quali fino a pochi anni addietro non aveasi veruna conoscenza. Io, nel 1871, descrissi i primi che mi venne fatto di raccogliere in quelle Provincie [1]), e successivamente nel 1874 [2]) e nel 1876 [3]) ne feci conoscere altri che erano venuti ad arricchire la mia Collezione. Ora, essendosi il lor numero accresciuto fino ad ottantadue, oltre a quelli spediti in cambio od in dono a pubblici Musei ed a varî amici, credo far cosa utile agli studiosi dell'Alta Antichità pubblicandone la descrizione accompagnata dai disegni dei più conspicui in grandezza naturale.

Due pregevoli Monografie con tavole illustrative su questo medesimo argomento furono date in luce nell' anno scorso, negli *Atti della R. Accademia dei Lincei,* dal capitano Ruggero [4]) e dal Dott. Domenico Lovisato [5]), il quale erasi intrattenuto sulla stessa materia in altra precedente pubblicazione edita in Trieste parimenti nel 1878 [6]). Il numero degli oggetti riuniti da questi due signori è abbastanza considerevole, onde può ben dirsi, che dalle Provincie Calabresi la Paleoetnologia italiana ha ricevuto in questi ultimi anni un rapido e notevole incremento.

Gli strumenti litici calabresi da me posseduti appartengono tutti, meno una freccia di diaspro, alla categoria che dicesi de' levigati, onde fra di essi nè lance, nè coltelli,

[1]) *L'Età della Pietra nelle Provincie Pugliesi e Calabresi;* nell'*Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia.* Firenze, 1871. — *L'Âge de la Pierre dans les Provinces Napolitaines;* ne'*Comptes-Rendus del Congresso Preistorico di Bologna,* 1871.

[2]) *Ulteriori scoperte relative all'Età della Pietra nelle Provincie Napolitane; Rendiconto della R. Accademia delle Scienze.* Napoli, 1874.

[3]) *Nuove scoperte preistoriche nelle Provincie Napolitane.* Ibid. 1876.

[4]) *Oggetti preistorici calabresi del Catanzarese e del Cosentino.* Roma, 1878. — *Arnesi lapidei del Calabrese, Lettera al Chierici nel Bullettino di Paleoetnologia italiana,* 1878.

[5]) *Strumenti litici e brevi cenni geologici sulle Provincie di Catanzaro e di Cosenza.* Roma, 1878.

[6]) *Di alcune azze, scalpelli, martelli e ciottoli dell'Epoca della Pietra trovati nella Provincia di Catanzaro,* nel *Bullettino delle scienze naturali pubblicato in Trieste,* 1878.

nè raschiatoi, nè quella serie svariata di utensili di selce che s'incontrano in sì grande copia nelle altre Provincie italiane. Non si creda peraltro, che non avendo potuto raccogliere nè altri, nè io arnesi di selce in qualche numero, non fossero stati questi, nelle età antichissime, adoperati nelle Calabrie, conciossiachè nel Museo preistorico di Roma si conservano sedici coltelli silicei calabresi, uno dei quali di stupenda bellezza, che ha la lunghezza di 22 centimetri, e il Capitano Ruggero figura nella sua memoria *(Tav. IV. fig. 50)* una cuspide di freccia del territorio di Vena. Oltre a che l'ingegnere Rambotto raccoglieva nelle vicinanze di Squillace due pezzetti di selce lavorata con altre schegge silicee e frammenti di vasi grossolani [1]): schegge e frammenti che vide anche il Lovisato, il quale, facendo eco alla opinione del Rambotto, li giudicò avanzi di qualche umana stazione poco lontana dal luogo ove quegli oggetti furono rinvenuti. Altri frammenti di selce, ma senza accompagnatura di cocci, osservò pure il Lovisato nella trincea della strada che sul ciglio dello sperone gneis-granitico di Stalletti va a congiungere questa borgata con lo scoglio di Copanello; e di un delicato coltellino fa altresì menzione Pio Mantovani, che lo raccolse sulla spiaggia del Jonio presso Melito, nel luogo chiamato *Salto la vecchia* [2]). E perciò non può dubitarsi, che arnesi di selce fossero stati adoperati, nelle Età preistoriche, anche nelle Calabrie, come nelle altre parti dell'Italia e del mondo, ma la loro rarità presente è innegabile, ed a me pare che se ne possa trovare la spiegazione nella natura stessa del suolo calabrese, perciocchè essendo poco comuni, per non dir rari, in quelle Provincie i giacimenti siliciferi, gli oggetti preistorici di selce vi sono stati sempre avidamente ricercati come pietre focaie, di cui era tanto sentita la necessità prima della invenzione dei fiammiferi. Il bisogno faceva nascere in tutti il desiderio di possederne, e l'uso cui erano destinati li distruggeva miseramente, laddove nelle altre contrade, ove la selce era facile a rinvenirsi, per avere pietre focaie non era mestieri andar raccattando oggetti preistorici, e questi, lasciati in abbandono, han potuto conservarsi fino ad oggi in tanto numero da potersene formare, a'giorni nostri, cospicue collezioni.

In niun'altra parte d'Italia, ad eccezione del Piemonte propriamente detto, del Monferrato, delle Langhe sul versante adriatico delle Alpi marittime e dell'Appennino ligure, si rinvenne tanta copia di arnesi levigati, quanta venne fatto riunirne fino ad ora nelle Provincie Calabresi. E di questa frequenza si trova la spiegazione nella natura geognostica di quelle contrade, imperciocchè è noto, che il suolo delle Calabrie, nella sua maggior parte, si compone di rocce plutoniche e metamorfiche sulle quali si adagiano qua e là banchi più o meno potenti di calcarea compatta. Nelle fratture numerose e negli avvallamenti originatisi per la emersione di quelle rocce ora s'incontrano sabbie feldispatiche e quarzose prodotte dalla disgregazione delle rocce stesse, e stratificate a guisa di sedimenti, ora depositi più o meno ingenti del mare pliocenico, che veniva a rompere i suoi flutti entro que'seni e golfi che frastagliavano quella estrema parte della nostra Penisola.

Da queste rocce indigene gli uomini preistorici calabresi trassero i materiali per lavorare le loro armi e i loro utensili, scegliendo fra esse quelle che avessero maggiore durezza e tenacità, condizioni indispensabili per la durata dei loro strumenti. Probabilmente erano i ciottoli trasportati da'torrenti, o i frammenti staccati per cause na-

[1]) *Bullettino di Paleoetnologia italiana;* Anno II, p. 222.
[2]) *Bullettino cit.* Anno IV, p. 37.

turali dalle rocce madri che erano scelti per essere lavorati, gli uni perchè si avvicinavano più o meno alla forma degli strumenti di cui essi intendevano provvedersi, gli altri perchè più facili ad essere tagliati e ridotti alla forma da essi desiderata.

Fra le rocce da cui sono stati ricavati gli strumenti calabresi, le dioriti formano il maggior numero tanto nella mia, quanto nelle Collezioni Ruggero e Lovisato; ma nella mia Raccolta alle dioriti seguono immediatamente i graniti, le sieniti, i serpentini e le rocce quarzose, mentre in quella del Ruggero le afaniti sono in maggior quantità dopo le dioriti, e dopo le afaniti le sieniti, e nella Collezione del Lovisato alle dioriti seguono le sieniti, a queste le nefriti.

Egli è a notare come tanto la Raccolta Ruggero, quanto quella del Lovisato, sieno così povere di graniti; appena un solo esemplare in quella del primo (granito amfibolico), e sei in quella del secondo. La mia Collezione ne conta quattordici, la maggior parte in granito bigio, due in granito roseo. Così pei serpentini e rocce serpentinose. Indarno ne ho cercato ricordo nella memoria del Lovisato, ed appena un esemplare ne menziona il Ruggero, mentre fra i miei strumenti calabresi se ne contano otto. Debbo dire altrettanto de' quarzi e rocce quarzose, che nella mia Raccolta sono rappresentati da sei esemplari, e non si mostrano punto nelle Collezioni Ruggero e Lovisato. Inoltre si contano fra i miei oggetti alcuni protogini, una ftanite ed una eufotide che mancano nelle raccolte summentovate, e non vi compariscono punto il gabbro, la tremolite, la sillimanite, la variolite, la saussurite che si notano fra quelli del prof. Lovisato[1]).

Questa preponderanza in alcune contrade di oggetti litici lavorati in talune specie di rocce, e la povertà o assenza di oggetti formati di altro materiale può spiegarsi col predominio di taluni elementi geologici, e la scarsezza di altri nelle diverse contrade, sicchè agli uomini preistorici tornava comodo per lavorare i propri arnesi servirsi di materiali che avevano sotto la mano, anzichè andarli cercando in luoghi lontani, quando soprattutto, nel concreto, gli strumenti foggiati in una o in altra pietra dura corrispondevano egualmente allo scopo a cui si destinavano. E per non parlare che del solo granito, chi non sa che i più bei graniti delle Calabrie si trovino tutti nella regione occidentale? Or bene, da questa regione appunto sono venuti nella mia Collezione tutti gli strumenti di granito, alcuni dei quali, per finitezza di lavoro, sono fra i più eleganti ch'io m'abbia delle Calabrie.

Oltre gli strumenti lavorati in rocce indigene si sono rinvenuti nelle Provincie Calabresi anche oggetti che per la loro natura mineralogica sembrano essere stranieri a quelle Provincie. Non parlo delle nefriti che oggimai tutti riconoscono di origine asiatica, ma sì delle cloromelaniti, delle fibroliti, della tremolite, della fibrolite, della sillimanite, della saussurite, della variolite, senza far motto delle altre menzionate dal Lovisato, e di diagnosi non bene accertata; tuttavolta se queste rocce si trovino oppur no nelle Calabrie, è quistione non peranco decisa, perciocchè non ancora sui terreni calabresi sono state praticate quelle ricerche estese ed accurate che ne abbiano

[1]) Qui mi occorre far notare, che non è sempre facile diagnosticare le rocce da cui sono stati ricavati gli oggetti preistorici a motivo di quella patina che la vetustà de' secoli imprime su gli stessi. La loro determinazione sovente è molto difficile, ed io non sempre avrò colto nel segno nell'indicare la natura delle rocce de'miei strumenti. Studî più accurati potrebbero modificare alcune mie diagnosi, nè me ne dorrebbe, perciocchè io non ho la pretensione di dogmatizzare nel difficile campo della mineralogia.

potuto metter in luce tutte quante le ricchezze geognostiche, e perciò non si può sulla provenienza delle stesse pronunziare ancora l'ultima parola [1]).

Un'altra roccia straniera alle Calabrie, e nella quale si sono trovati lavorati oggetti in varî luoghi di quella regione, è l'ossidiana, coltelli foggiati nella quale sostanza, e nuclei e numerose schegge raccolse il Mantovani presso il paese di Gallina, a Ravagnese presso Reggio [2]), e sulla spiaggia del Jonio, in vicinanza di Mileto, ove fu raccolto quel coltellino di selce di cui sopra è fatta menzione [3]). Un grosso nucleo di ossidiana dalla cui superficie erano state staccate lunghe lamine venne pure nelle mani del prof. Mantovani donatogli dal prof. Grio che lo rinvenne nel paese di Sinopoli, un altro più piccolo gli fu presentato dal Can. d'Amico, ed un'altro fu rinvenuto dal farmacista Scerbo di Gimigliano, sul versante dello spartiacque che separa quest'ultimo luogo da Tiriolo [4]).

Questi nuclei e questi coltelli permettono di credere che l'ossidiana era importata in blocchi nelle Calabrie dalla vicina Lipari, e quindi lavorata in molti luoghi, formandosi con questo vetro vulcanico quei delicati strumentini che non potevano ottenersi neppure dalla selce della migliore qualità.

Gli oggetti di nefrite rinvenuti nelle Calabrie, se non sono molto numerosi, non sono al certo sì pochi da non richiamare l'attenzione del paleoetnologo, perciocchè il Dott. Lovisato potè in poco tempo riunirne sette, ed io due esemplari. Confusi sovente con oggetti di giadeite, si raccolsero ancora in altre Provincie italiane, e perciò non è a porsi in dubbio che fossero stati conosciuti, ne' tempi preistorici, in tutta l'Italia. Non trovandosi la nefrite nell'antico continente, che nella cinese provincia di Sse Tchuan, nelle contrade levantine del Tibet in prossimità della Cina, e a Batagul presso l'Irkutsk nella Siberia orientale, non poteva essere introdotta in Europa che quando le relazioni fra i popoli aveano acquistato una certa estensione, e perciò è molto probabile, che la sua presenza nell'Europa meriggia ed occidentale non risalisse ad una età antichissima, ma sibbene a quell'epoca della pietra, che già si confondeva con quella del bronzo, se non, come è più probabile, alla stessa età metallina. E poichè sappiamo che i Fenicî furono i primi che veleggiassero pel mediterraneo, esercitandovi commercio fin dalla prima epoca del bronzo, perciò non è improbabile la opinione, che per loro mezzo la nefrite, da essi acquistata nell'interno dell'Asia, fosse stata introdotta presso i popoli dell'Italia e dell'Europa meridiana ed occidentale. Sarebbe così anche spiegato perchè in Calabria gli oggetti lavorati in questa pietra si trovino in una certa relativa abbondanza, perciocchè i Fenici che nell'aurora dell'età bronzaria aveano messo già il piede nella

[1]) Le prime nozioni geognostiche sulle Calabrie furono divulgate dal Fasano nel suo *Saggio geografico-fisico sulla Calabria Ulteriore II (Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, 1788)*: lavoro pregevolissimo rispetto al tempo in cui fu pubblicato. Il Brocchi limitò le sue indagini a'soli contorni di Reggio (*Escursioni geologiche sui contorni di Reggio in Calabria, e sulle sponde opposte della Sicilia* (*Biblioteca italiana*, t. XLVII, luglio, 1828), Più estese ed esatte notizie divulgava il Pilla ne' *Congressi scientifici italiani* in Pisa (*Atti*, et. 1839) ed in Padova (1842). Il Philippi confermava in gran parte le osservazioni del Pilla, ed altre notizie aggiungeva a quelle già note (*Cenni geognostici sulle Calabrie, nel Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli*, 1842). Poco o nulla di più ci apprese il Thichatcheff (*Coup d'oeil sur la constitution géologique des Provinces méridionales du Royaume de Naples*. Berlin, 1842). Ragguagli non ispregevoli pubblicò pure il Montagna sopra alcune limitate regioni di quelle Provincie (*Giacitura e condizioni del terreno carbonifero di Agnana e dintorni. — Intorno l'esistenza di resti organizzati nelle rocce azoiche ed alla doppia origine del granito*. Torino, 1866), e schizzi non sempre esatti il von Rath che corse di volo le Calabrie, come del resto indica il titolo del suo lavoro: *Ein Ausflug nach Calabrien*. Bonn, 1871.

[2]) *Bullettino di Paleoetnologia*, IV, 196.

[3]) *Bullettino cit.* III, 377.

[4]) Lovisato, *Oggetti litici* etc., p. 7.

Trinacria, potevano più agevolmente che altrove collocare le loro mercatanzie nelle Calabrie, che un solo brevissimo tratto di mare separa dalla Sicilia [1]).

[1]) Era già scritta questa Memoria, quando, per cortesia del signor Damour, mi giunse nelle mani la *Notice sur la distribution géographique des hâches et autres objets préhistoriques par MM. Damour et Fischer (Extrait de la Revue Archéologique, juillet,* 1878). Da' ragguagli pubblicati da' sullodati autori si raccoglie, che le accette di nefrite sono in Europa confinate in una zona molto limitata: l'Italia, la Francia, la Svizzera, l'Alemagna meridionale ed il Belgio. Niun oggetto antico di nefrite si è rinvenuto finora nel suolo della Russia, della Svezia, della Norvegia, della Danimarca, e questa circostanza è di molto peso per farci ritenere che, nell'età preistorica, la nefrite non s'importava presso noi dalla Siberia, come è opinione del prof. V. Beck, Direttore della scuola montanistica di Pietroburgo (Fischer, *Ueber Vorbreitung der Steinbeile aus Nephrit, Jadeit und Chloromelanit besonders in Europa*, 1879, p. 3), perchè se ne sarebbero trovate tracce nelle vaste contrade per le quali avrebbe dovuto effettuarsi il suo trasporto, ma sì dall' Asia Centrale con la quale è noto che i Fenici mantenevano attive relazioni commerciali e d'onde potevano procurarsene con poca difficoltà, e farne traffico co' popoli littorani del Mediterraneo da' quali era trasmessa alle genti confinanti.

In Italia poi si è raccolto, più che altrove, il maggior numero di oggetti preistorici di nefrite, perchè mentre la Svizzera, che si credeva la contrada che ne avesse fornito maggior copia, non ne novera che 15 esemplari (Damour et Fischer, l. c. p. 6-7), la sola Italia continentale ne conta 16, ed un numero forse anche maggiore la Sicilia, come raccolgo dalle seguenti notizie favoritemi dalla cortesia del signor Ferdinando Barone di Andrian: *On trouve de magnifiques exemplaires de néphrite au Musée de l' Université de Palerme (je crois 6-8?) provenant de Lentini et Castrogiovanni; puis dans la collection du baron Mandralisca à Cefalù (qui proviennent pour la plus grande partie de Lipari). Je ne me rappelle plus le nombre des exemplaires de néphrite dans la collection Mandralisca, mais il y en a beaucoup en differents états de conservation. Outre cela le baron Verga Catalano m'a envoyé des modèles d'exemplaires trouvés à Vizzini, d'une forme tres curieuse, dont le materiel pourrait être aussi la néphrite. Je n'ai pas vu les originaux.— En tout cas la Sicile paraît être rélativement riche d'objets de néphrite* (Lettera del 12 giugno 1879 da Vienna). Aggiungerò pure che di un'altra accetta di nefrite di S. Cono, in Provincia di Catania, fa menzione il Cafici nel *Bullettino di Paleoetnologia italiana.* A. V. p. 43.

Il seguente specchietto comprende l'elenco degli strumenti di nefrite rinvenuti nell'Italia continentale, i nomi degli autori che ne fanno menzione, e le Collezioni in cui sono conservati.

Numero	FORMA degli oggetti	LUOGHI in cui furono rinvenuti	COLLEZIONI nelle quali si conservano	AUTORI CHE NE FANNO MENZIONE
1	Accetta	Arcumeggia (Comasco). . .	Maggi.	Issel, *L' uomo preistorico in Italia*, 1875, 774.
2	Accetta	Camuggiano (Firenze) . . .	Altoviti-Toscanelli.	*Id.*
3	Accetta	Terni (Umbria)	Foresi.	*Nota di oggetti preistorici inviata al Pigorini per l' annuario scientifico del* 1870.
4	Accetta	Davoli (Catanzarese). . . .	Liceo di Catanzaro.	Lovisato, *Strumenti litici del Catanzarese e del Cosentino*, 1878.
5	Accetta	Borgia *Id.*	»	*Id.*
6	Accetta	Borgia *Id.*	»	*Id.*
7	Accetta	Zagarise *Id.*	»	*Id.*
8	Accetta	Fossato *Id.*	»	*Id.*
9	Accetta	Sorbo S. Basile *Id.*	»	*Id.*
10	Accetta	Soveria Simeri *Id.*	»	*Id.*
11	Accetta	Chiusi (Senese)	Nicolucci	Con foro nell' apice.
12	Accetta	Caramanico (Chietino). . .	»	
13	Accetta	Caiazzo (Terra di Lavoro).	»	
14	Accetta	Brindisi (Leccese).	»	
15	Accetta	Sambiase (Catanzarese) . .	»	
16	Scalpello	Sambiase *Id.*	»	

Gli strumenti in pietra delle Calabrie da me riuniti sono stati rinvenuti sporadicamente smovendo il terreno per lavori agricoli, quasi sempre a poca profondità dal suolo coltivabile. Più frequentemente sono stati raccolti sui monti o in collina, che doveano essere i luoghi di preferenza abitati dalle genti preistoriche. Uno di essi fu trovato da una signorina fra le ghiaie del torrente Cantagalli nelle vicinanze di Sambiase trasportatovi senza fallo dalle acque da'luoghi soprastanti. Essi appartengono a diverse categorie, e però li anderò noverando secondo la forma, e secondo l'uso a'quali mi sembrano essere stati destinati.

I. — Percussori

Chiamo così alcune pietre sferiche ed ovali evidentemente ridotte con arte a quella forma. Il Nilsson crede che pietre simili trovate nella Scandinavia servissero a scheggiare le selci [1], ma io mi associo più volentieri alla opinione dell'Evans [2] che le giudica percussori o trituratori, atti a rompere e triturare sostanze dure. Tutte presentano punti più o meno logori nella loro superficie, ed è questa particolarità che ci fa ritenere come più verisimile la destinazione che vi abbiamo attribuita.

1. 2. Due di queste pietre, l'una in roccia serpentinosa con abbondanza di amfibolo, e l'altra di arenaria compatta nella quale si osservano minutissimi granelli di quarzo commisti ad amfibolo e mica, sono quasi sferiche, ed hanno il diametro rispettivo di 62 e 52 mm. Provengono la prima da Sambiase, e la seconda da S. Mango.

3. Un'altra, proveniente da Platania, ha forma ovale coll'asse maggiore di 70, e il minore di 55 mm., e presenta una struttura granitica, distinguendosi nella sua massa particelle di quarzo, di felspato albite, e di amfibolo in gran copia. Amfibolite.

4. La quarta, raccolta in Sambiase, ha forma parimenti ovale col diametro maggiore di 110, e il minore di 74 mm. È formata da una roccia granitoide rossigna che presenta grossi cristalli di quarzo con molti granati ed orniblenda.

5. La quinta è una pietra cilindrica spezzata in quella parte che doveva essere la sua metà. È molto logora nella faccia inferiore, come quella che era destinata ad essere in contatto de'corpi che si trituravano. Fu rinvenuta in Sambiase, ed è foggiata in un'arenaria compatta identica a quella della pietra sferica di S. Mango.

6. *Pestello* di sienite, quasi cilindrico, della lunghezza di 116, e del diametro di 34 mm. È più grande in un capo che nell'altro, e si osserva molto corroso nel capo maggiore pel lungo uso fattosi dell'utensile. — Sambiase.

II. — Lisciatoi

7. Pietra di forma semicircolare schiacciata, piana nel lato retto, e con taglio smussato nella circonferenza. È perfettamente levigata, e il suo taglio si è ottenuto per istrofinìo come nelle accette. Il suo diametro è 70, la spessezza 37 mm. Proviene da Decollatura. La sua pasta ha colore bigio-verdastro con associazione di piccoli frammenti di piriti. Sienite porfirica.

8. Altro *lisciatoio* di sienite di forma diversa dalla precedente. La sua figura so-

[1] *Les Habitants primitifs de la Scandinavie.* Ediz. francese. Paris, 1868; p. 31.
[2] *Ancient Stone Implements of Great Britain and Ireland.* London, 1872; p. 213 e seg.

miglia ad un grosso baccello di fava. È leggermente convesso nelle sue facce, e si assottiglia insensibilmente ne' margini che presentano un taglio molto smussato. È lungo 131 mm.; il suo diametro maggiore è di 45, e la spessezza di 25 mm. Sambiase.

L'uno e l'altro de' due lisciatoi potevano essere adoperati a lisciar pelli, ad appianare cuciture, od anche a lisciare la superficie de vasi.

9. Fra i lisciatoi novero anche un *disco* di una breccia quarzosa composto di quarzo affumicato e roseo, rinvenuto in Sambiase. È leggermente convesso in ambe le facce, ed ha un orlo sottile, ma tondeggiante. Il suo diametro è 47, e la spessezza massima centrale 19 mm.

III. — Macinello

10. La sua forma è quella delle ordinarie macine preistoriche, cioè di figura ovale, piana da una faccia, leggermente convessa dall' altra. La pietra non è intera, ma la sua lunghezza non poteva eccedere i 20, e la larghezza è di 11 centim. La spessezza mediana è 28 mm. È molto logora nella faccia piana, che era quella destinata alla triturazione. La pietra sembra essere un' amfibolite. Ha struttura granitoide a piccoli elementi con predominio di amfibolo. — Platania.

IV. — Martelli

I martelli delle Calabrie si conformano tutti ad un tipo; hanno cioè la forma di cuneo alquanto schiacciato, che dal capo più o meno sferico si assottiglia gradatamente fino alla penna. Al di sotto del capo, o per dir meglio, nella metà superiore, trovasi il collo, il quale consiste in una scanalatura, in alcuni circolare, in altri sopra due facce ed un sol fianco, nel qual caso il lato che non è solcato, è piano, e non tondeggia come l' altro. La scanalatura serviva a manicarvi l' istrumento tal quale si pratica da' popoli selvaggi che fanno ancora uso di simili strumenti di pietra. Un solo dei martelli fa eccezione alla forma ordinaria, perciocchè invece di avere la penna ha due capi, l'uno più piccolo dell' altro col solco nel mezzo ov' era fissato nel manico.

I martelli sono di varia grandezza fra 140 e 163 mm. di altezza. La penna è sempre più stretta del capo, e il taglio semicircolare, all' infuori di un solo che è retto.

Non conosco ancora alcun martello calabrese che sia fornito di foro, e per verità essi sono anche rari nel resto dell' Italia, la quale non ha presentato fin qui verun martello forato di quelle forme gentili ed eleganti che tanto si ammirano nelle Collezioni Scandinave e delle Isole Britanniche.

Il tipo de' nostri martelli non è comune al rimanente dell' Italia, conciossiachè io non ne conosca che soli cinque esemplari appartenenti ad altre Provincie; cioè uno della Vibrata, un altro conservato nel Museo geologico fiorentino, un terzo nel Museo geologico dell' Università di Roma, il quarto nel Museo di antichità di Cagliari ed il quinto, proveniente da Catania, figurato nella Tav. I[a] fig. 3 dell' opera del barone di Andrian, *Prähistorische Studien aus Sicilien.* Berlin, 1878. Per converso questo tipo, raro anche in Europa, è piuttosto comune nell' America settentrionale. Io ne posseggo uno della Nuova Jersey, e molti ne trovo figurati nell' *Atlante fotografico della Collezione del*

Sig.r Franklin Peale, di Filadelfia [1]), e nella estesa Memoria del D.r C. C. Abbot, *Sull'Età della Pietra nella Nuova Jersey* [2]). Parecchi ne raccolse ancora il D.r Schliemann fra i ruderi dell'antica Troia, i quali si trovano figurati nell'*Atlante delle Antichità Troiane* [3]).

Varia è la roccia nella quale i martelli sono tagliati, ma di ciò sarà tenuto parola nella descrizione di ciascuno di essi.

11. *Martello* di granito bigio proveniente da Platania. Esso, la cui forma fa eccezione a quella de'rimanenti, è quasi sferico, ed ha nel mezzo un solco circolare che è più profondo a'lati che nelle facce. Invece di avere un capo ed una penna, ha due capi l'uno più grande, l'altro più piccolo. È alto 63 mm., largo nelle facce 66, e grosso, in mezzo del solco, 35 mm. Il capo più grande ha il diametro di 45, e il più piccolo di 26 mm.

12. Piccolo *martello* di diorite, molto schiacciato con solco profondo. Il capo è quasi retto, ma la penna convessa è molto affilata. Altezza 72, larghezza 42, spessezza 25 mm. — Castiglione.

13. *Martello* di diorite porfirica quasi cilindrico dal capo fin verso la penna con lieve scanalatura nella sua metà. La sommità del capo è piana, il taglio della penna semicircolare. Altezza 100, larghezza 43, spessezza 35 mm. — Sambiase. — Tav. I, fig. 2.

14. *Martello* di granito bigio rinvenuto a Decollatura. È notevole in esso la profondità del collo. Il capo ha forma ovale e convessa, la penna è retta, e meno larga del capo. È alto 85, largo 55, e doppio 40 mm. Il capo ha la lunghezza di 55, e la penna di 41 mm. — Tav. I, fig. 3.

15. *Martello* in roccia serpentinosa color verde-chiaro con grandi venature di quarzo ialino. La sommità del capo è piana, la penna tagliente e ad arco di cerchio; e penna e capo hanno la stessa dimensione. Altezza 122, larghezza 60, spessezza, nel mezzo del collo, 50 mm.; larghezza del capo e della penna 43 mm. — Cortale. — Tav. II, fig. 1.

16. *Martello* di diorite in forma di cuneo col collo molto prossimo al capo, il quale si ristringe nella sua sommità, e presenta una superficie piana. La penna è assai ristretta, ma semisferica e tagliente. La sua altezza è di 92, la larghezza del capo di 66, della penna 32, e la spessezza della pietra in mezzo al collo di 40 mm. — Platania. — Tav. I, fig. 4.

17. Altro *martello* più grande, di diorite, di forma simile a quella del precedente, se non che il capo, invece di essere piano è semisferico. Altezza 128, larghezza 68, e spessezza in mezzo del collo 54 mm. — Sambiase.

18. Grosso *martello* di diorite porfiroide rinvenuto in Sambiase. La massa verdescura di questa diorite contiene cristalli di amfibolo di una lucentezza sub-metallica. Questo martello è osservabile per la sua testa grande in proporzione della penna, e per la profondità del suo collo che è orizzontale all'asse dell'istrumento, mentre la sommità del capo molto convessa è obliqua all'asse medesimo, essendo più alta da un lato che da un altro. Il martello, in forma di cuneo, è assottigliato a'lati, ma la sua spessezza è maggiore dal lato ove il capo è più alto, che dal lato opposto. Altezza 140, mm.,

[1]) *Specimens of the Stone Age of the human Races as collected and arranged by Franklin-Peale.* Philadelphia, 1873 — Fol.

[2]) *The Stone Age in New-Jersey, nell'Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution.* Washington, 1876.

[3]) *Atlas des Antiquités Troyennes. — Illustration photographique faisant suite au Rapport sur les fouilles de Troie.* Leipzig, 1874.

larghezza del corpo 97, della penna 43 mm. La spessezza della parte media del capo è di 60 mm., in mezzo del collo di 40 mm. — Tav. I, fig. 1.

V. Accette

Le Accette formano il maggior numero nella serie degli oggetti litici calabresi, e sono gli strumenti meglio lavorati, e più diligentemente levigati della serie stessa. I tipi ne sono diversi, ma possono ridursi a' cinque seguenti.

A) *Tipo conoidale.* — L'accetta è un cono perfetto, la cui base assottigliandosi in due punti opposti va a terminare in un taglio convesso, o ad arco di cerchio. In talune il taglio è la parte più larga dell'istrumento, in altre è alquanto ristretto, e non maggiore della larghezza del mezzo del cono.

B) *Tipo sub-conoidale.* — La forma dell'accetta è anche quella di un cono, ma alquanto schiacciato, sicchè le facce corrispondenti al taglio risultano più larghe di $^1/_4$-$^1/_6$ delle facce laterali.

C) *Tipo triangolare.* — Questo tipo è rappresentato dalle accette che da' due lati del taglio convergono in alto con due linee o rette, e leggermente convesse, e presentano la forma di un triangolo isoscele più o meno allungato. Le superficie sono piane o convesse; se piane sono tali quasi sempre anche i lati, mentre, se convesse, i lati tondeggiano anch'essi.

D) *Tipo rettangolare.* — Le accette di questo tipo non sono terminate a punta, come negli altri tipi summentovati, ma presentano quattro lati, di cui l'inferiore tagliente è leggermente convesso, e gli altri piani. Il lato tagliente è sempre più largo del lato opposto, sicchè l'istrumento non costituisce veramente un rettangolo, ma una figura che molto gli si avvicina. Anche in queste accette i lati sono quasi sempre o piani o tondeggianti, secondo che le superficie sono o spianate o convesse.

E) *Tipo ovale.* La figura è quella di un uovo schiacciato col taglio ricavato nell'abside maggiore dell'ellissi.

La varietà de' tipi, la diversità delle rocce, l'eccellenza del lavoro rendono pregevoli in alto grado questi strumenti, e chi li abbia una volta osservati, non potrà non convenire, che essi prendono il posto fra i cimelî più pregiati delle epoche preistoriche. Se non è maravigliosa la loro grandezza, come in alcune accette danesi, è ammirabile la loro artistica perfezione, e sotto questo rispetto io non conosco arnesi simili di altra contrada che possano superarli.

Importa ora conoscere quale la forma, quale la grandezza di ciascuna accetta, quali le pietre da cui furono ricavate.

A) Accette conoidali

19. Grande *accetta* di sienite con taglio ad arco più stretto del diametro della base del cono. Altezza 173, diametro massimo del cono 55, larghezza del taglio 47 mm. — Nicastro. — Tav. II, fig. 2.

20. Altra grande *accetta* di sienite, spezzata nel taglio, dell'altezza di 170 mm., col diametro massimo del cono di 60 mm. — Sambiase.

21. *Accetta* di diorite granitoide, col taglio stretto e convesso, dell'altezza di

145 mm., col diametro massimo del cono di 52, e la larghezza del taglio di 38 mm.— Nicastro.

22. *Accetta* di granito bigio-verdastro con cristalli sparsi di amfibolo. È spezzata nel taglio, ed è l'accetta più lunga, in proporzione del suo diametro, di tutta la serie. È alta 160 mm. col diametro massimo del cono di 42 mm. — Castiglione.

23. *Accetta* di granito bigio con forte prevalenza di felspato, spezzata nella testa, ma col taglio quasi retto, e più largo di tutto il rimanente dell'istrumento. — Scigliano.

24. *Accetta* di protogino col taglio ad arco più stretto della base del cono, la quale ha il diametro di 38 mm., mentre la parte tagliente non ha che la larghezza di 23 mm. Altezza dell'istrumento 118 mm. — Gizzeria.

25. *Accetta* di granito bigio col taglio ad arco più largo della base del cono. Altezza 145, diametro maggiore del cono 50, larghezza del taglio 52 mm. — Sambiase. — Tav. II, fig. 3.

26. *Accetta* di protogino col taglio stretto e convesso. Altezza 100, diametro massimo del cono 38, larghezza del taglio 30 mm. — Platania.

B) Accette sub-conoidali

27. *Accetta* di granito bigio dell'altezza di 150 mm. Il suo diametro maggiore è 57; il taglio largo 55 mm. — Sambiase.

È questo l'unico strumento che non sia levigato. È tutto all'intorno ritoccato con piccoli colpettini, ma doveva essere sottoposto alla levigatura per dirsi completo. Essendo stato raccolto così imperfetto in una collina nelle adiacenze di Sambiase ci dà argomento a giudicare, che oggetti di pietra si preparavano in quel sito, e che ivi probabilmente doveva esistere una officina per la loro lavorazione.

28. *Accetta* di quarzo scistoso, la cui pasta si compone di vene alterne di quarzo bianco, giallastro, roseo e affumicato con pagliette di mica argentina. Altezza 104, diametro maggiore dell'accetta 43, larghezza del taglio 38 mm. — Sambiase.

29. *Accetta* di sienite, spezzata nella testa, col taglio quasi retto. Il suo maggior diametro è di 45, la larghezza del taglio di 52 mm. — Sambiase.

30. *Accetta* di quarzo latteo, di grana fina e chiusa, di aspetto grasso e lucente, col taglio ad arco poco più stretto del maggior diametro dell'istrumento. È alta 87, larga nel taglio 40 mm. Il suo diametro maggiore è 42 mm. — Sambiase. — Tav. III, fig. 1.

31. *Accetta* di granito bigio a struttura compatta con rari amfiboli sparsi nella massa. È spezzata nella testa, ed ha il diametro maggiore di 50, e il taglio di 45 mm. — Sambiase.

32. *Accetta* di sienite col taglio ad arco, ed una faccia più convessa dell'altra. Misura in altezza 130 mm. Il suo maggior diametro è 54, e la larghezza della parte tagliente 48 mm. — Platania. — Tav. III, fig. 2.

È questo l'istrumento con cui si fece a me dinnanzi, in Sambiase, la pruova del fuoco per dimostrarne l'autenticità, o per dir meglio la sua provenienza celeste. Si avvolse un filo intorno al corpo dell'accetta, e quindi, postala in mezzo ad un focolaio, si cinse ad una certa distanza di carboni ardenti, e vi si mantenne per dieci minuti. Il

filo non si bruciò, e il contadino che mi recava la pietra esclamò in aria di trionfo, *Vedete se è vera!* La superstizione che gli arnesi preistorici sieno fulmini caduti dal Cielo che assumono quella forma è così universale nelle Calabrie, che que' nativi non li conoscono con altro nome, se non con quello di *truoni*, o *cugni di truoni*. Ad essi attribuiscono virtù maravigliose, fra le quali non ultime quelle di preservare dalle folgori la casa nella quale si custodiscono, scongiurare l'altrui malevolenza, favorire i parti, e liberare da molte infermità.

33. *Accetta* di protogino, spezzata nel taglio, alta 105, col diametro maggiore di 48 mm. — Platania.

34. *Accetta* di granulite con rare piriti sparse nella sua massa. Proviene da Gizzeria, ed ha l'altezza di 80 mm., e il diametro maggiore uguale alla larghezza del taglio che è di 42 mm.

35. *Accetta* di eclogite raccolta nel territorio di Bella in vicinanza di Nicastro. È alta 148 mm. Il suo diametro maggiore è 50, e la larghezza del taglio 45 mm. È uno dei più bei pezzi della serie, anche per la natura della roccia che ha struttura fina granitica con piccoli granelli di diallaggia, granato rosso ed epidoto verde. — Tav. III. fig. 3.

36. *Accetta* di diorite granitoide, alta 92, larga nel suo maggior diametro, che è eguale alla larghezza del taglio, 53, mm. — Nicastro — Tav. III. fig. 4.

37. *Accetta* di diorite granitoide col taglio largo e molto inarcato. Ha l'altezza di 90 mm., e la larghezza del taglio di 45 mm. — Adami. — Tav. III. fig. 6.

38. Altra *accetta* di diorite granitoide col taglio largo e molto curvo come la precedente. Alta 95, larga nel taglio 48 mm. — Soriarello. — Tav. III. fig. 5.

39. *Accettina* di porfido verde, od ofite, di color verde-chiaro uniforme. Anch'essa ha larga la parte tagliente, ma meno inarcata di quella de' due numeri precedenti. Altezza 78, larghezza del taglio 40 mm. — Motta Santa Lucia. — Tav. II. fig. 5.

40. *Accetta* di granito bigio a piccoli elementi con cristalli di melanite. Il taglio è inarcato e largo; l'altezza 138; il maggior diametro dell'istrumento 51, e la larghezza del taglio 65 mm. — Castiglione.

41. *Accetta* di afanite dioritica di color nero traente al verde, molto compatta e tenace. Anche il taglio convesso di questa scure è la parte più larga dell'istrumento. Altezza 130, larghezza 56 mm. — Gimigliano.

42. Altra *accetta* di afanite dioritica di color bruno omogeno, con minutissimi cristalli bianchi appena visibili. È spezzata nel taglio. — Sinopoli.

43. *Accetta* di diorite porfirica col taglio largo e ad arco di cerchio. Alta 106, larga nel taglio 50 mm. — Gizzeria.

44. *Accetta* spezzata nel taglio, di granito porfirico, e molto larga nella parte tagliente. Altezza 93, larghezza del taglio 45 mm. — Feroleto.

45. *Accetta* di diorite granitoide, anch'essa spezzata nel taglio lievemente arcuato. Alta 76, larga nel taglio 45 mm. — Sambiase.

46. *Accetta* di diorite granitoide, col taglio largo ed inarcato. Altezza 102, larghezza del taglio 40 mm. — Soveria.

47. — *Accetta* in roccia serpentinosa sparsa di macchie rossastre. È spezzata nel taglio. — Platania.

*

C) Accette triangolari

Le accette triangolari si differenziano dalle conoidali e sub-conoidali per la loro sottigliezza, per la figura della loro superficie, che in talune è affatto piana, in altre lievemente convessa, e per la larghezza del taglio in proporzione della loro altezza. Fra esse poi si distinguono per le costole, piane in alcune, tonde in altre, per la maggiore o minore altezza de' lati, e per la forma del taglio, piano nelle une, convesso nelle altre. Le loro dimensioni d'ordinario son piccole; ve ne ha qualcuna mezzana, ma niuna di grandi proporzioni, come si vedrà nella enumerazione che segue.

48. — *Accetta* di granulite con superficie convesse, costole tondeggianti, e taglio leggermente inarcato. Altezza 82, larghezza del taglio 44, spessezza della pietra, nel suo centro, 33 mm. — Sambiase.

49. *Accetta* di breccia quarzosa a struttura scagliosa con quarzi di varî colori, fra i quali predominanti il rosso ed il bianco. È spezzata nella testa, ed il taglio poco inarcato, e largo 57 mm. La sua spessezza nel centro è 32 mm. — Sambiase.

50. *Accetta* in roccia serpentinosa a struttura fibrosa. La massa della roccia è di color bruno con strie longitudinali bianco-verdastre. Le superficie sono convesse, i lati tondeggianti, il taglio ad arco di cerchio. Alta 110 larga nel taglio 50, doppia, nel centro, 32 mm. — Sambiase.

51. *Accetta* in granito bigio-verdastro con struttura tendente alla perfiroide, spezzata nella testa, lievemente convessa nelle sue facce, e tondeggiante a' lati. Ha il taglio ad arco largo 48 mm., e la spessezza centrale di 38 mm. — Sambiase.

52. *Accetta* di diorite granitoide alta 75, larga nel taglio, che è retto, 48, doppia 32 mm.; facce e lati pianeggianti. — Gizzeria.

53. *Accettina* di diorite con superficie e costole piane, alta 48, e larga nel taglio 38 mm. — Cariati.

54. *Accetta* di granito bigio-verdastro come il N.° 51. Facce e costole piane, taglio retto. Altezza 100, larghezza del taglio 48, spessezza della pietra 31 mm. — Maida.

55. *Accetta* in granulite con le facce convesse e i lati tondeggianti, alta 80, larga nel taglio, leggermente inarcato, 43, doppia 25 mm. — Maida.

56. *Accetta* di diorite con superficie piane, costole tondeggianti e taglio retto. Altezza 92, larghezza del taglio 50, spessezza dell'istrumento nel suo centro 26 mm. — Soveria.

57. *Accetta* di sienite porfirica, piana da una faccia, convessa dall'altra, co' lati tondeggianti e il taglio leggermente inarcato. Alta 78, larga nel taglio 36, doppia, nel suo centro, 31 mm. — Stilo.

58. *Accetta* in diorite perfiroide con facce convesse, costole tonde, e taglio ad arco di cerchio. Altezza 76, larghezza del taglio 40, spessezza nel centro 21 mm. — Confienti.

59. *Accetta* in serpentino, piana da una faccia, leggermente convessa dall'altra con le costole piane e il taglio retto. Alta 78, larga nel taglio 38, doppia nel centro 16 mm. — Platania.

60. *Accetta* in roccia serpentinosa verdastra sparsa di macchie rosse; piana a' lati

e nelle facce col taglio molto inarcato. Alta 48, larga nel taglio 46, doppia 14. mm. — Stilo.

61. *Accettina* di diorite, piana a' lati, nelle facce e nel taglio, dell' altezza di 40, della larghezza, nel taglio, di 40, e della spessezza di 10 mm. — Bianchi. — Tav. IV, fig. 1.

62. *Accettina* di pietra lidia, o ftanite, di color nero perfetto con isplendore di seta. È piana da una faccia, lievemente convessa nell' altra, co' lati piatti e il taglio retto. Ha l'altezza di 48, la larghezza del taglio di 31, e la spessezza di 9 mm. — Serra, S. Bruno. — Tav. IV. fig. 2.

63. *Accettina* di nefrite color verde porro con venature più scure. La struttura di questa roccia è lamellare, alquanto scistosa con fratture a scaglia. Una sua faccia è piana, l'altra lievemente convessa, e i lati tondeggianti. Altezza 50, larghezza del taglio 34, spessezza dell' istrumento, nel suo centro, 13 mm. — Sambiase. — Tav. IV, fig. 3.

D) Accette rettangolari

Ho detto più innanzi, che le accette rettangolari non rappresentano un vero rettangolo, ma sì una figura a quattro lati, de' quali i due maggiori o laterali, eguali, e degli altri due, quello che forma la testa dell' accetta alquanto più breve dell' altro che ne forma il taglio, il quale non è sempre retto, ma il più spesso leggermente convesso. Le ho chiamate così, non perchè esse presentino una vera figura geometrica, ma perchè la loro forma molto vi si avvicina, ed anche perchè era mestieri indicarle con un nome che le distinguesse dalle altre.

64. *Accetta* di granito bigio a piccolissimi elementi con cristalli di melanite, come nel N.° 40; convessa in entrambe le facce, tondeggiante a' lati, e col taglio lievemente inarcato. Altezza 95, larghezza del taglio 50, della testa 30, spessezza, nel centro, 34 mm. — Bianchi.

65. *Accetta* di diorite leggermente convessa nelle sue facce, ne' lati e nel taglio; alta 89, larga nel taglio 40, nella testa 36 mm.; spessezza 26 mm. — Seminara.

66. *Accetta* di diorite granitoide con amfibolo nero-verdastro; piana a' lati e nelle facce, convessa nel taglio. Altezza 80, larghezza del taglio 41, della testa 30, spessezza del corpo 24 mm. — Sambiase.

67. *Accetta* di amfibolite spezzata nella testa. Facce e lati piani, taglio retto, spessezza 20 mm. — Filadelfia.

68. *Accetta* di diorite granitoide color grigio-chiaro con numerosi punti opachi di magnetite. Facce e lati piani, taglio poco inarcato. Altezza 73, larghezza del taglio 31, della testa 25, spessezza 17 mm. — Nicastro.

69. *Accetta* di diorite granitoide con pagliette di mica dorata. Facce piane, lati tondeggianti e taglio ad arco della larghezza di 34 mm. Larghezza della testa 26, altezza 72, spessezza 18 mm. — Castiglione.

70. *Accetta* di diorite porfirica, piana a' lati ed alle costole, col taglio lievemente inarcato. Altezza 75, larghezza del taglio 31, della testa 21; spessezza 15 mm. — Sambiase — Tav. IV. fig. 4.

71. *Accetta* di roccia granitica con elementi quarzosi bianco-rosei e poca mica.

Facce convesse, lati retti, taglio lievissimamente inarcato. Altezza 61, larghezza del taglio 32, della testa 20, spessezza del corpo 17 mm. — Feroleto. — Tav. IV. fig. 5.

E) Accette ovali

72. *Accetta* in roccia serpentinosa nerastra con venature rosse, bianche e verdastre. Le superficie leggermente convesse si congiungono fra loro dando origine ad un orlo smussato, che dalla parte dove è il taglio si mostra più assottigliato. Il taglio è nell'abside maggiore dell'ovale, mentre la parte opposta conserva la stessa ottusità del rimanente dell'orlo. L'asse maggiore dell'ovale è 54, il minore 45, la spessezza dell'accetta 19 mm. — Decollatura. — Tav. IV. fig. 6.

73. *Accetta* sottilissima in quarzo di color grigio-perlaceo con l'abside tagliente assai più grande del numero precedente. Asse maggiore dell'istrumento 52, asse minore 36, spessezza 11 mm. — Sambiase.

74. *Accettina* in quarzo roseo con foro al di sotto della testa. È un lavoro molto finito, ed era certamente o un amuleto, o un ornamento che doveasi portare sospeso al collo. È alta 21, larga nel taglio 15, doppia 5 mm. La forma di questa accettina è presso a poco simile a quella della precedente. — Platania. — Tav. IV. fig. 7.

VI. — Sgorbie

La figura generale di questi arnesi rassomiglia a quella delle accette che ho chiamate ovali e rettangolari, ma la loro particolarità consiste in questo, che sono piane da una faccia, più o meno convesse dall'altra, ed il taglio si accompagna alla curva della faccia convessa, e vi forma quella doccia sottile ed arcuata che è propria delle sgorbie. Sono strumenti piuttosto piccoli, e quasi tutti della medesima dimensione. Ne indico qui sotto la grandezza e la roccia da cui sono stati ricavati.

75. *Sgorbia* in diorite porfirica, di squisito lavoro. Ha forma ovale, ed il taglio più stretto dell'asse traversale dell'istrumento. Altezza 63, diametro maggiore della sgorbia 38, larghezza del taglio 34. mm. — Monteleone. — Tav. IV. fig. 8.

76. Altra *sgorbia* di sienite simile alla precedente, alta 68, larga nel mezzo 37, nel taglio 37 mm. — Platania.

77. *Sgorbia* di eufotide della medesima figura. Altezza 75, diametro trasverso 37, larghezza del taglio 33 mm. — È uno degli oggetti più eleganti di tutta la serie. La sua perfetta levigatezza, la sua lucentezza, la sua massa screziata di abbondante diallaggia verde-cupa le dànno un aspetto di vaghezza non comune. — Motta S.ª Lucia. — Tav. IV. fig. 9.

78. Altra *sgorbia* di serpentino spezzata nella testa, col taglio più largo del corpo dell'istrumento, il quale ha il diametro trasversale di 40, mentre quello del taglio è di 44. mm. — Conflenti.

79. *Sgorbia* di cloromelanite, che presenta nella massa piccoli piriti, le quali alterandosi passarono a limonite che, scomparsa per soluzione, lasciò qua e là delle cavità corrispondenti. Altezza 72, diametro mediano 36, del taglio 38 mm. — Gizzeria.

È questo l'unico strumento di cloromelanite che si trovi in tutta la serie.

80. *Sgorbia* di fibrolite, di color latteo con venature e macchie gialle, grige e nere.

È un istrumento a doppio taglio, perchè la testa è anch'essa tagliente, ma col taglio retto, a scalpello e non a sgorbia. Altezza 58, larghezza del taglio a sgorbia 28, di quello retto 19. — Martirano. — Tav. IV. fig. 10.

Anche questo pezzo è unico fra i miei oggetti litici calabresi.

VII. — Scalpello

81. Non ne ho che un solo esemplare, ed è un piccolo strumentino di nefrite leggermente convesso nelle due facce con le costole piatte. È alto 47, largo, nella metà del corpo, 22, e nel taglio 17 mm. Il suo colore è grigio verdastro con venature di un verde più scuro; la struttura della pietra alquanto scistosa. — Sambiase. — Tav. IV. fig. 11.

VIII. — Oggetto di selce

82. Il solo oggetto di selce che io possegga delle Calabrie è una bella freccia in diaspro rosso rinvenuta in S. Giovanni in Fiore nella Provincia di Cosenza. È una freccia con peduncolo ed alette lavorata con molta dilicatezza, e conservata nella sua perfetta integrità. È lunga dalla punta all'estremità del peduncolo 44 mm., e larga fra le due alette 18 mm.

Se riassumiamo ora in un quadro le varie rocce da cui sono formati gli strumenti in pietra delle Calabrie superiormente da nòi descritti, vedremo in un colpo d'occhio di quali elementi minerali i Preistorici Calabresi si servissero di preferenza per la lavorazione degli oggetti necessarî a' loro bisogni.

Natura mineralogica delle rocce in cui sono lavorati gli oggetti	
NOMI DELLE ROCCE	**N.° degli oggetti**
Quarzi e rocce quarzose	6
Diaspro	1
Ftanite.	1
Amfiboliti.	3
Serpentini e rocce serpentinose	8
Graniti.	14
Sieniti	10
Protogini	3
Granuliti	3
Eufotide	1
Eclogite	1
Dioriti	22
Porfido verde.	1
Afaniti.	2
Arenarie compatte	2
Cloromelanite	1
Fibrolite	1
Nefriti.	2
Totale	82

Tutte le Calabrie sono rappresentate nella mia serie, ma la Provincia di Catanzaro è quella che ne ha fornito il maggior numero, perchè in essa si sono fatte le maggiori ricerche per acquistarne. Degli ottantadue strumenti da me riuniti nove soli infatti provengono dalla Provincia di Cosenza, e quattro da quella di Reggio, non ostante il molto interesse che ne hanno preso varî amici, e singolarmente il mio genero D.r G. Petronio, al quale rendo qui pubblicamente i miei più vivi ringraziamenti. I signori Ruggiero e Lovisato non furono più felici di me nel raccogliere oggetti in pietra della Provincia di Cosenza, e di quella di Reggio non ne vedo indicato alcuno nelle memorie da essi pubblicate. È probabile che in quella Provincia non vi si trovino in quel numero che nelle altre due, e mi darebbero argomento a crederlo le parole del Professore Pio Mantovani, il quale non ha guari scriveva al Chierici: *di asce sempre zero, nè so dove dar di capo per raccoglierne* [1]).

I luoghi da cui s'ebbero le pietre che compongono la mia serie sono quasi tutti

[1]) *Bullettino di Paleoetnologia.* A. IV, p. 196.

posti sul versante occidentale, o tirrenico. Non conosco di tutti di essi la vera altitudine, e perciò non posso ne' confermare, ne' infirmare la opinione dell'egregio capitano Ruggero, il quale ha stabilito, che i *limiti de' rinvenimenti degli oggetti litici delle Calabrie sieno tra i 900 e 200 metri di elevazione, ma che la zona più fertile sia quella vicina al limite superiore* [1]). Quello solo che io posso asserire egli è, che si trovano costantemente sui monti, e che se per avventura s'incontrano in pianura, vi sono stati sempre trasportati, per mezzo di torrenti, da luoghi più elevati.

Ventotto sono le contrade da cui provengono gli oggetti da me posseduti. Da alcune appena un esemplare, ma non ne inferisco perciò che le une siano privilegiate a preferenza delle altre. Ove le ricerche sono state più attive, anche ivi la messe è stata più copiosa, ma non è a porsi in dubbio che fossero stati comuni a tutte le Calabrie, da ogni parte delle quali se ne ottennero sia da me, sia dal capitano Ruggero e dal D.r Lovisato. Nel quadro seguente sono indicati i paesi e il numero delle pietre che fornirono alla mia Collezione.

	PROVINCIA DI CATANZARO	Numero degli oggetti
1	Adami	1
2	Bella	1
3	Conflenti	2
4	Cortale.	1
5	Decollatura	3
6	Feroleto antico	2
7	Filadelfia	1
8	Gimigliano	1
9	Gizzeria	5
10	Maida	10
11	Martirano.	1
12	Monteleone	1
13	Motta Santa Lucia	2
14	Nicastro	4
15	Platania	11
16	Sambiase	25
17	San Mango	2
18	Serra S. Bruno	1
19	Sorianello.	1
20	Soveria	2
		69

	PROVINCIA DI COSENZA	Numero degli oggetti
21	Bianchi	2
22	Cariati.	1
23	Castiglione	4
24	S. Giovanni in Fiore . . .	1
25	Stigliano	1
		9

	PROVINCIA DI REGGIO	Numero degli oggetti
26	Seminara	1
27	Sinopoli	1
28	Stilo	2
		4

[1]) *Memoria citata*, p. 17.

Rispetto ai tipi de' varî strumenti, lo specchio che segue ci fa vedere la proporzione degli esemplari onde ciascun tipo è rappresentato nella serie.

Percussori			6
Lisciatoi			3
Macinello			1
Martelli			8
Accette	conoidali	8	
	sub-conoidali	21	
	triangolari	16	56
	rettangolari	8	
	ovali	3	
Sgorbie			6
Scalpello			1
Freccia			1
		Totale	82

Primeggiano adunque fra gli strumenti di pietre delle Calabrie le accette, e fra esse quelle de' tipi sub-conoidale e triangolare. Dopo le accette si presentano in maggior numero i martelli, e quindi le sgorbie e i percussori. Gli altri tipi vi figurano appena.

Questa proporzione è pressochè comune a tutte le altre contrade, nelle quali il numero delle scuri è sempre preponderante su qualunque altra forma di arnesi levigati.

Gli strumenti in pietra per noi descritti si riferiscono tutti a quel periodo preistorico che va distinto col nome di *neolitico*. Gli arnesi levigati non furono in uso che in quella età, che i Francesi chiamano *de la pierre polie*, appunto perchè in quest'epoca, e non mai prima, si adoperarono le pietre levigate. L'uso però di quelle pietre non fu limitato a quel solo periodo, ma si protrasse ancora per lungo tempo nelle epoche posteriori, fin che non furono sostituite interamente da' metalli, di cui si venne più tardi in conoscenza. E anche quando le pietre non furono più adoperate nè come armi, nè come utensili, rimase di esse una benevole ricordanza, credendosi cadute dal Cielo, ed efficaci a proteggere dalle folgori e da altre sventure coloro che erano lieti di possederle. La quale superstiziosa credenza, viva tuttora presso il nostro volgo, è una lontana rimembranza dell'utile che trasse da quelle pietre l'umanità primitiva [1]).

[1]) Come le armi ed utensili preistorici si chiamano dal volgo in Italia *Fulmini*, *Saette*, *Folgorine*, *Cunei di tuoni* secondo la forma che presentano, così ancora presso i volghi delle altre nazioni civili del Globo sono tenuti in conto di oggetti celesti, e vi riscuotono un culto superstizioso. E per non fare menzione che della sola Europa, basti il ricordare che in Grecia si appellano 'Αστροπελέκια, in Francia *Coins de foudre*, o *Pierres de tonnerre:* in Inghilterra *Thunderbots;* in Danimarca *Tordensteen;* in Norvegia *Tonderkiler;* in Germania *Donnerkeile* o *Thorskeile;* in Olanda *Donderbeitels;* in Portogallo *Corrisco:* voci tutte che hanno lo stesso significato di *pietre fulminee*.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. *1.* Martello di diorite porfiroide — *Sambiase.*
» *2.* Altro martello di diorite porfiroide — *Sambiase.*
» *3.* Martello di granito bigio — *Decollatura.*
» *4.* Martello di diorite — *Platania.*

Tavola II.

Fig. *1.* Martello in roccia serpentinosa — *Cortale.*
» *2.* Grande accetta conoidale di sienite — *Nicastro.*
» *3.* Accetta conoidale di granito bigio — *Sambiase.*
» *4.* Accetta conoidale di protogino — *Gizzeria.*
» *5.* Accetta sub-conoidale di ofite — *Motta Santa Lucia.*

Tavola III.

Fig. *1.* Accetta sub-conoidale di quarzo latteo — *Sambiase.*
» *2.* Accetta sub-conoidale di sienite — *Platania.*
» *3.* Accetta sub-conoidale di eclogite — *Bella.*
» *4.* Accetta sub-conoidale di diorite granitica — *Nicastro.*
» *5.* Accetta sub-conoidale di diorite granitoide — *Sorianello.*
» *6.* Accetta sub-conoidale di diorite granitoide — *Adami.*

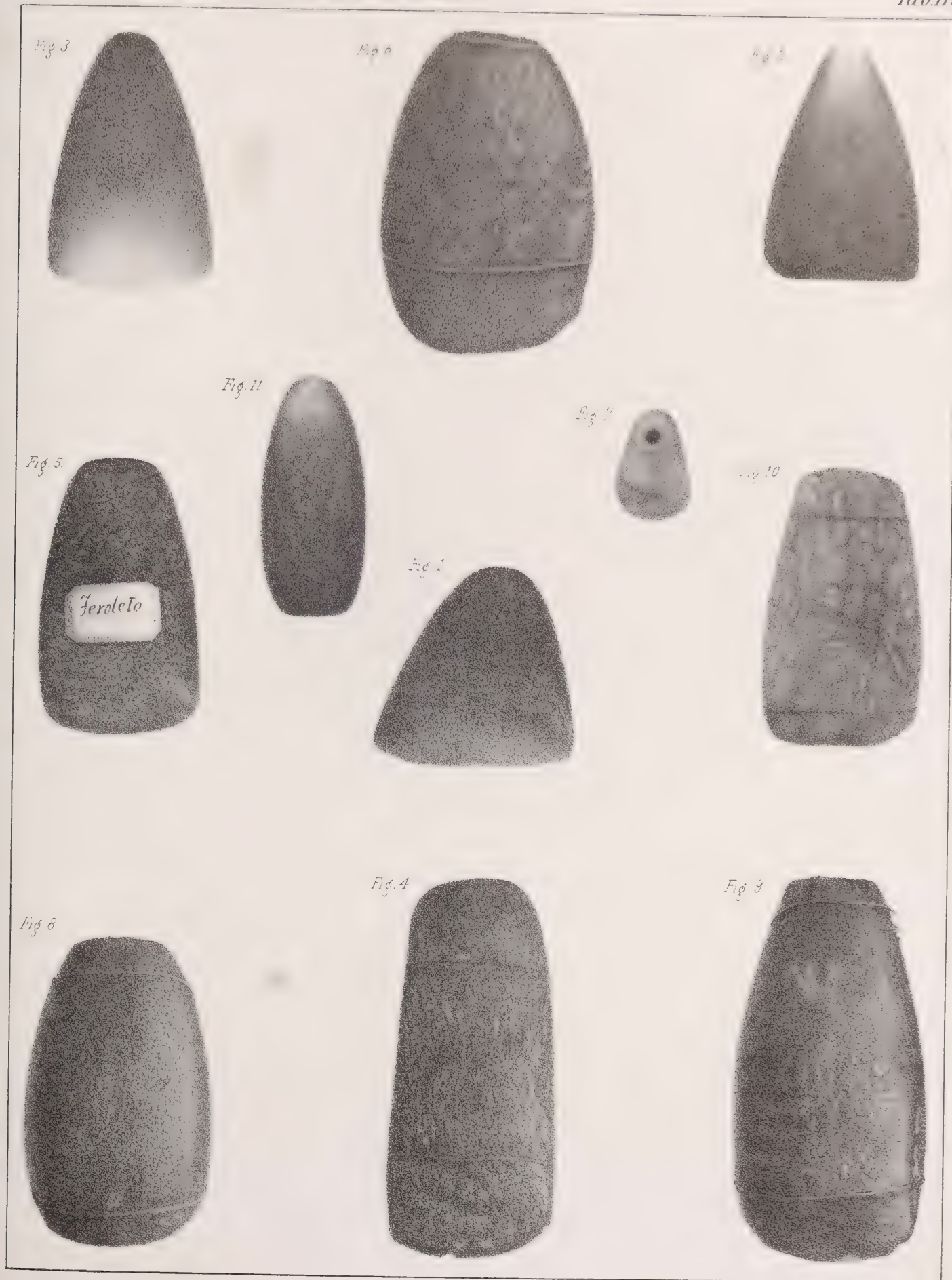
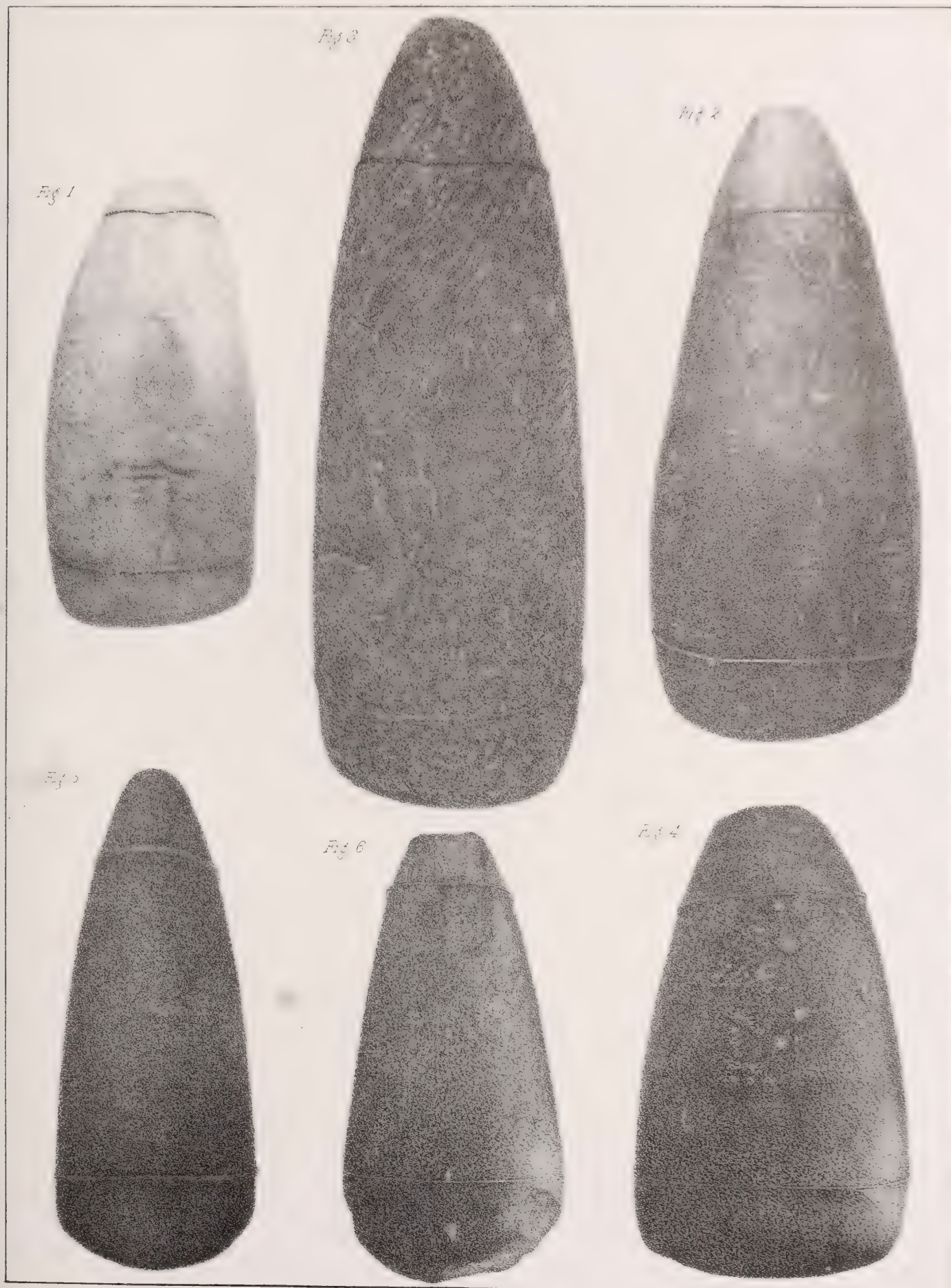
Tavola IV.

Fig. *1.* Accetta triangolare di diorite — *Bianchi.*
» *2.* Accetta triangolare di ftanite — *Serra San Bruno.*
» *3.* Accetta triangolare di nefrite — *Sambiase.*
» *4.* Accetta rettangolare di diorite porfirica — *Sambiase.*
» *5.* Accetta rettangolare di roccia granitoide — *Feroleto.*
» *6.* Accetta ovale di roccia serpentinosa — *Decollatura.*
» *7.* Accettina ovale di quarzo roseo — *Platania.*
» *8.* Sgorbia in diorite porfirica — *Monteleone.*
» *9.* Sgorbia in eufotide — *Motta Santa Lucia.*
» *10.* Sgorbia in fibrolite — *Martirano.*
» *11.* Scalpello di nefrite — *Sambiase.*

finita stampare il dì 23 settembre 1879

V.° Loria Lit

R. Sifo Lit.

R. Sifo dis.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SVILUPPO IN SERIE DELLE TRE DERIVATE PARZIALI DELLA FUNZIONE PERTURBATRICE SECONDO LE POTENZE DEL TEMPO

MEMORIA

del Socio Ordinario ANNIBALE DE GASPARIS

Letta nell'Adunanza del dì 1° Novembre 1879.

Essendo $m_1\, m_2\, m_3 \ldots$ le masse de' pianeti perturbato e perturbatori, ed indicando, come si è usi, la funzione perturbatrice con

$$\Omega = \frac{m_2}{1+m_1}\left(\frac{1}{\rho_{12}} - \frac{z_1 z_2 + y_1 y_2 + x_1 x_2}{r^3_{\,2}}\right) + \frac{m_3}{1+m_1}\left(\frac{1}{\rho_{13}} - \frac{z_1 z_3 + y_1 y_3 + x_1 x_3}{r_3^{\,3}}\right) \ldots$$

si tratta di sviluppare in funzione del tempo le derivate parziali

$$\frac{d\Omega}{dz_1}\,;\ \frac{d\Omega}{dy_1}\,,\ \frac{d\Omega}{dx_1}\,,$$

essendo le equazioni differenziali del moto perturbato di m_1 espresse da

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + k^2(1+m_1)\frac{z_1}{r^3_{\,1}} = k^2(1+m_1)\frac{d\Omega}{dz_1}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + k^2(1+m_1)\frac{y_1}{r^3_{\,1}} = k^2(1+m_1)\frac{d\Omega}{dy_1}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2(1+m_1)\frac{x_1}{r^3_{\,1}} = k^2(1+m_1)\frac{d\Omega}{dx_1}\,.$$

Nella serie che si richiede, i coefficienti nei termini che contengono il tempo fino alla quinta potenza inclusivamente, sono funzioni degli elementi delle ellissi istantanee

de' pianeti per una data epoca. Vedi per maggior chiarezza le due mie note inserite nel Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli in Maggio ed Ottobre 1879, e la Memoria negli Atti della Società Italiana, serie III, tomo III.

Le sudette derivate parziali esplicitamente espresse sono

$$k^2 m_2\left(\frac{z_2}{\rho^3_{12}}-\frac{z_1}{\rho^3_{12}}-\frac{z_2}{r^3_2}\right)+k^2 m_3\left(\frac{z_3}{\rho^3_{13}}-\frac{z_1}{\rho^3_{13}}-\frac{z_3}{r^3_3}\right)+\ldots$$

$$k^2 m_2\left(\frac{y_2}{\rho^3_{12}}-\frac{y_1}{\rho^3_{12}}-\frac{y_2}{r^3_2}\right)+k^2 m_3\left(\frac{y_3}{\rho^3_{13}}-\frac{y_1}{\rho^3_{13}}-\frac{y_3}{r^3_3}\right)+\ldots$$

$$k^2 m_2\left(\frac{x_2}{\rho^3_{12}}-\frac{x_1}{\rho^3_{12}}-\frac{x_2}{r^3_2}\right)+k^2 m_3\left(\frac{x_3}{\rho^3_{13}}-\frac{x_1}{\rho^3_{13}}-\frac{x_3}{r^3_3}\right)+\ldots,$$

e di queste *ciascun termine* dovrà esprimersi con un una serie, mentre poi più serie potranno fondersi in una sola, mediante la somma de' coefficienti de' termini che hanno il tempo alla stessa potenza. Nel primo sviluppo che sarà fatto, saranno prese per variabili indipendenti le due anomalie medie, cioè quelle dei pianeti di masse m_1 ed m_2, poi quelle relative alle masse m_1 ed m_3 ecc. Alle anomalie medie è agevole sostituire il tempo, e ciò non altera la forma de' risultati per la relazione lineare che ha luogo fra queste variabili. Cominceremo dallo sviluppo di $z_2 r_2^{-3}$, $y_2 r_2^{-3}$, $x_2 r_2^{-3}$ che offrono minori difficoltà.

Sviluppo di $z_2 r_2^{-3}$.

Il teorema di Maclaurin dà in primo luogo la serie seguente, in cui l'anomalia media M_2 è espressa in parti dal raggio

$$\frac{z_2}{r^3_2}=\left(\frac{z_2}{r^3_2}\right)_o+\frac{M_2}{1}\left(\frac{z_2}{r^3_2}\right)^{I}_o+\frac{M^2_2}{2}\left(\frac{z_2}{r^3_2}\right)^{II}_o+\frac{M^3_2}{3!}\left(\frac{z_2}{r^3_2}\right)^{III}_o+\frac{M^4_2}{4!}\left(\frac{z_2}{r^3_2}\right)^{IV}_o+\frac{M^5_2}{5!}\left(\frac{z_2}{r^3_2}\right)^{V}_o\ldots; \quad (1)$$

ora indicando con ψ il perielio meno il nodo, cioè $\pi-\varphi$, essendo i l'inclinazione, ed E υ le anomalie eccentrica e vera, è, poste inoltre essere a ed e il semiasse maggiore e l'eccentricità

$$z_2=a_2 \operatorname{sen} i_2 \operatorname{sen}(\upsilon_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)\ldots, \quad (1)'$$

e quindi si ricava

$$\frac{z_2}{r^3_2}=\frac{\operatorname{sen} i_2 \operatorname{sen}(\upsilon_2+\psi_2)}{a^2_2(1-e_2\cos E_2)^2}=\frac{\operatorname{sen} i_2}{a^2}\operatorname{sen}(\upsilon_2+\psi_2)\,E_2^{I2},$$

perchè si sa essere

$$r_2=a_2(1-e_2\cos E_2)\,,\quad \text{e}\quad \frac{dE_2}{dM_2}=E_2^{\,I}=(1-e_2\cos E_2)^{-1}; \quad (2)$$

onde è chiaro che le varie derivate di $\frac{z_2}{r_2^3}$ prese rispetto ad M_2, ed apprezzate pel caso di $M_2=0$ potranno calcolarsi dalle derivate della funzione $\operatorname{sen}(\upsilon_2+\psi_2)E_2^{I2}$, e per conseguenza dalle derivate di $\operatorname{sen}(\upsilon_2+\psi_2)$ e di E_2^{I2}.

Prendendo tali derivate si trova per E

$$(E^{I2}_2)^{I} = 2E^{I}_2\,E^{II}_2\ ;\ (E^{I2}_2)^{II} = 2E^{II2}_2 + 2E^{I}_2\,E^{III}_2$$

$$(E^{I2}_2)^{III} = 6E^{II}_2\,E^{III}_2 + 2E^{I}_2\,E^{IV}_2\ ;\ (E^{I2}_2)^{IV} = 6E^{III2}_2 + 8E^{II}_2\,E^{IV}_2 + 2E^{I}_2\,E^{V}$$

$$(E^{I2}_2)^{V} = 20E^{III}_2\,E^{IV}_2 + 10E^{II}_2\,E^{V}_2 + 2E^{I}_2\,E^{VI}_2$$

e per sen $(\upsilon + \psi)$

$$[\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{I} = \cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I}_2$$

$$[\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{II} = -\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I2}_2 + \cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{II}_2$$

$$[\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{III} = -\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I3} - 3\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I}_2\,\upsilon^{II}_2 + \cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{III}_2$$

$$[\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{IV} = \mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I4}_2 - 6\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I2}_2\,\upsilon^{II}_2 - 3\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{II2}_2$$
$$-\,4\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I}_2\,\upsilon^{III}_2 + \cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{IV}_2$$

$$[\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{V} = \cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I5}_2 + 10\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I3}_2\,\upsilon^{II}_2 - 15\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I}_2\,\upsilon^{II2}_2$$
$$-10\cos\,(\upsilon_2+\psi)\,\upsilon^{I2}_2\,\upsilon^{III}_2 - 10\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{II}_2\,\upsilon^{III}_2 - 5\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I}_2\,\upsilon^{IV}_2$$
$$+\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{V}_2\ ;$$

a queste faremo seguire anche le varie derivate di cos $(v_2 + \psi_2)$ prese rispetto ad M_2. perchè, in unione alle precedenti, serviranno agli sviluppi anche di $\frac{y_2}{r^3_2}$ e di $\frac{x_2}{r^3_2}$. Si trova così, fatte poche riduzioni, come precedentemente

$$[\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{I} = -\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I}_2$$

$$[\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{II} = -\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I2}_2 - \mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{II}_2$$

$$[\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{III} = \mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I3}_2 - 3\cos\,(\upsilon_2+\psi)\,\upsilon^{I}_2\,\upsilon^{II}_2 - \mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{III}_2$$

$$[\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{IV} = \cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I4}_2 + 6\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I2}_2\,\upsilon^{II}_2 - 3\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{II2}_2$$
$$-\,4\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I}_2\,\upsilon^{III}_2 - \mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{IV}_2$$

$$[\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)]^{V} = -\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I5}_2 + 10\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I3}_2\,\upsilon^{II}_2 + 15\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I}_2\,\upsilon^{II2}_3$$
$$+\,10\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I2}_2\,\upsilon^{III}_2 - 10\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{II}_2\,\upsilon^{III}_2 - 5\cos\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{I}_2\,\upsilon^{IV}_2$$
$$-\,\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)\,\upsilon^{V}_2\,.$$

Tenendo ora presenti i valori delle varie derivate di E_2 e v_2 per $M_2 = 0$ (vedi lavori citati), è agevole dedurre che

$$(E^{I2}_2)_o^{\,I} = (E^{I2}_2)_o^{\,III} = (E^{I2}_2)_o^{\,V} = 0$$

$$(E^{\ 2}_2)_o^{\,II} = -\frac{2e_2}{(1-e_2)^5}\quad ;\quad (E^{I2}_2)_o^{\,IV} = \frac{2e_2+24e^2_2}{(1-e_2)^8}$$

$$[\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]_o^{\,I} = \cos\psi_2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{1}{1-e_2}\quad ;\quad [\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]_o^{\,II} = -\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,\frac{1+e_2}{1-e_2}\,\frac{1}{(1-e_2)^2}$$

$$[\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]_o^{\,III} = -\cos\psi_2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{1+3e_2}{(1-e_2)^4}\quad ;\quad [\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]_o^{\,IV} = \mathrm{sen}\,\psi_2\,(1+e_2)\,\frac{(1+9e_2)}{(1-e_2)^6}$$

$$[\mathrm{sen}\,(\upsilon_2+\psi_2)]_o^{\,V} = \cos\psi_2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{1+24e_2+45e_2^2}{(1-e_2)^7}\,,$$

*

e similmente per le derivate di $\cos(v_2+\psi_2)$ risulta

$$[\cos(v_2+\psi)]_o^{\mathrm{I}} = -\operatorname{sen}\psi_2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{1}{1-e_2} \quad ; \quad [\cos(v_2+\psi_2)]_o^{\mathrm{II}} = -\cos\psi_2\,\frac{1+e_2}{1-e_2}\,\frac{1}{(1-e)^2}$$

$$[\cos(v_2+\psi_2)]_o^{\mathrm{III}} = \operatorname{sen}\psi_2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{1+3e_2}{(1-e_2)^4} \quad ; \quad [\cos(v_2+\psi_2)]_o^{\mathrm{IV}} = \cos\psi\,(1+e_2)\,\frac{1+9e_2}{(1-e_2)^6}$$

$$[\cos(v_2+\psi_2)]_o^{\mathrm{V}} = -\operatorname{sen}\psi_2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{1+24e_2+45e^2_2}{(1-e_2)^7}\,.$$

Ciò trovato, potendo la serie (1) scriversi ancora

$$\frac{a^2_2}{\operatorname{sen} i_2}\,\frac{z_2}{r^3_2} = [\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)\,\mathrm{E}'^2{}_2]_o + \frac{\mathrm{M}_2}{1}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)\,\mathrm{E}'^2{}_2]_o^{\mathrm{I}}$$
$$+\frac{\mathrm{M}^2_2}{2}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)\mathrm{E}'^2]_o^{\mathrm{II}} + \frac{\mathrm{M}^3_2}{3!}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)\,\mathrm{E}'^2{}_2]_o^{\mathrm{III}}$$
$$+\frac{\mathrm{M}^4_2}{4!}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)\,\mathrm{E}'^2{}_2]_o^{\mathrm{IV}} + \frac{\mathrm{M}^5_2}{5!}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)\,\mathrm{E}'^2{}_2]_o^{\mathrm{V}} + \ldots,$$

facendo uso della nota formola che dà la derivata di un prodotto in funzione delle derivate dei fattori, avremo infine

$$\mathrm{F}_2 = \frac{a^2_2}{\operatorname{sen} i_2}\,\frac{z_2}{r^3_2} = \frac{\operatorname{sen}\psi}{(1-e_2)^2} + \frac{\mathrm{M}_2}{1}\cos\psi_2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{1}{(1-e_2)^3} - \frac{\mathrm{M}^2_2}{2}\operatorname{sen}\psi_2\,\frac{1+3e_2}{(1-e_2)^5}$$
$$-\frac{\mathrm{M}^3_2}{3!}\cos\psi_2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{1+9e_2}{(1-e_2)^6} + \frac{\mathrm{M}^4_2}{4!}\operatorname{sen}\psi_2\,\frac{1+24e_2+45e^2_2}{(1-e_2)^8} \qquad (3)$$
$$+\frac{\mathrm{M}^5_2}{5!}\cos\psi_2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{1+54e_2+225e^2_2}{(1-e_2)^9} - \frac{\mathrm{M}^6_2}{6!}\operatorname{sen}\psi_2\,\frac{1+117e_2+1107e^2_2+1575e^3_2}{(1-e)^{11}}$$

Prima di procedere oltre è necessario fare alcune riflessioni su questa prima serie, ed altrettanto potrà dirsi di quelle che dànno lo sviluppo di $y_2 r_2^{-3}$, e di $x_2 r_2^{-3}$.

Gravissime e seriissime obiezioni possono esser fatte per sostenere che vi è poca convenienza nello adoperare la presente serie. Fra i diversi appunti, quelli che mi sembrano più salienti (e ve ne ha forse altri che ora non ho presenti) possono ridursi ai seguenti:

1. Evidentemente ove la eccentricità non sia piccolissima, la convergenza è, per lo meno, estremamente lenta.

2. L'aver sostituito ai seni e coseni dell'anomalia media, il valore di questa variabile in parti del raggio, ha fatto perdere alle formole il carattere preziosissimo di periodicità che prima avevano.

3. Col presentarsi l'anomalia media, espressa in parti del raggio, a potenze sempre crescenti, si vede che i valori dei termini aumentano e, per grandi angoli, possono superare l'unità, ed anche esserne un multiplo. I segni alternati mentre da un

lato non dimostrano proprio una inevitabile divergenza, sono un altro indizio di convergenza lentissima.

4. I numeratori, funzioni dell'eccentricità, che si trovano divisi da binomii della forma $(1-e)^n$ sono essi stessi de' grandi numeri per poco che il numero de' termini cresca, e non è finora nota la legge colla quale progrediscono.

5. Infine la convergenza rimane assai lenta, anche nel caso specialissimo di eccentricità eguale a zero.

Cercherò, per quanto l'argomento può comportarlo, di attenuare le precedenti obiezioni.

1. Le eccentricità delle orbite dei pianeti principali del nostro sistema solare, sono *di fatto* piccolissime. Le eccentricità di Mercurio e di Marte, che hanno le più piccole masse, hanno il valore di due e di una decima, mentre quelle degli altri raggiungono appena la mezza centesima, o riescono di molto inferiori. Non è da preoccuparsi de' piccoli pianeti fra Marte e Giove, perchè le loro masse essendo piccolissime, non esercitano influenze perturbatrici apprezzabili.

2. Col sostituire, nelle formole finali, il tempo alle anomalie medie, si può sempre, nello apprezzare la correzione da fare alle coordinate ellittiche per avere le posizioni nella trajettoria perturbata, prendere limitati periodi di tempo, secondo i casi, e far sì che le varie potenze del tempo, ne' successivi termini della serie, diano quantità rapidamente decrescenti.

3. Comunque sia finora ignota la legge di formazione de' numeratori funzioni della eccentricità, pure ammessa l'eccentricità piccolissima, i grandi numeri che minacciano di presentarsi debbono assai ridursi perchè riescono moltiplicati per potenze sempre crescenti della eccentricità medesima.

4. Ritenuto ancora come esatto che la convergenza sia, in generale assai lenta, benchè le fattoriali di numeri sempre crescenti che sono ne' denominatori debbono infine prevalere, è innegabile che non sia poi necessario aver molte cifre esatte dello elemento svolto in serie. Infatti, trattandosi di apprezzare soltanto correzioni al moto ellittico, di aver cioè il valore di quantità estremamente piccole, forse tre ed anche due cifre decimali esatte dello elemento, potranno bastare.

5. Infine mi si accordi che sedotto dalla novità delle ricerche, convinto che se pure qualche appicco possono offrire alle applicazioni, altri potrà migliorarle, fidando nell'imprevisto che secondo l'Arago spesso prende la parte del leone, ho creduto lavorarvi sopra, pur di vedere il muso di nuove formole.

Ove nella serie (3) si ponga $e_2=0$, viene

$$\frac{a^2_2}{\operatorname{sen} i_2}\frac{z_2}{r^3_2}=\operatorname{sen}\psi_2\left(1-\frac{M^2_2}{2}+\frac{M^4_2}{4!}-\frac{M_2}{6!}\dots\right)$$

$$+\cos\psi\left(M_2-\frac{M^3_2}{3!}+\frac{M^5_2}{5!}\dots\right)=\operatorname{sen}(\psi_2+M_2),$$

la quale coincide con la (1)*, poichè nella ipotesi di $e_2=0$, si ha $r_2=a_2$, e $v_2=M_2$.

Sviluppo di $\frac{y_2}{r^3_2}$ *e di* $\frac{x_2}{r^3_2}$.

sono conosciute le formole

$$y_2 = a_2 \operatorname{sen}\varphi_2 [\cos(v_2 + \psi_2)(1 - e_2 \cos E_2)] + a_2 \cos\varphi_2 \cos i_2 [\operatorname{sen}(v_2 + \psi_2)(1 - e_2 \cos E_2)]$$

$$x_2 = a_2 \cos\varphi_2 [\cos(v_2 + \psi_2)(1 - e_2 \cos E_2)] - a_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \cos i_2 (\operatorname{sen}(v_2 + \psi_2)(1 - e_2 \cos E_2)],$$

col tener presenti le due (2) si deduce

$$\frac{y_2}{r^3_2} = \frac{\operatorname{sen}\varphi_2}{a^2_2} \cos(v_2 + \psi_2) E^{12}_2 + \frac{\cos\varphi_2}{a^2_2} \cos i_2 \operatorname{sen}(v_2 + \psi_2) E^{12}_2$$

$$\frac{x_2}{r^3_2} = \frac{\cos\varphi_2}{a^2_2} \cos(v_2 + \psi_2) E^{12}_2 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_2}{a^2_2} \cos i_2 \operatorname{sen}(v_2 + \psi_2) E^{12}_2.$$

Indicando con F_2 il secondo membro della (3) cioè lo sviluppo in serie in funzione dell'anomalia media del valore di $\operatorname{sen}(v_2 + \psi_2) E^{12}_2$, e con G_2 lo sviluppo in serie del valore di $\cos(v_2 + \psi_2) E^{12}$, si ha

$$\begin{aligned} G_2 = {} & \frac{\cos\psi_2}{(1-e)^2} - \frac{M_2}{1} \operatorname{sen}\psi_2 \sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}} \frac{1}{(1-e_2)^3} - \frac{M^2_2}{2} \cos\psi_2 \frac{1+3e_2}{(1-e_2)^5} \\ & + \frac{M^3_2}{3!} \operatorname{sen}\psi_2 \sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}} \frac{1+9e_2}{(1-e_2)^6} + \frac{M^4_2}{4} \cos\psi_2 \frac{1+24e_2+45e^2_2}{(1-e_2)^8} \\ & - \frac{M^5_2}{5!} \operatorname{sen}\psi_2 \sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}} \frac{1+54e_2+225e^2_2}{(-e_2)^9} - \frac{M^6_2}{6!} \cos\psi_2 \frac{1+117e_2+1107e^2_2+1575e^3_2}{(1-e_2)^{11}} + \end{aligned} \tag{4}$$

Onde due sole serie saranno sufficienti per lo sviluppo delle tre espressioni $\frac{z^2}{r^3_2}$, $\frac{y_2}{r^3_2}$, $\frac{x^2}{r^3_2}$, ed avremo

$$\frac{z_2}{r^3_2} = \frac{\operatorname{sen} i_2}{a^2_2} F_2 \,;\; \frac{y_2}{r^3_2} = \frac{\operatorname{sen}\varphi_2}{a^2_2} G_2 + \frac{\cos\varphi_2 \cos i_2}{a^2_2} F_2$$

$$\frac{x_2}{r^3_2} = \frac{\cos\varphi_2}{a^2_2} G_2 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_2 \cos i_2}{a^2_2} F_2,$$

si ricava da queste ultime, elevando a quadrato,

$$\frac{a^4_2}{r^4_2} = F^2_2 + G^2_2,$$

onde colle stesse serie potrà esprimersi anche il raggio vettore.

Sviluppo di $\frac{z_1}{\rho_{12}^3}$ *e di* $\frac{z_2}{\rho_{12}^3}$.

Partendo dal valore di z_2 dato dalla (1)*, si ha evidentemente

$$\frac{z_2}{a_2 \operatorname{sen} i_2} = [\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)]_o + \frac{M_2}{1}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)]_o^{I}$$

$$+\frac{M_2^2}{2}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)]_o^{II} + \frac{M_2^3}{3!}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)]_o^{III} \tag{5}$$

$$+\frac{M_2^4}{4!}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)]_o^{IV} + \frac{M_2^5}{5!}[\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)]_o^{V} + \ldots;$$

intanto per le successive derivate di $(1 - e\cos E)$ si è trovato (vedi note citate)

$$(1-e_2\cos E_2)_o^{I} = (1-e_2\cos E_2)_o^{III} = (1-e_2\cos E_2)_o^{V} = 0$$

$$(1-e_2\cos E_2)_o^{III} = \frac{e_2}{(1-e_2)^2}\,;\ (1-e_2\cos E_2)_o^{IV} = -\frac{e_2(1+3e_2)}{(1-e_2)^5}$$

$$(1-e_2\cos E_2)_o^{VI} = \frac{e_2(1+24e_2+45e_2^2)}{(1-e_2)^8}.$$

Eseguite le derivazioni indicate nella (5), si trova

$$\frac{z_2}{a_2 \operatorname{sen} i_2} = (1-e_2)\operatorname{sen}\psi_2 + \frac{M^2}{1}\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2 - \frac{M_2^2}{2}\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^2} - \frac{M_2^3}{3!}\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^3}$$

$$+\frac{M_2^4}{4!}(1+3e_2)\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^5} + \frac{M_2^5}{5!}\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}(1+9e_2)\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^6} - \ldots; \tag{6}$$

evidentemente si ha ancora

$$\frac{z_1}{a_1 \operatorname{sen} i_1} = (1-e_1)\operatorname{sen}\psi_1 + \frac{M_1}{1}\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\cos\psi_1 - \frac{M_1^2}{2}\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{(1-e_1)^2} - \frac{M_1^3}{3!}\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^3}$$

$$+\frac{M_1^4}{4!}(1+3e_1)\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{(1-e_1)^5} + \frac{M_1^5}{5!}\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}(1+9e_1)\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^6}.$$

È questo il luogo di esibire, come ora si è fatto per z, alcuni risultati per y e per x onde preparare i dati che saranno necessarii allo sviluppo di $\frac{y}{\rho^3}$, $\frac{x}{\rho^3}$. Si sa essere

$$z = a \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(v+\psi)(1-e\cos E)$$

$$y = a \operatorname{sen}\varphi[\cos(v+\psi)(1-e\cos E)] + a\cos\varphi\cos i[\operatorname{sen}(v+\psi)(1-e\cos E)] \tag{7}^*$$

$$x = a\cos\varphi[\cos(v+\psi)(1-e\cos E)] - a\operatorname{sen}\varphi\cos i[\operatorname{sen}(v+\psi)(1-e\cos E)]$$

operando ora sopra $\cos(v_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)$, come precedentemente si è fatto per $\operatorname{sen}(v_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)$, si trova

$$\cos(v_2+\psi_2)(1-e_2\cos E_2)=(1-e_2)\cos\psi_2-\frac{M_2}{1}\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2-\frac{M^2_2}{2}\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}+$$

$$+\frac{M^3_2}{3!}\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^3}+\frac{M^4_2}{4!}(1+3e_2)\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^5}-\frac{M^5_2}{5!}\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}(1+9e_2)\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^6}\ldots; \quad (8)$$

quindi contrasegnando con H_2 e K_2 i secondi membri delle (6) (8), le tre coordinate della massa m_2 si ottengono dalle tre seguenti equazioni:

$$z_2=a_2\operatorname{sen} i_2 H_2 \quad ; \quad y_2=a_2\operatorname{sen}\varphi_2 K_2+a_2\cos\varphi_2\cos i H_2 \quad ; \quad x_2=a_2\cos\varphi_2 K_2-a_2\operatorname{sen}\varphi_2\cos i_2 H_2 ;$$

e per la massa m_1, le coordinate si hanno dalle altre tre

$$z_1=a_1\operatorname{sen} i_1 H_1 \quad ; \quad y_1=a_1\operatorname{sen}\varphi_1 K_1+a_1\cos\varphi_1\cos i_1 H_1 \quad ; \quad x_1=a_1\cos\varphi_1 K_1-a_1\operatorname{sen}\varphi_1\cos i_1 H_1 ;$$

ed in queste ultime, com'è chiaro, le $H_1 K_1$ sono ciò che diventano i secondi membri delle (6) (8) allorchè l'indice 2 si muta nell'indice 1.

Rinviando, pe'simboli adoperati, alla memoria sopra citata, resta ora a vedere come si sviluppino in serie le espressioni $z_2\rho_{12}^{-3}$, $z_1\rho_{12}^{-3}$, e s'intende che dovranno farsi operazioni della stessa indole per lo sviluppo di $y_1\rho_{12}^{-3}$, $y_2\rho_{12}^{-3}$ ecc. In primo luogo pel teorema di Maclaurin si presenta la seguente serie (in cui $\rho^{-3}=U^{-\frac{3}{2}}$):

$$\begin{aligned}z_2\rho_1^{-3}=&\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)+\frac{M_1}{1}\frac{d\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_1}+\frac{M_2}{1}\frac{d\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_2}\\ &+\frac{M^2_1}{2}\frac{d^2\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^2_1}+\frac{M_1M_2}{1.1.}\frac{d^2\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_1dM_2}+\frac{M^2_2}{2}\frac{d^2\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^2_2}\\ &+\frac{M^3_1}{3!}\frac{d^3\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^3_1}+\frac{M^2_1M_2}{2.1}\frac{d^3\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^2_1dM_2}+\frac{M_1M^2_2}{1.2}\frac{d^3\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_1dM^2_2}+\frac{M^3_2}{3!}\frac{d^3\left(z_2U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^3_2},\end{aligned} \quad (9)$$

e così procedendo innanzi fino al termine $\frac{M^5_2}{5!}\frac{d^5(z_2U^{-\frac{3}{2}})_o}{dM^5_2}$, ch'è il limite dell'approssimazione che si vuol raggiungere.

Affinchè i coefficienti delle M nella precedente serie possano esprimersi in quantità che siano funzioni degli elementi ellittici dei due pianeti, è d'uopo tener presenti i valori delle varie derivate di z_2 per $M_2=0$, e quelli delle varie derivate di $U^{-\frac{3}{2}}$ per $M_1=0$, $M_2=0$. Nella serie (9) si presentano derivate di prodotti, ed hanno luogo numerose

semplificazioni per la circostanza che in z_2 non si contiene la M_1, e lo stesso avverrà nella serie analoga alla (9) allorchè si cercherà lo sviluppo di $z_1 \rho_{12}^{-3}$ non contenendosi la M_2 in z_1.

Dalla (6) si ottiene

$$(z_2)_o = a_2 \operatorname{sen} i_2 (1-e_2) \operatorname{sen} \psi_2 \quad ; \quad \left(\frac{dz_2}{dM_2}\right)_o = a_2 \operatorname{sen} i_2 \sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}} \cos\psi_2$$

$$\left(\frac{d^2 z_2}{dM_2^2}\right)_o = -a_2 \operatorname{sen} i_2 \frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^2} \quad ; \quad \left(\frac{d^3 z_2}{dM_2^3}\right)_o = -a_2 \operatorname{sen} i_2 \sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}} \frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^3} \qquad (10)$$

$$\left(\frac{d^4 z_2}{dM_2^4}\right)_o = a_2 \operatorname{sen} i_2 (1+3e_2) \frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^5} \quad ; \quad \left(\frac{d^5 z_2}{dM_2^5}\right)_o = a_2 \operatorname{sen} i_2 \sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}} (1+9e_2) \frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^6} ;$$

per ottenere le varie derivate di z_1 prese rispetto ad M_1 ed averne i valori pel caso di $M_1 = 0$, basta mutare in queste ultime relazioni l'indice 2 nell'indice 1.

Per quanto concerne i valori delle derivate fino al quinto ordine compreso, di $U^{-\frac{3}{2}}$ per $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, essi si trovano nel lavoro testè ricordato. Intanto, affinchè la presente memoria sia un tutto indipendente, riporterò qui appresso le derivate in parola, ricordando ancora il significato di alcuni simboli ausiliarii.

Tenuto adunque presente che

$$\begin{aligned} R_0 = & \operatorname{sen}\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \operatorname{sen} i_1 \operatorname{sen} i_2 + \cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ & + \operatorname{sen}\psi_1 \cos\psi_2 \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \cos i_1 + \cos\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) \cos i_2 \\ & + \operatorname{sen}\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cos i_1 \cos i_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_0}{d\psi_1} = & \cos\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \operatorname{sen} i_1 \operatorname{sen} i_2 - \operatorname{sen}\psi_1 \cos\psi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ & + \cos\psi_1 \cos\psi_2 \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \cos i_1 - \operatorname{sen}\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) \cos i_2 \\ & + \cos\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \cos(\varphi_2 - \omega_1) \cos i_1 \cos i_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_0}{d\psi_2} = & \operatorname{sen}\psi_1 \cos\psi_2 \operatorname{sen} i_1 \operatorname{sen} i_2 - \cos\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ & - \operatorname{sen}\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \cos i_1 + \cos\psi_1 \cos\psi_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) \cos i_2 \\ & + \operatorname{sen}\psi_1 \cos\psi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cos i_1 \cos i_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_0}{d\psi_1 d\psi_2} = & \cos\psi_1 \cos\psi_2 \operatorname{sen} i_1 \operatorname{sen} i_2 + \operatorname{sen}\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_2) \\ & - \cos\psi_1 \operatorname{sen}\psi_2 \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \cos i_1 - \operatorname{sen}\psi_1 \cos\psi_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi) \cos i_2 \\ & + \cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cos i_1 \cos i_2 , \end{aligned}$$

ed inoltre che

$$A_1 = 2a_1 a_2 (1-e_2) \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \frac{dR_0}{d\psi_1} \quad ; \quad A_2 = 2a_1 a_2 (1-e_1) \sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}} \frac{dR_0}{d\psi_2}$$

$$B_1 = \frac{2a^2{}_1 e_1}{1-e_1} + \frac{2a_1 a_2 (1-e_2)}{(1-e_1)^2} R_0 \quad ; \quad B_2 = 2a_1 a_2 \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}} \frac{d^2 R_0}{d\psi_1 \, d\psi_2}$$

$$B_3 = \frac{2a^2{}_2 e_2}{1-e_2} + \frac{2a_1 a_2 (1-e_1)}{(1-e_2)^2} R_0 \; ;$$

adoperando ancora dei simboli numerici fra parentesi (la cui forma e convenienza è evidente), avremo

$$U_o^{-\frac{3}{2}} = [a^2{}_1 (1-e_1)^2 + a^2{}_2 (1-e_2)^2 - 2a_1 a_2 (1-e_1)(1-e_2) R_o]^{-\frac{3}{2}}$$

$$(1^1) = \frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_1} = \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} A_1 \quad ; \quad (2^1) = \frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_2} = \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} A_2 \tag{11}$$

$$(1^2) = \frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^2{}_1} = \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A^2{}_1 - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} B_1$$

$$(1^1 2^1) = \frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_1 \, dM_2} = \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_1 A_2 + \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} B_2$$

$$(2^2) = \frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^2{}_2} = \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A^2{}_2 - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} B_3$$

$$(1^3) = \frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^3{}_1} = \frac{105}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A^3{}_1 - \frac{45}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_1 B_1 - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{A_1}{(1-e_1)^3}$$

$$(1^2 2^1) = \frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^2{}_1 \, dM_2} = \frac{105}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A^2{}_1 A_2 + \frac{30}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_1 B_2 - \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_2 B_1 - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{A_2}{(1-e_1)^3}$$

$$(1^1 2^2) = \frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_1 \, dM^2{}_2} = \frac{105}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 A^2{}_2 + \frac{30}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_2 B_2 - \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_1 B_3 - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{A_1}{(1-e_2)^3}$$

$$(2^3) = \frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^3{}_2} = \frac{105}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A^3{}_2 - \frac{45}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_2 B_3 - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{A_2}{(1-e_2)^3}$$

$$(1^4) = \frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^4_1} = \frac{945}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^4_1 - \frac{630}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A^2_1 B_1 + \frac{45}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} B^2_1$$

$$- \frac{60}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A^2_1}{(1-e_1)^3} + \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{B_1}{(1-e_1)^3} + U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{9a_1 a_2 e_1 (1-e_2)}{(1-e_1)^5} R_o$$

$$(1^3 2^1) = \frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^3_1\, dM_2} = \frac{945}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^3_1 A_2 + \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A^2_1 B_2 - \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 A_2 B_1$$

$$- \frac{45}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} B_1 B_2 - \frac{60}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 A_2}{(1-e_1)^3} - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{B_2}{(1-e_1)^3}$$

$$(1^2 2^2) = \frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^2_1\, dM^2_2} = \frac{945}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^2_1 A^2_2 + \frac{420}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 A_2 B_2 - \frac{105}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A^2_1 B_3$$

$$- \frac{105}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A^2_2 B_1 + \frac{30}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} B^2_2 + \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} B_1 B_3$$

$$- \frac{30}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A^2_1}{(1-e_2)^3} - \frac{30}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A^2_2}{(1-e_1)^3} + U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{3a_1 a_2}{(1-e_1)^2 (1-e_2)^2} R_o$$

$$(1^1 2^3) = \frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_1\, dM^3_2} = \frac{945}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A_1 A^3_2 + \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A^2_2 B_2 - \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 A_2 B_3$$

$$- \frac{45}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} B_2 B_3 - \frac{60}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 A_2}{(1-e_2)^3} - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{B_2}{(1-e_2)^3}$$

$$(2^4) = \frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^4_2} = \frac{945}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^4_2 - \frac{630}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A^2_2 B_3 + \frac{45}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} B^2_3$$

$$- \frac{60}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A^2_2}{(1-e_2)^3} + \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{B_3}{(1-e_2)^3} + U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{9 a_1 a_2 e_2 (1-e_1)}{(1-e_2)^5} R_o$$

$$(1^5) = \frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^5_1} = \frac{10395}{32} U_o^{-\frac{13}{2}} A^5_1 - \frac{9450}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^3_1 B_1 + \frac{1575}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 B^2_1$$

$$- \frac{1050}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} \frac{A^3_1}{(1-e_1)^3} + \frac{225}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 B_1}{(1-e_1)^3} + \frac{450}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_1 \frac{a_1 a_2 e_1 (1-e_2)}{(1-e_1)^5} R_o$$

$$+ \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{A_1 (1+9e_1)}{(1-e_1)^6}$$

$$(1^4 2^1) = \frac{d^5 \left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^4_1\, dM_2} = \frac{10395}{32} U_o^{-\frac{13}{2}} A^4_1 A_2 - \frac{5670}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^2_1 A_2 B_1 + \frac{3780}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^3_1 B_2$$

$$- \frac{1260}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 B_1 B_2 - \frac{1050}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} \frac{A^2_1 A_2}{(1-e_1)^3} + \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_2 B^2_1$$

$$+ \frac{90}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_2 B_1}{(1-e_1)^3} - \frac{120}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 B_2}{(1-e_1)^3} + \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 B_1}{(1-e_1)^2}$$

$$+ \frac{90}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_1 \frac{a_1 a_2 e_1 (1-e_2)}{(1-e_1)^5} R_o + \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} A_2 \frac{1+3e_1}{(1-e_1)^6}$$

$$(1^3 2^2) = \frac{d^5 \left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^3_1\, dM^2_2} = \frac{10395}{32} U_o^{-\frac{13}{2}} A^3_1 A^2_2 + \frac{5670}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^2_1 A_2 B_2 - \frac{945}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^3_1 B_3$$

$$- \frac{2835}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A_1 A^2_2 B_1 + \frac{630}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 B^2_2 - \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} \frac{A^3_1}{(1-e_2)^3}$$

$$+ \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 B_1 B_3 - \frac{630}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_2 B_1 B_2 - \frac{735}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} \frac{A_1 A^2_2}{(1-e_1)^3}$$

$$+ \frac{45}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 B_1}{(1-e_2)^3} - \frac{90}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_2 B_2}{(1-e_1)^3} + \frac{90}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 a_1 a_2 R_o}{(1-e_1)^2 (1-e_2)^2}$$

$$+ \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 B_3}{(1-e_1)^3} - \frac{30}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_2 B_2}{(1-e_1)^3} - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{A_1}{(1-e_1)^3 (1-e_2)^3}$$

$$(1^2 2^3) = \frac{d^5 \left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^2_1\, dM^3_2} = \frac{10395}{32} U_o^{-\frac{13}{2}} A^2_1 A^3_2 + \frac{5670}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A_1 A^2_2 B_2 - \frac{945}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^3_2 B_1$$

$$- \frac{2835}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^2_1 A_2 B_3 - \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} \frac{A^3_2}{(1-e_1)^3} + \frac{630}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_2 B^2_2$$

$$+ \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_2 B_1 B_3 - \frac{630}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 B_2 B_3 - \frac{735}{8} U_0^{-\frac{9}{2}} \frac{A^2_1 A_2}{(1-e_2)^3}$$

$$+ \frac{45}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_2 B_3}{(1-e_1)^3} - \frac{90}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 B_2}{(1-e_2)^3} + \frac{90}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_2 a_1 a_2 R_o}{(1-e_1)^2 (1-e_2)^2}$$

$$+ \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_2 B_1}{(1-e_2)^3} - \frac{30}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 B_2}{(1-e_2)^3} - \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} \frac{A_2}{(1-e_1)^3 (1-e_2)^3}$$

$$(1^1 2^4) = \frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM_1\,dM^4_2} = \frac{10395}{32} U_o^{-\frac{13}{2}} A_1 A^4_2 - \frac{5670}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A_1 A^2_2 B_3 + \frac{3780}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^3_2 B_2$$

$$- \frac{1260}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_2 B_2 B_3 - \frac{1050}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} \frac{A_1 A^2_2}{(1-e_2)^3} + \frac{315}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_1 B^2_3$$

$$+ \frac{90}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_1 B_3}{(1-e_2)^3} - \frac{120}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_2 B_2}{(1-e_2)^3} + \frac{15}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_2 B_3}{(1-e_2)^3}$$

$$+ \frac{90}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_2 \frac{a_1 a_2 e_2 (1-e_1)}{(1-e_2)^5} R_o + \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} A_1 \frac{1+3e_2}{(1-e_2)^6}$$

$$(2^5) = \frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)_o}{dM^5_2} = \frac{10395}{32} U_o^{-\frac{13}{2}} A^5_2 - \frac{9450}{16} U_o^{-\frac{11}{2}} A^3_2 B_3 + \frac{1575}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} A_2 B^2_3$$

$$- \frac{1050}{8} U_o^{-\frac{9}{2}} \frac{A^3_2}{(1-e_2)^3} + \frac{225}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} \frac{A_2 B_3}{(1-e_2)^3} + \frac{450}{4} U_o^{-\frac{7}{2}} A_2 \frac{a_1 a_2 e_2 (1-e_1)}{(1-e_2)^5} R_o$$

$$+ \frac{3}{2} U_o^{-\frac{5}{2}} A_2 \frac{1+9e_2}{(1-e_2)^6} \; ;$$

con questi dati e con quelli relativi alle derivate di z_2, desunti dalle (10), possiamo apprezzare i coefficienti della serie (9).

Sono però prima da eseguire le operazioni alle quali que' coefficienti sottostanno, e sarà buono farlo con dettaglio, venendo a risultati espliciti. Operazioni somiglianti s'intenderanno fatte per rispetto alle altre coordinate $y_2\, y_1\, x_2\, x_1$. Poichè in z_2 non si trova la M_1, avremo successivamente

$$\frac{d\left(z_2 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1} = z_2 \frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1} \quad ; \quad \frac{d\left(z_2 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_2} = z_2 \frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_2} + U^{-\frac{3}{2}} \frac{dz_2}{dM_2} \tag{12}$$

$$\frac{d^2\left(z_2 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1} = z_2 \frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1^2} \quad ; \quad \frac{d^2\left(z_2 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\,dM_2} = \frac{dz_2}{dM_2} \frac{d\left(U^{-\frac{5}{2}}\right)}{dM_1} + z_2 \frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\,dM_2}$$

$$\frac{d^2\left(z_2 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_2} = z_2 \frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_2} + 2\frac{dz_2}{dM_2} \frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_2} + U^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2 z}{dM_2^2}$$

$$\frac{d^3\left(z_2 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1} = z_2 \frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1}$$

$$\frac{d^3\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1\,d\mathrm{M}_2}=\frac{dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^2\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1}+z_2\,\frac{d^3\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1\,d\mathrm{M}_2}$$

$$\frac{d^3\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1\,d\mathrm{M}^2_2}=\frac{d^2 z_2}{d\mathrm{M}^2_2}\,\frac{d\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1}+\frac{2dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^2\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1\,d\mathrm{M}_2}+z_2\,\frac{d^3\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1\,d\mathrm{M}^2_2}$$

$$\frac{d^3\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_2}=z_2\,\frac{d^3\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_2}+3\,\frac{dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^2\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_2}+3\,\frac{d^2 z_2}{d\mathrm{M}^2_2}\,\frac{d\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_2}+\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\,\frac{d^3 z_2}{d\mathrm{M}^3_2}$$

$$\frac{d^4\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^4_4}=z_2\,\frac{d^4\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^4_1}$$

$$\frac{d^4\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_1\,d\mathrm{M}_2}=\frac{dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^3\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_1}+z_2\,\frac{d^4\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_1\,d\mathrm{M}_2}$$

$$\frac{d^4\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1\,d\mathrm{M}^2_2}=\frac{d^2 z_2}{d\mathrm{M}^2_2}\,\frac{d^2\left(\mathrm{U}^{-\frac{2}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1}+\frac{2dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^3\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1\,d\mathrm{M}_2}+z_2\,\frac{d^4\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1\,d\mathrm{M}^2_2}$$

$$\frac{d^4\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1\,d\mathrm{M}^3_2}=\frac{d^3 z_2}{d\mathrm{M}^3_2}\,\frac{d\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1}+\frac{3d^2 z}{d\mathrm{M}^2_2}\,\frac{d^2\left(\mathrm{U}^{-\frac{2}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1\,d\mathrm{M}_2}+\frac{3dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^3\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1\,d\mathrm{M}^2_2}+z_2\,\frac{d^4\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1\,d\mathrm{M}^3_2}$$

$$\frac{d^4\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^4_2}=\frac{d^4 z_2}{d\mathrm{M}^4_2}\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}+4\,\frac{d^3 z_2}{d\mathrm{M}^3_2}\,\frac{d\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_2}+\frac{6d^2 z_2}{d\mathrm{M}^2_2}\,\frac{d^2\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_2}+4\,\frac{dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^3\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_2}+z_2\,\frac{d^4\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{3}}\right)}{d\mathrm{M}^4_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^5_1}=z_2\,\frac{d^5\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^5_1}$$

$$\frac{d^5\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^4_1\,d\mathrm{M}_2}=\frac{dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^4\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^4_1}+z_2\,\frac{d^5\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^4_1\,d\mathrm{M}_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_1\,d\mathrm{M}^2_2}=\frac{d^2 z}{d\mathrm{M}^2_2}\,\frac{d^3\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_1}=\frac{2dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^4\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_1\,d\mathrm{M}_2}+z_2\,\frac{d^5\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^3_1\,d\mathrm{M}^2_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_2\,\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}_1{}^2\,d\mathrm{M}^3_2}=\frac{d^3 z_2}{d\mathrm{M}^3_2}\,\frac{d^2\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1}+\frac{3d^2 z_2}{d\mathrm{M}^2_2}\,\frac{d^3\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1\,d\mathrm{M}_2}+\frac{3dz_2}{d\mathrm{M}_2}\,\frac{d^4\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1\,d\mathrm{M}^2_2}+z_2\,\frac{d^5\left(\mathrm{U}^{-\frac{3}{2}}\right)}{d\mathrm{M}^2_1\,d\mathrm{M}^3_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_2 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^4_2} = \frac{d^4 z_2}{dM^4_2}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1} + 4\frac{d^3 z_2}{dM^3_2}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM_2} + 6\frac{d^2 z_2}{dM^2_2}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^2_2}$$

$$+ 4\frac{dz_2}{dM_2}\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^3_2} + z_2\frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^4_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_2 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^5_2} = \frac{d^5 z_2}{dM^5_2} U^{-\frac{3}{2}} + 5\frac{d^4 z_2}{dM^4_2}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_2} + 10\frac{d^3 z_2}{dM^2_2}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_2}$$

$$+ 10\frac{d^2 z_2}{dM^2_2}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_2} + 5\frac{dz_2}{dM_2}\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_2} + z_2\frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^5_2}\,.$$

Dopo ciò, per le varie derivate di $z_1 U^{-\frac{3}{2}}$, si trova

$$\frac{d\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1} = z_1\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1} + U^{-\frac{3}{2}}\frac{dz_1}{dM_1}\quad;\quad \frac{d\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_2} = z_1\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_2}$$

$$\frac{d^2\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1} = z_1\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1} + 2\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1} + U^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2 z_1}{dM^2_1}$$

$$\frac{d^2\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM_2} = \frac{dz_1}{dM_1}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_2} + z_1\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM_2}\quad;\quad \frac{d^2\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_2} = z_1\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_2}$$

$$\frac{d^3\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1} = z_1\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1} + \frac{3dz_1}{dM_1}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1} + \frac{3d^2 z_1}{dM^2_1}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1} + U^{-\frac{3}{2}}\frac{d^3 z_1}{dM^3_1}$$

$$\frac{d^3\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1\, dM_2} = z_1\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1\, dM_2} + 2\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM_2} + \frac{d^2 z_1}{dM^2_1}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2}$$

$$\frac{d^3\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^2_2} = \frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_2} + z_1\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^2_2} \qquad (13)$$

$$\frac{d^3\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_2} = z_1\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_2}$$

$$\frac{d^4\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_1}=z_1\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_1}+4\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1}+6\frac{d^2 z_1}{dM^2_1}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1}+4\frac{d^3 z_1}{dM^3_1}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1}+U^{-\frac{3}{2}}\frac{d^4 z_1}{dM^4_1}$$

$$\frac{d^4\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1\, dM_2}=z_1\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1\, dM_2}+3\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1\, dM_2}+3\frac{d^2 z_1}{dM^2_1}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM_2}+\frac{d^3 z_1}{dM^3_1}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_2}$$

$$\frac{d^4\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1\, dM^2_2}=z_1\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1\, dM^2_2}+2\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^2_2}+\frac{d^2 z_1}{dM^2_1}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_2}$$

$$\frac{d^4\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^3_2}=\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_2}+z_1\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^3_2}$$

$$\frac{d^4\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_2}=z_1\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^5_1}=z_1\frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^5_1}+5\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_1}+10\frac{d^2 z_1}{dM^2_1}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1}$$

$$+10\frac{d^3 z_1}{dM^3_1}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1}+5\frac{d^4 z_1}{dM^4_1}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_1}+U^{-\frac{3}{2}}\frac{d^5 z_1}{dM^5_1}$$

$$\frac{d^5\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_1\, dM_2}=z_1\frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_1\, dM_2}+4\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1\, dM_2}+6\frac{d^2 z_1}{dM^2_1}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1\, dM_2}$$

$$+4\frac{d^3 z_1}{dM^3_1}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM_2}+\frac{d^4 z_1}{dM^4_1}\frac{d\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1\, dM^2_2}=z_1\frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_1\, dM^2_2}+3\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1\, dM^2_2}+3\frac{d^2 z_1}{dM^2_1}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^2_2}+\frac{d^3 z_1}{dM^3_1}\frac{d^2\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1\, dM^3_2}=z_1\frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^2_1\, dM^3_2}+2\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^3_2}+\frac{d^2 z_1}{dM^2_1}\frac{d^3\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^3_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^4_2}=z_1\frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM_1\, dM^4_2}+\frac{dz_1}{dM_1}\frac{d^4\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^4_2}$$

$$\frac{d^5\left(z_1 U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^5_2}=z_1\frac{d^5\left(U^{-\frac{3}{2}}\right)}{dM^5_2}.$$

Evidentemente per avere le derivate di $(y_1 U^{-\frac{3}{2}})$, $(y_2 U^{-\frac{3}{2}})$, $(x_1 U^{-\frac{3}{2}})$, $(x_2 U^{-\frac{3}{2}})$ basta mutare nelle (12) (13) le $z_1 z_2$ rispettivamente nelle $y_1 y_2$, o nelle $x_1 x_2$.

Ecco ora in serie i valori di $\frac{z_1}{\rho^3_{12}}$ e di $\frac{z_2}{\rho^3_{12}}$:

$$L_1 = \frac{1}{a_1 \operatorname{sen} i_1} \frac{z_1}{\rho^3_{12}} = (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 U_o^{-\frac{3}{2}} \tag{14}$$

$$+ \frac{M_1}{1} \left\{ (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (1^1) + \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cos \psi_1 U_o^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{M_2}{1} (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (2^1)$$

$$+ \frac{M^2_1}{2} \left\{ (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (1^2) + 2 \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cos \psi_1 (1^1) - \frac{\operatorname{sen} \psi_1}{(1-e_1)^2} U_o^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{M_1 M_2}{1.1.} \left\{ (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (1^1 2^1) + \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cos \psi_1 (2^1) \right\}$$

$$+ \frac{M^2_2}{2} (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (2^2)$$

$$+ \frac{M^3_1}{3!} \left\{ (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (1^3) + 3 \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cos \psi_1 (1^2) - 3 \frac{\operatorname{sen} \psi_1}{(1-e_1)^2} (1^1) - \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \frac{\cos \psi_1}{(1-e_1)^3} U_o^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{M^2_1 M_2}{2.1} \left\{ (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (1^2 2^1) + 2 \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cos \psi_1 (1^1 2^1) - \frac{\operatorname{sen} \psi_1}{(1-e_1)^2} (2^1) \right\}$$

$$+ \frac{M_1 M^2_2}{1.2} \left\{ (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (1^1 2^2) + \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cos \psi_1 (2^2) \right\}$$

$$+ \frac{M^3_2}{3!} (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (2^3)$$

$$+ \frac{M^4_1}{4!} \left\{ (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (1^4) + 4 \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cos \psi_1 (1^3) - 6 \frac{\operatorname{sen} \psi_1}{(1-e_1)^2} (1^2) \right.$$

$$\left. - 4 \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cos \psi_1 (1^1) + (1+3e_1) \frac{\operatorname{sen} \psi_1}{(1-e_1)^5} U_o^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{M^3_1 M_2}{3!\,1} \left\{ (1-e_1) \operatorname{sen} \psi_1 (1^3 2^1) + 3 \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cos \psi_1 (1^2 2^1) - 3 \frac{\operatorname{sen} \psi_1}{(1-e_1)^2} (1^1 2^1) - \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \frac{\cos \psi_1}{(1-e_1)^3} (2^1) \right\}$$

$$+\frac{M^2_1 M^2_2}{2.2}\left\{(1-e_1)\,\text{sen}\,\psi_1\,(1^2 2^2)+2\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\cos\psi_1\,(1^1 2^2)-\frac{\text{sen}\,\psi_1}{(1-e_1)^2}(2^2)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M^3_2}{1.3!}\left\{(1-e_1)\,\text{sen}\,\psi_1\,(1^1 2^3)+\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\cos\psi_1\,(2^3)\right\}$$

$$+\frac{M^4_2}{4!}(1-e_1)\,\text{sen}\,\psi_1\,(2^4)$$

$$+\frac{M^5_1}{5!}\left\{(1-e_1)\,\text{sen}\,\psi_1\,(1^5)+5\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\cos\psi_1\,(1^4)-10\frac{\text{sen}\,\psi_1}{(1-e_1)^2}(1^3)\right.$$

$$\left.-10\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^3}(1^2)+5(1+3e_1)\frac{\text{sen}\,\psi_1}{(1-e_1)^5}(1^1)+\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}(1+9e_1)\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^6}U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M^4_1 M_2}{4!\,1}\left\{(1-e_1)\,\text{sen}\,\psi_1\,(1^4 2^1)+4\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\cos\psi_1\,(1^3 2^1)-6\frac{\text{sen}\,\psi_1}{(1-e_1)^2}(1^2 2^1)\right.$$

$$\left.-4\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^3}(1^1 2^1)+(1+3e_1)\frac{\text{sen}\,\psi_1}{(1-e_1)^5}(2^1)\right\}$$

$$+\frac{M^3_1 M^2_2}{3!\,2}\left\{(1-e_1)\,\text{sen}\,\psi_1\,(1^3 2^2)+3\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\cos\psi_1\,(1^2 2^2)-3\frac{\text{sen}\,\psi}{(1-e_1)^2}(1^1 2^2)-\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^3}(2^2)\right\}$$

$$+\frac{M^2_1 M^3_2}{2.3!}\left\{(1-e_1)\,\text{sen}\,\psi_1\,(1^2 2^3)+2\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\cos\psi_1\,(1^1 2^3)-\frac{\text{sen}\,\psi_1}{(1-e_1)^2}(2^3)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M^4_2}{1.4!}\left\{(1-e_1)\,\text{sen}\,\psi_1\,(1^1 2^4)+\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\cos\psi_1\,(2^4)\right\}$$

$$+\frac{M^5_2}{5!}(1-e_1)\,\text{sen}\,\psi_1\,(2^5)\ ;$$

e per $\frac{z_2}{\rho^3_{12}}$ si trova

$$L_2=\frac{1}{a_2\,\text{sen}\,i_2}\frac{z_2}{\rho^3_{12}}=(1-e_2)\,\text{sen}\,\psi_2\,U_o^{-\frac{3}{2}} \qquad (15)$$

$$+\frac{M_1}{1}(1-e_2)\,\text{sen}\,\psi_2\,(1^1)$$

$$+\frac{M_2}{1}\left\{(1-e_2)\,\text{sen}\,\psi_2\,(2^1)+\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M_2}{2}(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^2)$$

$$+\frac{M_1 M_2}{1.1}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^1 2^1)+\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^1)\right\}$$

$$+\frac{M^2{}_2}{2}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(2^2)+2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(2^1)-\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^2}\,U_o{}^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M^3{}_1}{3!}(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^3)$$

$$+\frac{M^2{}_1 M_2}{2.1}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^2 2^1)+\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^2)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M^2{}_2}{1.2}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^1 2^2)+2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^1 2^1)-\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^1)\right\}$$

$$+\frac{M^3{}_2}{3!}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(2^3)+3\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(2^2)-3\,\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-2_2)^2}(2^1)-\sqrt{\frac{1+e_2}{1+e_2}}\,\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^3}\,U_o{}^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M^4{}_1}{4!}(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^4)$$

$$+\frac{M^3{}_1 M_2}{3!\,1}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^3 2^1)+\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^3)\right\}$$

$$+\frac{M^2{}_1 M^2{}_2}{2.2}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^2 2^2)+2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^2 2^1)-\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^2)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M^3{}_2}{1.3!}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^1 2^3)+3\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^1 2^2)-3\,\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^1 2^1)-\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^3}(1^1)\right\}$$

$$+\frac{M^4{}_2}{4!}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(2^4)+4\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(2^3)-6\,\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^2}(2^2)\right.$$

$$\left.-4\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^3}(2^1)+(1+3e_2)\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^5}\,U_o{}^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M^5{}_1}{5!}(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^5)$$

$$+\frac{M^4{}_1 M_2}{4!\,1}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^4 2^1)+\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^4)\right\}$$

*

$$+\frac{M^3{}_1 M^2{}_2}{3!\,2}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^3 2^2)+2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^3 2^1)-\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^3)\right\}$$

$$+\frac{M^2{}_1 M^3{}_2}{2\,.\,3!}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^2 2^3)+3\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^2 2^2)-3\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^2 2^1)-\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^3}(1^2)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M^4{}_2}{1\,.\,4!}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(1^1 2^4)+4\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(1^1 2^3)-6\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^1 2^2)\right.$$

$$\left.-4\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^3}(1^1 2^4)+(1+3e_2)\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^5}(1^1)\right\}$$

$$+\frac{M^5{}_2}{5!}\left\{(1-e_2)\,\mathrm{sen}\,\psi_2\,(2^5)+5\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\cos\psi_2\,(2^4)-10\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^2}(2^3)\right.$$

$$\left.-10\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^3}(2^2)+5(1+3e_2)\frac{\mathrm{sen}\,\psi_2}{(1-e_2)^5}(2^1)+\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}(1+9e_2)\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^6}U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

Sviluppi di $\frac{y_1}{\rho^3_{12}}$, $\frac{y_2}{\rho^3_{12}}$ *e di* $\frac{x_1}{\rho^3_{12}}$, $\frac{x_2}{\rho^3_{12}}$.

Tenendo presenti i valori di y x dati dalle (7)*, come ancora i secondi membri delle (6) ed (8), viene

$$y_0=a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi\,(1-e)+a\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi\,(1-e)\cos i$$

$$\left(\frac{dy}{dM}\right)_o=-a\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{sen}\,\psi+a\cos\varphi\cos i\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cos\psi$$

$$\left(\frac{d^2y}{dM^2}\right)_o=-a\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\cos\psi}{(1-e)^2}-a\cos\varphi\cos i\frac{\mathrm{sen}\,\psi}{(1-e)^2}\tag{16}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dM^3}\right)_o=+a\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\mathrm{sen}\,\psi}{(1-e)^3}-a\cos\varphi\cos i\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\cos\psi}{(1-e)^3}$$

$$\left(\frac{d^4y}{dM^4}\right)_o=+a\,\mathrm{sen}\,\varphi\,(1+3e)\frac{\mathrm{oos}\,\psi}{(1-e)^5}+a\cos\varphi\cos i\,(1+3e)\frac{\mathrm{sen}\,\psi}{(1-e)^5}$$

$$\left(\frac{d^5y}{dM^5}\right)_o=-a\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}(1+9e)\frac{\mathrm{sen}\,\psi}{(1-e)^6}+a\cos\varphi\cos i\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}(1+9e)\frac{\cos\psi}{(1-e)^6};$$

e similmente

$$x_0=a\cos\varphi\cos\psi\,(1-e)-a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos i\,\mathrm{sen}\,\psi\,(1-e)$$

$$\left(\frac{dx}{dM}\right)_o=-a\cos\varphi\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{sen}\,\psi-a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos i\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cos\psi$$

$$\left(\frac{d^2x}{dM^2}\right)_o=-a\cos\varphi\frac{\cos\psi}{(1-e)^2}+a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos i\frac{\mathrm{sen}\,\psi}{(1-e)^2}\tag{17}$$

$$\left(\frac{d^3 x}{dM^3}\right)_o = + a \cos \varphi \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\operatorname{sen} \psi}{(1-e)^3} + a \operatorname{sen} \varphi \cos i \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\cos \psi}{(1-e)^3}$$

$$\left(\frac{d^4 x}{dM^4}\right)_o = + a \cos \varphi (1+3e) \frac{\cos \psi}{(1-e)^5} - a \operatorname{sen} \varphi \cos i \frac{\operatorname{sen} \psi}{(1-e)^5}$$

$$\left(\frac{d^5 x}{dM^5}\right)_o = - a \cos \varphi \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} (1+9e) \frac{\operatorname{sen} \psi}{(1-e)^6} - a \operatorname{sen} \varphi \cos i \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\cos \psi}{(1-e)^6} .$$

Supponghiamo che i secondi membri delle equazioni seconda e terza delle (7)* fossero formati del solo secondo termine, cioè dei due rispettivamente

$$a \cos \varphi \cos i \operatorname{sen} (v + \psi) (1 - e \cos E)$$

$$- a \operatorname{sen} \varphi \cos i \operatorname{sen} (v + \psi) (1 - e \cos E) ,$$

allora indicando con L_1 L_2 i secondi membri delle (14) e (15), si avrebbe paragonando le equazioni (16) e (17) colla (10)

$$\frac{1}{a_1 \cos \varphi_1 \cos i_1} \frac{y_1}{\rho^3_{12}} = L_1 \; ; \; \frac{1}{a_2 \cos \varphi_2 \cos i_2} \frac{y_2}{\rho^3_{12}} = L_2$$

$$\frac{1}{a_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos i_1} \frac{x_1}{\rho^3_{12}} = - L_1 \; ; \; \frac{1}{a_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \cos i_2} \frac{x_2}{\rho^3_{12}} = - L_2 .$$

Ora per tener conto anche de' primi termini de' secondi membri delle (7)* si rifletta che i primi termini de' secondi membri de' valori delle derivate de' varii ordini di y ed x paragonati co' valori corrispondenti nelle (10) presentano: 1° che i $\operatorname{sen}\psi$ e $\cos\psi$ nelle (10) si mutano in $\cos\psi$ e $\operatorname{sen}\psi$ nelle (16) e (17); 2° che le derivate di ordine impari nelle (10) hanno segno diverso colle derivate di ordine impari nelle (16) e (17), mentre rimane lo stesso segno per le derivate di ordine pari.

Segue da ciò che tenendo presenti le L_1 L_2 possiamo formare le N_1 N_2 che poi debbono servire alla composizione de' valori compiuti di $y_1 \rho_{12}^{-3}$, $y_2 \rho_{12}^{-3}$, $x_1 \rho_{12}^{-3}$, $x_2 \rho_{12}^{-3}$.

Da quanto finora si è detto segue che posto

$$N_1 = (1-e_1) \cos \psi_1 U_o^{-\frac{3}{2}} \tag{18}$$

$$+ \frac{M_1}{1} \left\{ (1-e_1) \cos \psi (1^1) - \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \operatorname{sen} \psi_1 U_o^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{M_2}{1} (1-e_1) \cos \psi_1 (2^1)$$

$$+ \frac{M_1^2}{2} \left\{ (1-e_1) \cos \psi_1 (1^2) - 2 \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \operatorname{sen} \psi_1 (1^1) - \frac{\cos \psi_1}{(1-e_1)^2} U_o^{-\frac{3}{3}} \right\}$$

$$+\frac{M_1 M_2}{1.1}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1(1^1 2^1)-\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(2^1)\right\}$$

$$+\frac{M_2^2}{2}(1-e_1)\cos\psi_1(2^2)$$

$$+\frac{M_1^3}{3!}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1(1^3)-3\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(1^2)-3\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^2}(1^1)+\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{(1-e_1)^3}U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M_1^2 M_2}{2.1}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1(1^2 2^1)-2\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(1^1 2^1)-\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^2}(2^1)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M_2^2}{1.2}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1(1^1 2^2)-\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(2^2)\right\}$$

$$+\frac{M_2^3}{3!}(1-e_1)\cos\psi_1(2^3)$$

$$+\frac{M_1^4}{4!}\left\{(1-e_1)\cos\psi(1^4)-4\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(1^3)-6\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^2}(1^2)\right.$$

$$\left.+4\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(1^1)+(1+3e_1)\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^5}U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M_1^3 M_2}{3!\,1}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1(1^3 2^1)-3\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(1^2 2^1)-3\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^2}(1^1 2^1)+\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{(1-e_1)^3}(2^1)\right\}$$

$$+\frac{M_1^2 M_2^2}{2.2}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1(1^2 2^2)-2\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(1^1 2^2)-\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^2}(2^2)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M_2^3}{1.3}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1(1^1 2^3)-\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(2^3)\right\}$$

$$+\frac{M_2^4}{4!}(1-e_1)\cos\psi_1(2^4)$$

$$+\frac{M_1^5}{5!}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1(1^5)-2\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(1^4)-10\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^2}(1^3)\right.$$

$$\left.+10\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{(1-e_1)^3}(1^2)+5(1+3e_1)\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^5}-\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}(1+9e_1)\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{(1-e_1)^6}U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M_1^4 M_2}{4!\,1}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1(1^4 2^1)-4\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\operatorname{sen}\psi_1(1^3 2^1)-6\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^2}(1^2 2^1)\right.$$

$$\left.+4\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{(1-e_1)^3}(1^1 2^1)+(1+3e_1)\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^5}(2^1)\right\}$$

$$+\frac{M_1^3 M_2^2}{3!\,2}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1\,(1^3 2^2)-3\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\,\text{sen}\,\psi_1\,(1^2 2^2)-3\,\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^2}\,(1^1 2^2)+\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\,\frac{\text{sen}\,\psi_1}{(1-e_1)^3}\,(2^2)\right\}$$

$$+\frac{M_1^2 M_2^3}{2.3!}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1\,(1^2 2^3)-2\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\,\text{sen}\,\psi_1\,(1^1 2^3)-\frac{\cos\psi_1}{(1-e_1)^2}\,(2^3)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M_2^4}{1.4!}\left\{(1-e_1)\cos\psi_1\,(1^1 2^4)-\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}\,\text{sen}\,\psi_1\,(2^4)\right\}$$

$$+\frac{M_2^5}{5!}(1-e_1)\cos\psi_1\,(2^5),$$

e pel valore della N_2, posto

$$N_2=(1-e_2)\cos\psi_2\,U_o^{-\frac{3}{2}} \tag{19}$$

$$+\frac{M_1}{1}(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^1)$$

$$+\frac{M_2}{1}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(2^1)-\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\text{sen}\,\psi_2\,U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}.$$

$$+\frac{M^2_1}{2}(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^2)$$

$$+\frac{M_1 M_2}{1.1}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^1 2^1)-\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\text{sen}\,\psi_2\,(1^1)\right\}$$

$$+\frac{M^2_2}{2}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(2^2)-2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\text{sen}\,\psi_2\,(2^1)-\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}\,U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M^3_1}{3!}(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^3)$$

$$+\frac{M^2_1 M_2}{2.1}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^2 2^1)-\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\text{sen}\,\psi_2\,(1^2)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M^2_2}{1.2}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^1 2^2)-2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\,\text{sen}\,\psi_2\,(1^1 2^1)-\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}\,(1^1)\right\}$$

$$+\frac{M^3_2}{3!}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^3)-3\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(2^2)-3\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}(2^1)+\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^3}U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M^4_1}{4!}(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^4)$$

$$+\frac{M^3_1 M_2}{3!\,1}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^3 2^1)-\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(1^3)\right\}$$

$$+\frac{M^2_1 M^2_2}{2\,.\,2}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^2 2^2)-2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(1^2 2^1)-\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^2)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M^3_2}{1\,.\,3!}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^1 2^3)-3\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(1^1 2^2)-3\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^1 2^1)+\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^3}(1^1)\right\}$$

$$+\frac{M^4_2}{4!}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(2^4)-4\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(2^3)-6\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}(2^2)\right.$$

$$\left.+4\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^3}(2^1)+(1+3e_2)\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^5}U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$+\frac{M^5_1}{5!}(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^5)$$

$$+\frac{M^4_1 M_2}{4!\,1.}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^4 2^1)-\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(1^4)\right\}$$

$$+\frac{M^3_1 M^2_2}{3!\,2}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^3 2^2)-2\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(1^3 2^1)-\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)_2}(1^3)\right\}$$

$$+\frac{M^2_1 M^3_2}{2\,.\,3!}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^2 2^3)-3\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(1^2 2^2)-3\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^2\,1^1)+\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^3}(1^2)\right\}$$

$$+\frac{M_1 M^4_2}{1\,.\,4!}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(1^1 2^4)-4\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(1^1 2^3)-6\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}(1^1 2^2)\right.$$

$$\left.+4\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^3}(1^1 2^1)+(1+3e_2)\frac{\cos\psi_2}{(1-e2)^5}(1^1)\right\}$$

$$+\frac{M^5_2}{5!}\left\{(1-e_2)\cos\psi_2\,(2^5)-5\sqrt{\frac{1+e2}{1-e_2}}\operatorname{sen}\psi_2\,(2^4)-10\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^2}(2^3)\right.$$

$$\left.+10\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^3}(2^2)+5(1+3e_2)\frac{\cos\psi_2}{(1-e_2)^5}(2^1)-\sqrt{\frac{1+e_2}{1-e_2}}(1+9e_2)\frac{\operatorname{sen}\psi_2}{(1-e_2)^6}U_o^{-\frac{3}{2}}\right\}.$$

Dopo tutto ciò possono darsi i valori delle tre derivate parziali della funzione perturbatrice, le quali risultano espresse dalle seguenti equazioni:

$$\frac{z_2 - z_1}{\rho^3_{12}} - \frac{z_2}{r^3_2} = a_2 \operatorname{sen} i_2 L_2 - a_1 \operatorname{sen} i_1 L_1 - \frac{\operatorname{sen} i_2 F_2}{a^2_2}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{\rho^3_{12}} - \frac{y_2}{r^3_2} = a_2 \operatorname{sen} \varphi_2 N_2 - a_1 \operatorname{sen} \varphi_1 N_1 + a_2 \cos \varphi_2 \cos i_2 L_2 - a_1 \cos \varphi_1 \cos i_1 L_1$$

$$- \frac{\operatorname{sen} \varphi_2 G_2}{a^2_2} - \frac{\cos \varphi_2 \cos i_2 F_2}{a^2_2}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{\rho^3_{12}} - \frac{x_2}{r^3_2} = a_2 \cos \varphi_2 N_2 - a_1 \cos \varphi_1 N_1 - a_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \cos i_2 L_2 + a_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos i_1 L_1$$

$$- \frac{\cos \varphi_2 G_2}{a^2_2} + \frac{\operatorname{sen} \varphi_2 \cos i_2 F_2}{a^2_2},$$

e si è veduto che le F_2 e G_2 date da (3) e (4), le L_1 L_2 date (14) e (15), e finalmente le N_1 ed N_2 date da (18) e (19) sono serie ordinate secondo le potenze di M_1 ed M_2 che hanno per coefficienti delle quantità che sono funzioni degli elementi ellittici delle orbite dei due pianeti. La combinazione delle masse m_1 ed m_3, darebbe luogo a risultati analoghi.

finita stampare il dì 16 dicembre 1879

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SU DI ALCUNI VASI PROPRI DELLA SCAGLIOLA

(*PHALARIS CANARIENSIS*)

NOTA

del Socio Ordinario G. A. PASQUALE

Letta nell' Adunanza del 6 Dicembre 1879.

Da più tempo, trovandomi ad osservare la vegetazione della Scagliola, mi sono accorto che in essa, allorchè è nello stato di piantolina, si contiene umor proprio, di color tra il rosso e l'arancio, opaco, a simiglianza di quello che rinviensi nella Celidonia. Ed allo stesso modo che in questa pianta, collo spezzare un piccolo lembo di essa Scagliola, spicciano delle goccioline di succo rosso, denso, tignente, affatto simile al latice proveniente dai comuni vasi laticiferi. Questa osservazione occorre facilmente a fare quante volte si ha innanzi delle piantoline da poco tempo germogliate, fino a quando esse son di qualche decimetro elevate sul suolo, ovvero fino a che abbia svolto tre o quattro foglie, dopo la foglia seminale. Quest'organo, cioè il cotiledone germogliato, si mostra in forma di guainetta (vedete la fig. 1, *a*) di color rosso-sanguigno, che spicca alla vista naturale sul color bruno del terreno in cui viene. Il qual colorito si dilegua bruscamente nella foglia primordiale, come nell'altre seguenti, le quali prendono il solito color verde delle piante graminacee. Ma è pure vero, che, rompendo una di queste foglie, sia la seminale, o le prime foglie, od il fusticino, dalla frattura si veggono spicciare delle piccole goccioline di umor rosso, come or ora dicevo. Il loro colorito è più carico (cioè più tendente al rosso), allorchè queste vengono dalla guaina costituente la foglia seminale o dal fusticino: laddove è meno carico o meglio tendente al ranciato, allorchè vengono dalle foglie susseguenti.

Ora, convinto, per lunga osservazione, della verità del fatto, e della sua rarità, in quanto a piante graminacee, alla qual famiglia appartiene la Scagliola, nel prossimo passato settembre ebbi ad intrattenermi, su questo soggetto, coll'illustre Augusto Trecul

a Parigi, come a colui che per lunga stagione si era occupato di vasi laticiferi in diverse famiglie di piante, ed attualmente con ispecialità nelle graminacee. Egli, l'eminente scienziato, mi confessava francamente non aver mai preso in esame la *Phalaris canariensis;* nè di consimili fatti aver osservato in alcun'altra graminacea. Sibbene aver veduto e studiato di vasi laticiferi a succo bianco, in talune piantoline di poche specie della stessa famiglia. Su di che egli andrà a tener conto in sue apposite pubblicazioni.

E però, animato dalla importanza del caso, ne ho fatto soggetto di studî, il risultato de' quali vengo oggi a sottomettere al giudizio dell'Accademia.

La materia rossa, che nella Scagliola trovasi più in abbondanza nella foglia seminale (o cotiledone germogliato), alla vista naturale si mostra in questo organo distribuita in strie rosse longitudinali. Assoggettata essa foglia al microscopio queste strie mi han guidato alla scoverta di canaletti allungatissimi ed a pareti semplici, i quali sono soli essi che portano la materia rossa in discorso. L'assenza della Clorofilla nella foglia seminale mi ha dato il vantaggio di vedere con chiarezza i detti canali o vasi proprî (fig. 3). Se non che presentavasi, da altra parte, la difficoltà per la materia colorante, che spandendosi rapidamente tra i vetri portaoggetti, colorava le cellule adiacenti ad essi vasi; e questi istessi nel contempo, per loro vuotamento, scoloravano. Però la differenza tra gli organi elementari del parenchima, e dei vasi in discorso, si fa notevole all'osservatore, allorquando, conosciuto per la prima volta uno dei sottili canaletti da me scoverti, si osserva in questi il preciso carattere della mancanza dei tramezzi. Ancora, una loro nota caratteristica è di vederli terminare nella loro estremità superiore in punta assottigliata e chiusa (fig. 2). Essi vasi si trovano verso la faccia esterna del parenchima della foglia seminale; ma è bene a sapere, che nel toglier via l'epidermide, questa ne trasporta seco molti. Sicchè la preparazione, di cui vi presento uno schizzo, ne mostra la metà, in numero, di codesti vasi (fig. 3).

Dalla foglia seminale son passato ad osservare i vasi colorati nella foglia primordiale e nelle altre successive. Queste non si prestano ad essere assoggettate al microscopio, senza dividerle in sottili fettoline, le quali portano necessariamente rotti i vasi in discorso. Per lo che, a scoprirli nella massa verde, riesce difficile. Io ho potuto ottenerli, per adattarli al microscopio, senza romperli; togliendo l'epidermide dalla sola pagina superiore. In tal caso, all'ingrandimento di 650 diametri, con leggiera compressione dell'oggetto, ho potuto, non senza qualche difficoltà, scoprire, anche in questi organi, vasi dal color rosso per la materia che vi conteneano. Esse, nelle foglie verdi, sono in minor numero che nella foglia seminale, e son disposti longitudinalmente, nel modo come vado a dire, e come si vede nella figura 4, *l*, *l*, *l*, *l*.

Due vasi laticiferi sono attorno al fascio fibro-vascolare principale, o nervo mediano, e presso ogni altro fascio secondario se ne conta un solo (fig. 4, *l*, *l*, *l*, *l*). Il color rosso della sostanza in discorso, nelle prime foglie, va dal rosso sanguigno, come era nella foglia seminale, al rosso-arancio. E questo colore è più sbiadito man mano che si passa alla terza e poi alla quarta foglia.

Fin qui è espresso il risultato dei miei studî, che, per ora, posso presentarvi intorno ai vasi propri di questa graminacea, in quanto alla loro posizione e struttura. Passo ora a dire dell'umor rosso, che essendo contenuto in vasi propri, non può essere altro che latice: e per tale io lo ritengo. È latice fatto di minutissimi corpicciuoli, appena visibili al cennato ingrandimento di 650 diametri, ricco di sostanza colorante rossa e liquida.

Vi ha dippiù. Nell'interno del vase il liquido circola, e la circolazione, allorquando si è fortunati di vederla, come lo sono stato io per sole due volte, si rende percettibile appunto per i minutissimi corpicciuoli opachi che in esso umore nuotano. Codesto movimento procede in doppia corrente, a destra ed a sinistra, come nella cosiddetta *girosi*.

Da ultimo, trovo opportuno d'aggiungere ciò che mi ha presentato il latice posto sul portaoggetti del microscopio. Esso latice col calore, poco superiore alla temperatura ordinaria, ed anche alla temperatura ordinaria della stanza, coagula. Nel quale stato concepisce delle forme cristalline arborescenti o coralliniformi (fig. 5), in modo mirabile, assai più che nei comuni latici e liquidi albuminoidi; siffattamente che ne stimo il fenomeno degno di ulteriori studî.

Conchiudo, che le piantoline della Scagliola, nello stato di lor giovanezza, sono fornite di vasi laticiferi, semplici, paralleli, e contenenti latice rosso.

Per debito di giustizia debbo dichiarare, che, in queste ricerche, sono stato coadiuvato, specialmente per la parte microscopica, da mio figlio Fortunato.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — Piantolina di *Phalaris canariensis* germogliata da pochi giorni:

a, foglia seminale;

c, foglia primordiale.

Fig. 2. — Punta della foglia seminale, o cotiledone germogliato, ingrandita circa venti volte, che mostra 13 vasi laticiferi chiusi all'apice.

Fig 3. — Una fettolina di detta foglia seminale, all'ingrandimento di 650 diametri, che mostra uno strato di cellule senza clorofilla, ciascuna provvista di nucleo. Per sopra esse vi passano tre vasi laticiferi, senza altra maniera di vaso nè fibra.

Fig. 4. — Una fettolina di foglia primordiale, in cui si vede il parenchima provvisto di clorofilla con fasci fibro-vascolari;

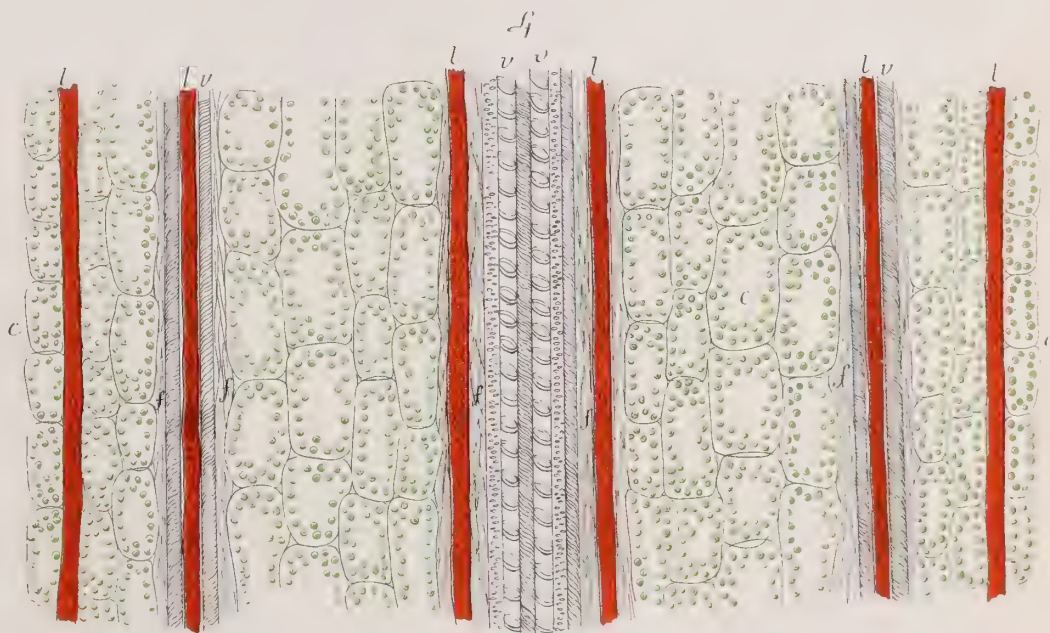
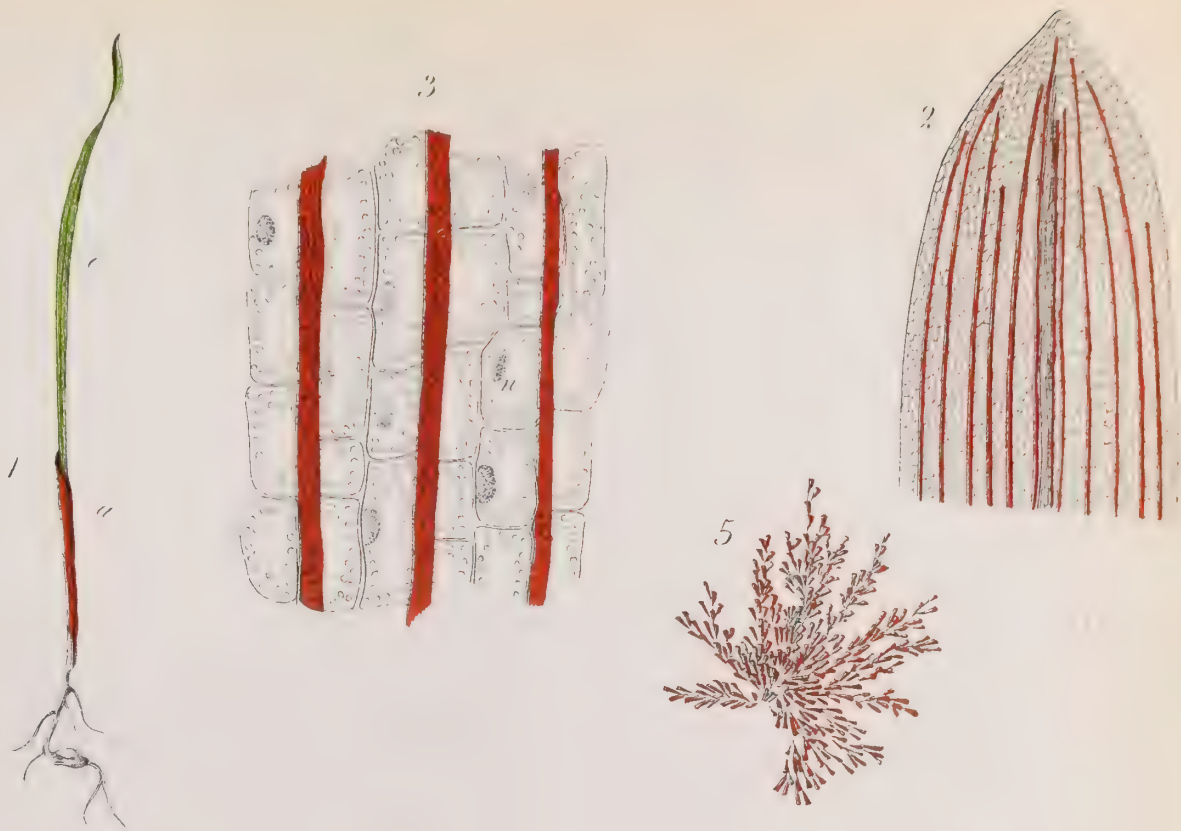
f, *f*, *f*, fibre;

v, *v*, *v*, *v* vasi linfatici;

l, *l*, *l*, *l* vasi laticiferi, presso i detti vasi linfatici, e le dette fibre. Ingrandimento di 650 diametri.

Fig. 5. — Concrezione coralliniforme, formatasi dal latice posto sul portaoggetti ad asciugare e coagulare: allo ingrandimento di 450 diametri.

Phalaris canariensis

F. PASQUALE DIS.
LIT. PETRUZZELLI NAPOLI

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

RICERCHE CHIMICHE SULLE INCROSTAZIONI GIALLE DELLA LAVA VESUVIANA DEL 1631.

MEMORIA I[a]

del Socio Ordinario A. SCACCHI

Letta nell' Adunanza del 13 Dicembre 1879.

Gl' immensi torrenti di lava usciti dal Vesuvio nell' incendio del 1631 hanno assai spesso le pareti delle loro fenditure tappezzate da esilissime croste verdi, alle quali più rare se ne associano altre di color giallo che con le prime d' ordinario si mescolano e si confondono. Nei saggi fatti per determinare la chimica composizione di questi incrostamenti, e principalmente di quelli nei quali quando più e quando meno distinto si manifesta il colore giallo, ho avuto tali reazioni da farmi sospettare in essi la presenza di un corpo semplice diverso da quelli fin' ora conosciuti. L'esposizione delle principali reazioni avute in questi saggi forma l'oggetto della presente memoria, che intendo pubblicare come notizia preliminare per prender data delle prime investigazioni. E se le future ricerche confermeranno ciò che ora potrebbe sembrare soltanto probabile, propongo distinguere il nuovo corpo col nome di *Vesbio* [1]), e col nome di *Vesbina* le croste gialle.

La sottigliezza delle riferite incrostazioni, e la loro forte aderenza alla roccia non permettono distaccare della sostanza discretamente pura quanto basta per servire alle chimiche indagini. Quindi mi sono appigliato al partito d' immergere nell' acido cloroidrico molto allungato i pezzi di lava ai quali esse aderiscono. In poco d' ora le croste si sciolgono colorando in azzurro la soluzione. Questa intanto non contiene che piccola quantità di vesbio, trovandosi in essa abbondante il rame, ed in gran copia disciolta la

[1]) *Vesbio* o *Vesvio* antico nome del Vesuvio ricordato da Galeno (*de morbis curandis*, lib. 5, c. 12).

Mi son pure deciso a non ritardare la pubblicazione di questa memoria per dar notizia delle incrostazioni gialle che costituiscono una specie mineralogica non conosciuta fin' ora tra i prodotti vulcanici; e quando anche venisse pruovato per le future ricerche che il vesbio sia uno dei corpi già noti, potrà rimanere il nome di vesbina alle croste gialle. Quanto alla composizione chimica della vesbina, posso dire soltanto che sia essenzialmente formata di acido vesbico e di allumina, essendo l'allumina l'ossido basico che vi ho riconosciuto più abbondante. Nè è possibile nello stato presente delle nostre conoscenze eseguirne l'analisi quantitativa; dappoichè ignoriamo ancora un metodo discretamente esatto per separare l' acido vesbico dalle basi per determinarlo quantitativamente. Le condizioni nelle quali la vesbina si è prodotta nelle fenditure della lava saranno argomento di altro lavoro.

Le incrostazioni verdi che sono assai più abbondanti delle gialle vanno riferite all' atacamite. All' atacamite ed alla vesbina si associa talvolta l' azzurrite; ma non vi ho mai trovato la malachite.

silice e le basi dei silicati che costituiscono la lava. Il miglior metodo che ho fin' ora trovato per ottenere un composto di vesbio dalla soluzione cloroidrica consiste nel portarla a perfetta secchezza alla temperatura alquanto maggiore di 170°, e riprendere il residuo secco e polverizzato con acqua stillata. Questa discioglie la maggior parte del rame e gli alcali ed altre basi, che qui non occorre noverare, allo stato di cloruri, restando insoluta principalmente la silice ed un composto di vesbio, e non poche materie sottilmente polverose che per decantazione non si dura fatica a separare dal deposito più grave formato in massima parte di silice e del composto di vesbio.

Su questo deposito così ottenuto versando acido cloroidrico concentrato, ed agevolando l'azione dell'acido col riscaldamento, resta insoluta la silice che si separa col mezzo della filtrazione. La seconda soluzione acida che se ne ottiene ancor essa portata a secchezza a circa 170°, il residuo secco dà con l'acqua stillata una parte solubile che colora in verde la soluzione ed una parte insolubile di colore nerastro. Raccogliendo la parte insolubile sul filtro, e lavata sino a che le acque di lavanda escono affatto scolorite, e non dànno reazione di rame col prussiato giallo di potassio, essa rimane di color verde fosco.

§ I. — *Vesbiato di colore verde fosco.*

Sulla medesima sostanza di color verde fosco, che fin' ora non ho potuto procurarmi in quantità maggiore di tre grammi, ho eseguito le ricerche che sommetto al vostro giudizio; e non mi tratterrò lungamente ad esporre tutte le complicate reazioni avute dalle sue soluzioni acide, bastandomi dire soltanto ciò che torna utile allo scopo del mio lavoro. Per i saggi che saranno in seguito esposti si vedrà che contiene, oltre il vesbio, una discreta quantità di alluminio e di ferro, un po'di piombo, e quantunque assai scarso un po'di rame; vi si rinviene altresì piccolissima quantità di acido solforico.

Essa è di apparenza terrosa molto igrometrica. Prosciugata per molti giorni all'aria libera e poi disseccata a 130° ha perduto 15,35 per cento del suo peso, e poi ha ripreso quasi per intero il peso perduto dopo un giorno di esposizione all'ambiente. Riscaldata a 170° la perdita è giunta a 18,21 per cento senza mutarsi per nulla le sue qualità apparenti. Arroventata in crogiuolo di platino sulla fiamma della lampada Berzelius, dopo il disseccamento a 170°, è divenuta di color bruno senza fondersi, ed il suo peso si è scemato di 12,18 per cento. Fusa col sale di fosforo dà alla fiamma esterna vetro di colore giallo, al quale si mescola un po'di bruno e di rosso, e vetro verde alla fiamma interna.

Sia la sostanza di color verde fosco, sia il residuo bruno che si ottiene dopo averla arroventata, sono solubili negli acidi cloroidrico, nitrico e solforico, producendosi soluzione di color verde; ed in queste soluzioni è notevole la reazione che si ha con l'idrogeno solforato, il quale produce precipitato bruno fioccoso ed il colore della soluzione si muta in bellissimo azzurro intenso.

Il colore azzurro in diversi casi mi si è manifestato nelle soluzioni che contengono il vesbio; e sono circa tre anni che avendo preso ad analizzare le incrostazioni verdi e gialle della lava vesuviana del 1631, dopo averne fatta soluzione negli acidi, e precipitato dalla medesima l'ossido di rame con la potassa adoperata in quantità ecce-

dente, mi avvenne osservare il liquore filtrato di colore azzurro. E dall'inatteso risultamento di questo saggio, di cui non mi era dato intendere la cagione, ebbi il primo sospetto della presenza di un novello corpo nelle croste gialle. Con i successivi esperimenti le svariate imprevvedute reazioni sempre più convalidandomi nel concepito sospetto, non ho avuto la fortuna d'indovinare la strada che in breve mi avesse condotto a conclusioni, quali le avrei desiderate, sodisfacenti. E nell'idea di dover trovare un ossido basico, vagando tra tante reazioni, che non sempre avvenivano allo stesso modo, senza potermi rendere ragione delle medesime, se non fosse stata la naturale ostinazione, avrei lasciato di continuare in una ricerca che mi si presentava infruttuosa.

Intanto debbo ritornare sul precipitato bruno ottenuto con l'idrogeno solforato. Esso è in gran parte formato di solfo, al quale trovasi pure unito un solfuro. L'acido cloroidrico non ha su di esso sensibile azione; al contrario l'acido nitrico energicamente scompone il solfuro svolgendosi vapori rossastri e lasciando gran copia di solfo depositato. Esposto in piattello di platino su piccola fiamma, si accende; e continua a bruciare da sè come lo zolfo, lasciando residuo nero; e questo fortemente arroventato, lascia altro residuo più scarso di colore giallo macchiato di punti neri. Il solfuro di carbonio ne scioglie gran parte, depositando con la spontanea evaporazione lo zolfo disciolto, e lasciando la parte insoluta di colore nericcio. Sì il residuo gialliccio rimasto dopo il menzionato arroventamento, come l'altro residuo nericcio lasciato dal solfuro di carbonio, si sciolgono nell'acido nitrico, il primo lentamente, l'altro con rapida effervescenza producendosi soluzione verdiccia. Egli è però manifesto che con l'idrogeno solforato si ha un'azione riduttrice nel tempo stesso che si produce un solfuro. Quanto al solfuro depositato mi sono assicurato con opportuni saggi essere in gran parte formato di solfuro di piombo con poco solfuro di rame. E l'azione riduttrice, almeno in parte, va riferita al sesquiossido o sesquicloruro di ferro che passa al grado di ossidazione minore; siccome mi si è fatto manifesto per la reazione dei sali ferrici avuta nella soluzione col solfocianuro di potassio prima della precipitazione con l'idrogeno solforato, e per la reazione dei sali ferrosi col prussiato rosso di potassio dopo la medesima precipitazione.

Quanto al colore azzurro che si manifesta nella soluzione dopo la precipitazione con l'idrogeno solforato ce ne occuperemo in seguito.

§ II. — *Vesbiati alcalini.*

Altri caratteri di maggiore importanza si hanno fondendo col nitro o con i carbonati alcalini la primitiva sostanza di color verde fosco, o il residuo bruno che si ha dopo il suo arroventamento. Nell'atto della fusione si produce effervescenza dovuta allo sprigionamento dell'acido carbonico nel caso siasi fatto uso di un carbonato alcalino, e seguíta da svolgimento di vapori rossastri adoperando il nitro. Avviene in queste operazioni lo stesso che avverrebbe se col nitro o con i carbonati alcalini si fondesse un fosfato che abbia per base un ossido metallico. Per questa ragione possiamo ritenere che un acido non volatile, come l'acido fosforico, e che abbia per base il vesbio, siasi combinato agli alcali, e durando in questo concetto lo diremo acido vesbico e vesbiati le sue combinazioni con gli ossidi.

Dopo la fusione con gli alcali si ha sempre il vesbiato alcalino bianco unito a polvere di color rosso di varie gradazioni che ad esso non si mescola nella massa fusa.

I vesbiati alcalini in tal guisa ottenuti sono facilmente solubili nell'acqua, dànno soluzioni neutre alle carte reagenti, e non contraddistinte da alcun colore. Nondimeno se ad esse si aggiunge un acido, appariscono distintamente colorate. Gli acidi cloroidrico, nitrico e solforico le colorano in giallo simile al colore giallo dei cromati alcalini, e riscaldate acquistano color verde azzurrino; lo stesso color verde azzurro si manifesta lasciando le soluzioni gialle per qualche tempo esposte all'aria. Gli acidi organici colorano pure le soluzioni dei vesbiati alcalini, con qualche differenza nel colore che si manifesta, e talora con qualche differenza secondo la diversa maniera di sperimentare. L'acido acetico ed il succinico dànno colore giallo di croma che non si muta col tempo, l'acido citrico dà lo stesso colore più pallido, l' acido tartarico dà colore rosso di giacinto persistente, e l'acido ossalico dà colore giallo verdiccio che in breve diventa verde e poi verde azzurro.

Le soluzioni dei sali metallici d'ordinario sono precipitate dalle soluzioni dei vesbiati alcalini, i precipitati sono solubili nell'acido nitrico e variamente colorati secondo l'ossido metallico che trovasi disciolto. Con i nitrati di piombo, di argento e di sottossido di mercurio si hanno precipitati gialli di colore sbiadito col primo, e tendenti al rosso con gli altri. Il precipitato che si ha col nitrato di uranio è dello stesso colore giallo che distingue i sali uranici. Sono notevoli i precipitati che si ottengono col solfato di zinco e col solfato di rame. Col primo il precipitato è azzurro sudicio, che raccolto sul filtro inverdisce ed il liquore filtrato è di color verde gialliccio; col secondo il precipitato è verde gialliccio e dello stesso colore è il liquore filtrato. Con i solfati di cobalto e di nichelio i precipitati sono scarsi ed hanno gli stessi colori delle soluzioni di questi sali quantunque più sbiaditi. Col solfato di cadmio si ha precipitato bianco; ed il solfato di manganese fa eccezione alla regola generale che non dà origine ad alcun precipitato, e quel ch'è più notevole, la soluzione acquista color giallo intenso. Essendo entrato in sospetto che questa singolare reazione provenisse dall'essere la soluzione manganosa acida, ho arroventato il solfato di manganese prima di farne soluzione, ed ho avuto lo stesso risultamento. Con i sali delle terre alcaline si hanno precipitati bianchi solubili nell'acido nitrico.

Debbo intanto avvertire che taluni dei menzionati precipitati lungamente lavati vanno soggetti a scomporsi; ma di questa secondaria reazione non occorre per ora occuparci.

Con l'idrogeno solforato si ha forte intorbidamento bruniccio; col riposo si raccoglie deposito bruno e la soluzione resta colorata in bruno rossiccio. Nel liquore così colorato aggiungendo acido cloridrico, si ha precipitato nericcio, restando la soluzione scolorita. Ma delle reazioni che si hanno con l'idrogeno solforato nelle soluzioni che contegono il vesbio si dirà più diffusamente in seguito.

L'aver prodotto i vesbiati alcalini è stato fin'ora il più importante risultamento ottenuto, specialmente perchè mi ha fatto comprendere che non bisognava persistere nella ricerca di un ossido basico. D'altra parte non ho trascurato fare la pruova per avere i vesbiati cristallizzati; e costretto a sperimentare su piccole quantità, ho dovuto limitarmi a fare il saggio col solo vesbiato di potassio. Avendo presente le accortezze che la lunga pratica mi suggerisce per avere nitidi cristalli, e considerando che col vesbiato vi era pure non piccola parte di nitrato potassico, ho riposto la soluzione satura a 100° in piccolo cristallizzatoio coverto con lastra di vetro, e l'ho fatto lentamente

raffreddare. Separato per decantazione il liquore cristallizzante dai cristalli depositati, e concentratolo di nuovo a circa 100°, l'ho pure conservato in cristallizzatoio chiuso, ed ho ripetuto più volte questa operazione sino a non rimanere che piccola quantità di soluzione.

I primi cristalli depositati sono stati di nitro con l'abituale loro forma trimetrica ortogonale. Verso le ultime cristallizzazioni ho avuto alquanti nitidi cristalli romboedrici della forma propria del nitrato di sodio, i quali estratti dalla soluzione si sono in breve appannati e divenuti scabri superficialmente; e ciò mi porta a credere che siansi metamorfizzati. Avendo sciolto in acqua stillata uno di essi, ed avendo aggiunto alla soluzione un po' di acido cloroidrico, non è comparso il colore giallo che mi avrebbe annunziato la presenza dell'acido vesbico. Quindi ho conchiuso che i cristalli romboedrici erano formati di nitrato potassico che, in particolari condizioni, è già noto, poter prendere la forma romboedrica [1]).

Intanto il poco liquore rimasto dopo le ripetute estrazioni dei cristalli di nitro, per poco concentrato, si è disseccato, lasciando nel fondo del cristallizzatoio uno strato bianco di apparenza terroso. Ho dovuto a prima giunta conchiudere che il vesbiato di potassio sia incapace di cristallizzare, e che sia assai più del nitro solubile nell' acqua. Ho creduto di più che per la sua grande solubilità fosse deliquescente, ed ho atteso tre giorni per vedere il deposito lasciato nel cristallizzatoio esposto all'aria libera cadere in deliquescenza. Ho trovato invece che versando su di esso acqua stillata si è ridotto in polvere bianca poco solubile in maggiore quantità di acqua, e la soluzione presentava forte reazione alcalina. È facile conchiudere da questo esperimento che il vesbiato potassico ch' era disciolto in piccolissima quantità di acqua, avendo portato la soluzione quasi a secchezza, si è scomposto, restando l'acido vesbico in forma di polvere bianca pochissimo solubile.

Per questo e per altri fatti che in seguito saranno esposti vi è ragione di credere che l'acido vesbico sia capace col calore di modificarsi acquistando qualità diverse da quelle innanzi possedute. Ma per mettere in chiaro questo argomento occorre maggiore quantità di acido vesbico di quella fin' ora raccolta. Aggiungerò soltanto che mi sono assicurato essere acido vesbico la polvere bianca avuta dalla scomposizione del vesbiato potassico per le reazioni al cannello col sale di fosforo.

§ III. — *Precipitazione dalle soluzioni acide col mezzo dell'ammoniaca.*

Non potendo in queste notizie preliminari, secondo lo stato presente delle mie ricerche, esporre la storia del vesbio cominciando dai caratteri del corpo semplice e procedendo regolarmente alle qualità dei suoi composti, stimo conveniente aggiungere altri fatti, scelti tra i più notevoli registrati nelle note degli esperimenti eseguiti, e che valgono a farci conoscere la differenza del vesbio dagli altri corpi.

[1]) La condizione che nel caso presente ha dato origine alla forma romboedrica del nitrato potassico son di avviso che sia lo stato di forte concentrazione della soluzione, che, tenuta in cristallizzatoio chiuso, non è stata esposta ad alcuna cagione esterna che abbia promossa la produzione dei cristalli. E sono indotto ad avere questa opinione dal perchè, quantunque dopo essersi depositati i cristalli romboedrici la soluzione si trovasse meno concentrata di quel che lo fosse prima, pure quando, aperto il cristallizzatoio, ho estratto il primo cristallo romboedrico, vi è stata un'assai rapida apparizione di molti cristalli di nitro trimetrici ortogonali.

Fatta la soluzione della primitiva sostanza verde con acido nitrico, ed essendo questa di color verde gialliccio, se vi si aggiunge poco per volta ammoniaca, in principio si ha precipitato bruno verdastro che si solve rimuovendolo nel liquore acido il cui colore si muta in giallo ed in giallo rossiccio. Quando l'ammoniaca, neutralizzato completamente l'acido, è alquanto eccedente, e sia riscaldata la soluzione sino a discacciare l'ammoniaca eccedente, il precipitato raccolto sul filtro è di colore giallo ed il liquore filtrato di color verde. Lavato il precipitato sino a che le acque di lavanda escono affatto scolorate, e poi continuando ancora il lavacro, l'acqua discioglie lentamente porzione del precipitato senza colorarsi. Ma le acque in tal guisa filtrate se si concentrano, sia per la spontanea evaporazione all'ambiente, sia riscaldandole, esse prendono colore giallo tanto più intenso per quanto maggiore è la concentrazione, e presso gli orli del liquore si produce sedimento di color rosso bruniccio. Quante volte ho concentrato la soluzione gialla con la speranza di ottenere depositi cristallini, facendo variare il modo di evaporazione, non mi è stato possibile d'impedire la formazione della crosta rosso-bruniccia presso gli orli del liquore; e quando ho tentato la concentrazione col riscaldamento sulla fiamma della lampada ad alcool, simile deposito rosso-bruno si è prodotto nel fondo della capsola toccato dalla fiamma. Continuando per più lungo tempo a lavare il precipitato, le acque di lavanda escono sempre più povere di materie solute sino a non contenerne che minime quantità. Se il precipitato raccolto sul filtro, e così profusamente lavato, si discioglie con acido nitrico e si ripete l'operazione di aggiungere poco per volta l'ammoniaca, si ha in principio precipitato giallo, poi verde gialliccio, restando la soluzione scolorata, e questa, come le precedenti acque di lavanda, con la concentrazione ingiallisce.

Siano le acque scolorite, siano quelle ingiallite con la concentrazione, dànno con le soluzioni dei sali metallici le medesime reazioni, tranne piccole differenze, che sono state esposte discorrendo dei vesbiati alcalini.

Volendo dire qualche cosa del modo come, almeno per ora, possiamo renderci ragione di queste reazioni, sembrami probabile che nel principio della operazione l'acido nitrico abbia disciolto i vesbiati insolubili nell'acqua; indi l'ammoniaca, neutralizzato l'acido nitrico, abbia scomposto in parte i vesbiati disciolti, facendo precipitare l'altra parte dei vesbiati non iscomposta e le basi della parte scomposta dei medesimi vesbiati forse ridotti a vesbiati basici. Quindi nel liquore filtrato si trova disciolto il nitrato ed il vesbiato di ammonio, e può darsi che con le ripetute lavande l'acqua scomponga altresì i vesbiati di recente precipitati. Intanto la soluzione che vien fuori dal filtro scolorita, quando è concentrata divien gialla, forse non tanto per semplice effetto della concentrazione, quanto perchè con la concentrazione si produce qualche cambiamento nella composizione della sostanza disciolta.

Lasciando questo argomento che in seguito potrà ricevere più esatta interpretazione, debbo soggiungere che avendo a mia disposizione buona quantità di soluzione gialla ho supposto di aver trovato la strada per ottenere risultamenti di maggiore importanza, presumendo di potermi procurare una discreta quantità di vesbiato di argento o di piombo puro per servire alla ricerca della quantità di acido combinata agli ossidi metallici, e per ottenere l'acido vesbico isolato. Il risultamento, almeno per le piccole quantità disponibili, non ha corrisposto alle previsioni. Dappoichè col nitrato di argento ho ottenuto è vero abbondante precipitato di vesbiato di argento, che nel

caso presente è stato di bellissimo color rosso gialliccio quasi come quello del minio; ma nel lavare il precipitato raccolto sul filtro, mentre le prime acque di lavanda sono uscite scolorate, le successive acque sono uscite colorate in giallo, la qual cosa mi ha dato indizio di alterazioni avvenute nel precipitato con le lavande.

Soggiungerò ancora, perchè meglio s'intenda con quale corpo d'ingannevole variabilità mi sono imbattuto, che tale risultamento era quasi in contradizione con altro saggio precedentemente fatto con la medesima soluzione non concentrata, e però scolorita. In questa soluzione ho avuto col nitrato di argento precipitato di color di mattone che ho potuto lavare sino a che le acque di lavanda non hanno dato sensibile reazione dell'argento, ed il liquore filtrato è stato sempre scolorito.

Il vesbiato di argento raccolto in questa operazione col disseccamento ha preso color giallo di ocra; e quantunque la piccola quantità del medesimo non mi promettesse soddisfacenti risultamenti facendone l'analisi quantitativa, pure ho voluto tentare la pruova, proponendomi nel tempo stesso di avere con la scomposizione del vesbiato di argento l'acido vesbico non combinato ad alcuna base. Con grm. 0,1105 della sostanza disseccata a 120°, e poi disciolta nell'acido nitrico, ho avuto di residuo insolubile nell'acido grm. 0,001, e di cloruro di argento precipitato con l'acido cloroidrico grammi 0,071. Quindi si deduce la quantità dell'ossido di argento contenuto nel vesbiato eguale a gram. 0,0574, che corrisponde a 52,42 per cento della sostanza adoperata. Da questa quantità dell'ossido di argento in parti centesime si ottiene altresì il peso equivalente dell'acido vesbico eguale a 105,29; e supponendo l'acido vesbico, come l'acido moliddico, della formola VbO_3, si dedurrebbe il peso equivalente del vesbio eguale ad 81,29. Supponendo l'acido vesbico della formola VbO_5, come l'acido vanadico, si avrebbe il peso equivalente del vesbio eguale a 65,29 [1]).

Tenendo in quel poco conto che meritano queste conclusioni dedotte da sostanza di cui non era assicurata la purezza, darò termine a questo paragrafo coll'esporre le qualità rinvenute nell'acido vesbico. Nella soluzione filtrata dal cloruro di argento ho precipitato con l'acido cloroidrico l'argento del nitrato adoperato in eccesso. Quindi è che nel liquore separato dal precipitato si trovano soltanto gli acidi cloroidrico, nitrico e vesbico. Esso ha tinta gialliccia assai sbiadita, e posto nella stufa a circa 110° per concentrarlo, senza che si fosse mutato il colore, quando si è ridotto a circa due terzi, ha cominciato a depositare presso gli orli sottile crosta di color rosso-fosco. Procedendo la concentrazione, la crosta rosso-fosca si è distesa sulle pareti della capsola in ragione che il livello del liquore per la evaporazione è divenuto più basso. Quando lo svolgimento del cloro è stato abbondante ed il liquore si è ridotto a meno di un quarto, il suo colore è divenuto azzurro. E quando in fine nulla più rimaneva ad evaporarsi alla temperatura di 110°, le pareti della capsola sono rimaste tappezzate di esile crosta di color rosso-bruno che nel fondo era di color rosso-amaranto.

Le altre qualità, oltre il colore, osservate in questa crosta, che riteniamo esser formata di acido vesbico, sono le seguenti. Esso è pochissimo solubile nell'acqua; la soluzione acquosa è scolorita ed ha debole reazione acida. Siccome essa si è prodotta negli acidi nitrico e cloroidrico espulsi con la evaporazione a circa 110°, potrebbe darsi

[1]) Nel dedurre questo peso equivalente del vesbio si è ritenuto che la formola del vesbiato di argento fosse AgO,VbO_3 ovvero AgO,VbO_5; che se invece la formola del vesbiato di argento fosse, come quella del fosfato di argento, $3AgO,VbO_5$, il peso equivalente del vesbio si troverebbe di molto maggiore.

che questa reazione sia dovuta a poche tracce dei medesimi acidi, ed allora l'acido vesbico rosso sarebbe insolubile nell'acqua. L'ammoniaca lo scioglie facilmente lasciando un deposito verde, che ancor esso si scioglie più lentamente, e la soluzione è di color giallo chiaro. Nel fare questo saggio ho voluto assicurarmi se nelle croste rosse si contenesse cloro, dappoichè poteva darsi che esse fossero formate di cloruro, o ossicloruro di vesbio. Quindi nella soluzione ammoniacale ho aggiunto acido nitrico eccedente e poi nitrato di argento che non ha dato reazione di cloro. L'acido vesbico rosso è pure facilmente solubile negli acidi nitrico, cloroidrico e solforico; le soluzioni sono tinte in rosso, ed allungate con l'acqua prima inverdiscono e poi si scolorano; con l'idrogeno solforato dànno precipitato bruno ed il liquore resta leggermente tinto in azzurro. La prolungata azione di una lamina di zinco immersa nella soluzione fatta con l'acido cloroidrico, fa apparire nella soluzione colore azzurro che poi si muta in bruno. Lo stesso acido rosso esposto in cannello di vetro sulla fiamma della lampada ad alcool si fonde con qualche difficoltà diventando il suo colore più oscuro.

Questo acido vesbico di color rosso è per certo assai diverso dall'acido vesbico bianco polveroso che si è veduto prodursi per la scomposizione del vesbiato potassico; e dobbiamo attendere che le future ricerche ci svelino se la differenza consiste nella diversa quantità proporzionale dell'ossigeno, o come sembra più probabile, in un diverso stato allotropico.

§ IV. — *Precipitazione delle soluzioni acide col mezzo della potassa.*

Adoperando la potassa in luogo dell'ammoniaca per precipitare le soluzioni acide del vesbiato di color verde-fosco ottenuto dalle croste gialle, si ha che l'allumina in esso contenuta resta disciolta dall'eccesso del reattivo. Avviene lo stesso pel piombo, del quale non occorre occuparci perchè in piccola quantità. Egli è però che con la potassa si ha scarso precipitato di color bruno, che raccolto sul filtro e ripetutamente lavato, sensibilmente va scemandosi, restando poco residuo di colore rossiccio (ossido ferrico idrato). Intanto il liquore filtrato è giallo e col riscaldamento si scolora. Se nella soluzione scolorita si aggiunge poco per volta acido cloroidrico, ove questo giunge a toccare la soluzione si manifesta colore giallo che subito scomparisce rimescolando la soluzione. Continuando ad aggiungere l'acido, e restando ancora la soluzione con potassa eccedente, si giunge al punto che tutto il liquore diventa giallo, ma col riscaldamento il colore si dilegua. Quando per l'aggiunzione di novello acido comincia a precipitarsi l'allumina mantenuta disciolta dalla potassa, mentre ancora la soluzione dà forte reazione alcalina, essa riacquista il colore giallo e col riposo di alquante ore si trova il liquore scolorito e l'allumina raccolta in fondo della capsola leggermente colorata in giallo. Con l'aggiunzione di nuovo acido, sino a che non si abbia più precipitazione di allumina, e restando tuttavia il liquore con reazione alcalina pel carbonato potassico che va unito alla potassa, si ha la soluzione colorita in giallo simile al color giallo del cromato potassico; e riscaldandola, il colore diventa più intenso. Non di meno continuando il riscaldamento avviene uno svolgimento di bollicine gassose come nei casi di effervescenza ed il colore giallo, man mano scemando, finisce collo scomparire affatto. Da ultimo, separata con la filtrazione l'allumina, ed aggiungendo nella soluzione

filtrata acido cloroidrico sino a renderla leggermente acida, il colore giallo che si manifesta rimane stabile.

Questo comparire e scomparire del colore giallo delle soluzioni non avviene sempre con tutti i particolari allo stesso modo nelle diverse operazioni, essendo quasi impossibile che qualche differenza non si verifichi nello stato delle soluzioni; e fin qui ho esposto quello che ho osservato in uno degli esperimenti con particolar cura eseguito.

Ora debbo esporre un fatto assai notevole che non sempre mi è riuscito verificare quando ho cercato riprodurlo. Le soluzioni gialle, leggermente acide, con la concentrazione depositano cristalli cubici di cloruro potassico dello stesso colore delle acque madri; e talvolta, quando il grado di concentrazione non è tale da doversi subito depositare il cloruro di potassio, si ha un altro deposito di cristalli in forma di sottilissime laminucce bislunghe gialle e splendenti.

Queste laminucce raccolte sul filtro e prosciugate formano sulla carta del filtro esile strato di colore giallo con isplendore metallico, nel quale non è possibile distinguere la forma delle laminucce che lo compongono per la estrema loro sottigliezza. Come si vedrà or ora sono composte di acido vesbico e potassa. Esse sono facilmente solubili nell'acqua che colorano in giallo, colore che non si muta col riscaldamento sino all'ebollizione. La soluzione è neutra alle carte reagenti; col nitrato di argento dà precipitato rosso somigliante al minio, che raccolto sul filtro e lavato, si hanno le prime acque scolorite, e continuando il lavacro escono tinte in giallo, come si è veduto per il vesbiato di argento descritto nel precedente paragrafo (pag. 7); con l'ammoniaca il suo colore non si muta, o diventa alquanto più intenso; ma riscaldata la soluzione sino all'ebollizione, il colore svanisce completamente. Con l'acido cloroidrico, sparisce il colore giallo, nè ricomparisce neutralizzando l'acido con l'ammoniaca.

Volendo assicurarmi della presenza della potassa nelle laminucce gialle, non ho potuto concentrare la loro soluzione gialla per avere distinta la reazione di questo alcali col cloruro di platino; perchè come nelle altre soluzioni di vesbio, quando si cerca concentrarla si ha deposito rosso presso i margini del liquore. Intanto mi sono assicurato della potassa nella soluzione scolorita separata dal vesbiato di argento. Tolto da questa soluzione l'argento del nitrato eccedente col mezzo dell'acido cloroidrico, ho potuto concentrarla, ed ho avuto in essa col cloruro di platino il precipitato giallo caratteristico dei sali di potassio. E questa reazione che potrebbe attribuirsi al cloruro potassico delle acque madri che inevitabilmente accompagna le laminucce gialle, considerando la quantità di potassio svelata nel saggio fatto, non dubito riferirla alla potassa combinata all'acido vesbico.

È degno di nota il modo come queste laminucce si comportano col riscaldamento. Esposte in cannello di vetro sulla fiamma della lampada ad alcool, cominciano ad annerirsi come subiscono un principio di fusione; indi si fondono completamente producendosi un liquido opaco di color bruno-verdastro, e se in questo stato si sospende l'azione della fiamma, si ha col raffreddamento una sostanza nera ed opaca. Continuando a mantenere il cannello sulla fiamma, il liquido opaco man mano muta il suo colore bruno-verdastro in bruno-gialliccio e diventa trasparente, e così si conserva dopo il raffreddamento. Se questa varietà trasparente la si espone di nuovo sulla fiamma sino a che si fonda, ritorna opaca, e lasciandola raffreddare in questo stato, resta opaca e di color rosso. Si hanno dunque quattro diversi stati, o dir vogliamo varietà, del vesbiato po-

tassico per effetto del riscaldamento. La prima nera per fusione imperfetta; la seconda ancor nera per fusione perfetta portata allo stato di opacità; la terza bruno-gialliccia trasparente per fusione perfetta portata allo stato di trasparenza; la quarta di color rosso opaca che si ha dalla precedente varietà trasparente quando di nuovo riscaldata, si sospende l' azione del calore allorchè è giunta a fondersi. Son di avviso che la medesima varietà rossa si avrebbe se dopo la fusione perfetta del vesbiato potassico si continuasse a riscaldarlo, e si sospendesse l' azione del calore alquanto prima che sia divenuto affatto trasparente.

Intanto importa sapere che di queste quattro varietà soltanto quella di color bruno gialliccio e trasparente è solubile nell'acqua, dando soluzione gialla. Le altre varietà, se immerse nell'acqua la colorano in giallo, ciò deriva dal perchè contengono un poco della varietà trasparente; ma la maggior parte di esse rimane insoluta, anche quando si cerca farne soluzione col bollimento dell'acqua.

Da questo saggio apparisce che il vesbiato giallo di potassio diviene insolubile nell' acqua se si riscalda sino a fargli subire la prima fusione, e ritorna solubile se la fusione si porta al punto da dare liquido trasparente.

Le varietà poi insolubili nell'acqua sono solubili negli acidi. Con l'acido cloroidrico concentrato si ha immediatamente soluzione di color rosso di sangue che in breve diventa di color rosso bruno, e basta aggiungere qualche goccia di acqua per averla colorata in verde.

La soluzione acquosa delle laminucce gialle con l'idrogeno solforato si colora in verde fosco che poi si muta in bruno, e trascorse alquante ore s'intorbida restando per lungo tempo invariato il colore bruno della soluzione. Se nella soluzione inverdita per l'azione dell'idrogeno solforato si aggiunge un po' di acido cloroidrico, si ha subito forte intorbidamento al quale succede un deposito nericcio, rimanendo il liquore soprastante scolorato. Avendo voluto aggiungere prima l'acido cloroidrico e poi l' idrogeno solforato, non senza maraviglia ho veduto che quest' ultimo ha dato origine a forte intorbidamento bianco; ed il liquore si è conservato torbido e bianco per più di tre giorni.

Da questi risultamenti che riferisco quali l'esperienza per due volte ripetuta me li ha mostrati, sembrami dover conchiudere che le qualità del vesbio siano in singolar modo modificabili.

§ V.— *Soluzioni azzurre di vesbio.*

Spesso ed in condizioni diverse le soluzioni che contengono il vesbio sono colorite in azzurro, e non potrei dire con certezza qual sia il composto di vesbio che somministra questo colore. Più che in altri casi il colore azzurro di bellissima tinta si ottiene quando nella soluzione cloroidrica del primitivo prodotto di color verde fosco avuto dalla vesbina si versa la soluzione d'idrogeno solforato, che si è veduto innanzi (pag. 2) ingenerare precipitato bruno, e mutare il color verde del liquore in azzurro. Adoperando l'acido nitrico in luogo dell'acido cloroidrico, il colore azzurro che si ha con lo stesso reattivo riesce assai sbiadito. Questa reazione fa ricordare ciò che avviene con l'idrogeno solforato nelle soluzioni acide che contengono l'acido moliddico, e fa presumere una notevole somiglianza tra il vesbio ed il moliddeno. E gli esperimenti che esporrò in questo paragrafo sono diretti a far conoscere nel tempo stesso e le compli-

catissime instabili reazioni delle soluzioni che contengono il vesbio e le loro differenze da quelle che contengono il moliddeno.

La soluzione azzurra che ha servito per i seguenti saggi era stata preparata aggiungendo alla soluzione acida di color verde tanto d'idrogeno solforato da far sentire il suo odore qualche tempo dopo che il precipitato si è deposto; e conservata per circa sei mesi non ha manifestato alcun mutamento. In essa si sono eseguite quattro serie principali di saggi; 1ª con l'ammoniaca aggiunta poco per volta 2ª con l'ammoniaca aggiunta in eccesso; 3ª con lo zinco; 4ª con l'idrogeno solforato in grande eccesso.

1° *Ammoniaca aggiunta poco per volta.* — Aggiungendo poco di ammoniaca capace di neutralizzare soltanto piccola parte dell'acido cloroidrico, si è avuto un primo precipitato di color verde bruniccio che raccolto sul filtro e prosciugato, è rimasto di colore azzurro fosco. Il liquore filtrato ha ritenuto il colore azzurro meno vivace; e conservato all'aria libera per tre giorni, il suo colore si è gradatamente cambiato in azzurro verdiccio, in verde ed in verde gialliccio; nel tempo stesso si è prodotto un po' di sedimento verdastro. Con la seconda aggiunzione dell'ammoniaca si è pure avuto precipitato di color verde bruniccio che raccolto sul filtro e prosciugato, è rimasto di color verde. Gli stessi risultamenti si sono avuti aggiungendo l'ammoniaca per la terza volta senza neutralizzare completamente l'acido cloroidrico; e la soluzione filtrata è rimasta di color giallo verdiccio. Da ultimo, aggiunta l'ammoniaca in eccesso, il precipitato è stato di color verde misto ad un po' di giallo e di bruno, e la soluzione si è scolorata.

Separata la soluzione dal precipitato e concentrata, si è ingiallita; portata a secchezza ha lasciato residuo verdastro formato in parte dal cloruro ammonico, ed in parte da una sostanza verdiccia insolubile nell'acqua e solubile nell'acido cloroidrico, producendo soluzione di color verde gialliccio.

Da questo saggio sembra potersi conchiudere che il vesbiato disciolto nella soluzione azzurra sia solubile nelle soluzioni dei sali ammoniacali. Ma avendo fatto altri esperimenti aggiungendo alla soluzione azzurra grande eccesso di cloruro ammonico, non ho potuto impedire il precipitato bruno che si ottiene con l'ammoniaca. Egli è però che rimane a definirsi perchè una parte soltanto, e quale parte, dei vesbiati sia solubile nelle soluzioni dei sali ammoniacali.

Intanto ho voluto esaminare questa parte solubile e nella soluzione cloroidrica del residuo verdastro, avendo aggiunto l'ammoniaca, si è prodotto forte intorbidamento bruno seguíto in breve da abbondante sedimento bruno, il quale col riposo di circa dodici ore è scomparso, lasciando pochissimo deposito bianco (allumina) e liquore affatto scolorito. In questo liquore aggiungendo acido cloroidrico sino a neutralizzare porzione dell'ammoniaca, si è avuto colorazione gialla che si è dileguata col riscaldamento. Aggiungendo per la seconda volta l'acido cloroidrico senza neutralizzare in tutto l'ammoniaca, è ricomparso il colore giallo, e col riposo di alquante ore si è avuto deposito bianco tanto voluminoso quanto il primiero deposito bruno prodotto dall'ammoniaca. Anche questo liquore giallo col riscaldamento si è scolorito; ed avendo in esso versato novello acido cloroidrico sino ad avere reazione acida, il deposito bianco si è in gran parte disciolto restandone insoluta piccola parte colorata in rosso di sangue. Anche questo residuo si è disciolto aggiungendo altro acido cloroidrico. E finalmente nella soluzione acida versando l'ammoniaca sino a renderla leggermente alcalina, è ricomparso il co-

lore giallo e dopo breve riposo si è riprodotto il deposito bianco disciolto dall'acido cloroidrico.

Con la stessa soluzione cloroidrica del residuo verdastro ho fatto non pochi altri saggi che non credo utile riferire; e dirò soltanto che con l'idrogeno solforato ho avuto immediato e forte intorbidamento bianchiccio; e soltanto dopo molte ore di riposo si è prodotto sedimento bianchiccio restando il liquore colorito in azzurro assai sbiadito. Il sedimento è in gran parte formato di zolfo.

Ritornando al precipitato prodotto con l'ultima aggiunzione dell'ammoniaca in eccesso, e raccolto sul filtro, esso è stato le molte volte lavato, le acque di lavanda sono uscite scolorate, ed il precipitato si è lentamente scemato. Le medesime acque di lavanda concentrate nella stufa hanno acquistato colore giallo tanto più intenso per quanto maggiore è stata la concentrazione, verificandosi in esse i medesimi particolari esposti nel paragrafo 2°. Lo scarso residuo del precipitato rimasto sul filtro, disciolto con poco acido cloroidrico ha dato soluzione gialliccia. In essa l'idrogeno solforato ha dato luogo a forte intorbidamente bianchiccio; il liquore è rimasto torbido per più di due giorni, ed è passato torbido a traverso il filtro. L'ammoniaca ha dato precipitato alquanto bruniccio, il quale disciolto con poco acido cloroidrico, la soluzione si è colorata in giallo. La potassa in eccesso ha dato scarso precipitato rossastro; e nella soluzione potassica, aggiungendo poco per volta l'acido cloroidrico, si è giunto al punto che l'allumina si è precipitata e la soluzione si è colorita in giallo.

Quanto ai precipitati raccolti sui filtri dopo le prime aggiunzioni di ammoniaca, restando la soluzione acida, li ho trovati pure composti di acido vesbico combinato all'ossido ferrico ed all'allumina.

2° *Ammoniaca aggiunta in eccesso.*—Con l'ammoniaca aggiunta in eccesso si ha precipitato bruno e la soluzione scolorita. Separata la soluzione dal precipitato, e concentrata nella stufa, si è ingiallita; e portata a secchezza, ha lasciato residuo verdiccio. Discacciato da questo residuo col riscaldamento il sale ammoniacale, è avanzata pochissima sostanza nericcia, sulla quale aggiungendo acido cloroidrico concentrato, l'acido si è colorito in rosso di sangue [1]), colore che in pochi istanti si è mutato in bruno, in bruno gialliccio, indi in giallo verdiccio, e per poco che l'ho riscaldato, in verde smeraldo.

Nel lavare poi il precipitato bruno raccolto sul filtro, mentre le prime acque sono uscite scolorate e limpide, le successive lavande hanno dato liquore torbido di nericcio, e nel tempo stesso il colore bruno del precipitato è divenuto assai più fosco e quasi nero. Nè ripetendo per circa venti volte le lavande ho avuto altro liquore se non torbido di nericcio. Intanto conservata porzione del liquore torbido esposto all'ambiente, il suo colore ha cominciato a mutarsi in verde fosco, indi in verde più chiaro, lo stesso intorbidamento è andato man mano scemandosi, e senza depositarsi la sostanza che lo intorbidava, trascorso il sesto giorno, è divenuto quasi affatto trasparente e di color verde gialliccio. L'altra porzione concentrata nella stufa, ha dato un po' di sedimento, il co-

[1]) Questa reazione dell'acido cloroidrico di colorirsi in rosso intenso quando viene in contatto di un composto di vesbio disseccato è molto sensibile, quantunque fugace; e molte volte concentrando le soluzioni contenenti il vesbio, mentre sulle pareti della capsola non appariva alcun segno di sostanze straniere, facendo scorrere sulle medesime pareti una goccia di acido cloroidrico, si è manifestato il color rosso che di repente si dilegua per poco di acqua che vi si aggiunga.

lore è divenuto meno fosco, ma non è divenuta trasparente; nondimeno si è avuto con la filtrazione liquore limpido e di colore alquanto più chiaro del precedente.

Da queste due soluzioni che si possono considerare per la massima parte, se non in tutto, formate di vesbiato ammonico neutro, ho avuto per i saggi fatti le stesse reazioni delle quali riferirò le più notevoli. Con l'idrogeno solforato diventano di color bruno, restano per alcune ore trasparenti, e poi si produce forte intorbidamento bruno prodotto da materie difficili a depositarsi. Se dopo l'idrogeno solforato si aggiunge alquanto di acido cloroidrico, si ha subito precipitato bruno nericcio, ed il liquore resta con lievissima tinta cilestrina poco apparente. Anche in queste soluzioni si è verificato quel che ho riferito discorrendo del vesbiato giallo di potassio (pag. 10), che cioè versando in esse prima acido cloroidrico e poi l'idrogeno solforato, invece di aversi precipitato bruno, si produce forte intorbidamento bianco. Con l'acido cloroidrico si colorano in giallo, ed il colore in breve si dilegua. Con l'ammoniaca si colorano pure in giallo senza prodursi precipitato, o con pochissimo precipitato bianchiccio, il colore giallo si dilegua col riscaldamento sino all'ebollizione, ritorna a comparire con l'aggiunzione di poco acido cloroidrico, e di nuovo si dilegua continuando a versare lo stesso acido, nel tempo stesso che si svolgono minutissime bollicine gassose.

L'ultimo deposito rimasto sul filtro, dopo la filtrazione del liquore torbido di nericcio, si è facilmente disciolto con l'acido cloroidrico producendosi soluzione verde. In essa l'ammoniaca ha dato precipitato bruno; l'idrogeno solforato ha dato forte intorbidamento gialliccio, e col riposo si è prodotto un po' di sedimento bruniccio, rimanendo il liquore soprastante torbido di bianchiccio.

Sembrami meritare qualche attenzione i menzionati precipitati che facilmente si hanno con l'idrogeno solforato, mentre la soluzione azzurra dalla quale siamo partiti non era più capace di precipitare con lo stesso reattivo. Sia la sostanza che produce l'intorbidamento bianco, sia il precipitato nericcio, considerando le condizioni nelle quali l'una e l'altro si sono prodotti, sembra naturale doverli considerare come solfuri di vesbio; donde deriverebbe che il vesbio faccia un solfuro bianco ed un solfuro nero. Ma prima di accettare questa conchiusione, ho stimato necessario eseguire qualche saggio sui medesimi precipitati.

Il precipitato di color bruno nericcio raccolto sul filtro col prosciugarsi diventa nero; fuso col sale di fosforo manifesta per i colori caratteristici del vetro la presenza del vesbio; riscaldato in piattello di platino sulla fiamma della lampada ad alcool, si accende come lo zolfo, lasciando per residuo polvere nera; il residuo è attaccato con qualche difficoltà dall'acido cloroidrico, producendosi soluzione verde. Quindi senza alcun dubbio esso è solfuro di vesbio. Quanto alla sostanza che produce l'intorbidamento bianco, nè col riposo, nè col riscaldamento della soluzione sino all'ebollizione mi è riuscito vederla depositata; e di più il liquore passa torbido a traverso il filtro. Quindi non ho potuto direttamente riconoscere che cosa sia questa sostanza bianca con la scarsa quantità di vesbina di cui ho potuto fin' ora disporre.

3° *Reazione dello zinco.*—Con lo zinco immerso nella soluzione azzurra si ha che lentamente presso il metallo immerso questa si colora in bruno, e trascorse alcune ore, o anche molte ore se la soluzione è abbondante, tutto il liquore diventa di colore bruno così intenso che sembra affatto opaco, e bisogna allungarlo con molta acqua per vederlo

trasparente, mentre conserva ancora il colore bruno. Sovrabbondando di più nell'aggiungere l'acqua, al colore bruno si mescola un po' di giallo.

Se invece di prendere la soluzione azzurra ottenuta con l'idrogeno solforato in una soluzione del primo vesbiato verde fosco fatta con l'acido cloroidrico, si prende l'altra soluzione di colore azzurro sbiadito che provviene dallo stesso vesbiato disciolto nell'acido nitrico, il colore del liquore comincia dal divenire verde presso lo zinco immerso, e lentamente si muta in giallo [1]).

La soluzione bruna, aggiuntavi l'acqua sino a farla divenire trasparente, ha debole reazione acida. In essa versando l'ammoniaca si è avuto abbondante precipitato verdastro, e disciolto il precipitato con acido cloroidrico, è ricomparso il colore bruno che man mano si è mutato in verde gialliccio, in verde azzurro ed in cilestrino. Con gli acidi cloroidrico, nitrico è solforico il colore bruno, con piccole differenze di tinte, si muta in verde che finisce col divenire cilestrino. Con l'idrogono solforato si ha forte intorbidamento che sembra giallastro, e col riposo si forma deposito bianco (solfuro di zinco) e persiste il colore bruno della soluzione anche aggiungendo grande eccesso d' idrogeno solforato.

4° *Trattamento con l'idrogeno solforato.* — Avendo presente che le soluzioni acide che contengono il moliddeno, per minime tracce di questo corpo non ancora precipitato allo stato di solfuro con l' idrogeno solforato, conservano il colore azzurro, ho voluto assicurarmi se anche il colore della soluzione che ho preso ad esaminare provvenisse dal moliddeno. Quindi ho versato in essa a larga mano la soluzione d' idrogeno solforato, poi filtrato il liquore l' ho concentrato con la ebollizione. Ripetendo per cinque volte questa operazione, nelle due prime volte, quantunque assai scarso, si è avuto un po' di precipitato bruno nericcio, alla terza volta sono rimasto incerto se qualche traccia dello stesso precipitato siasi prodotto, e nelle ultime due volte si è avuto soltanto un po' di solfo depositato. E nella soluzione azzurra dopo questi ripetuti trattamenti con l'idrogeno solforato ho verificato le medesime reazioni che si sono esposte per la soluzione in cui una volta sola si era aggiunto l'idrogeno solforato. Nè più ho ricercato il moliddeno, perchè il corpo che rendeva azzurro il liquore, anzichè in quantità minima, era molto abbondante; e molti dei caratteri che abbiamo esaminati non appartengono al moliddeno. Ammessa una certa relazione tra il vesbio ed il moliddeno, quando considero le sue reazioni fin qui esposte, assai meglio che col moliddeno trovo che esso abbia somiglianza col vanadio. E lasciando da parte molti caratteri di piccola importanza, e qualche carattere da me trovato nel vesbio e che non so se riscontra nel vanadio, mi fanno principalmente credere il vesbio diverso dal vanadio, ed il colore azzurro che dalle soluzioni acide si ha con l'idrogeno solforato, ed il colore giallo rossiccio o affatto rosso del vesbiato di argento, e la reazione che si ritiene caratteristica del vanadio col cloruro ammonico che non ho trovato appartenere al vesbio.

[1]) Ho pure fatto la pruova d'immergere lo zinco nella soluzione della vesbina nell'acido nitrico prima che con l'idrogeno solforato si fosse mutato il suo colore in azzurro. In questo caso s'intende che la soluzione contiene alcuni elementi che mancano nelle soluzioni azzurre perchè precipitati dall'idrogeno solforato. Ed ho osservato che anche in questo caso il colore verde della soluzione si muta in giallo, e che di più si deposita una sostanza fioccosa gialla. Ometto intanto di descrivere altri particolari osservati in queste soluzioni che probabilmente vanno attribuiti più che al vesbio alle sostanze straniere che al vesbio sono unite. Per la medesima ragione ho tralasciato di riportare in questa memoria molte reazioni che, forse a torto, ho creduto dipendere non tanto dal vesbio, quanto dal trovarsi esso mescolato ad altre sostanze. E per certo una delle maggiori difficoltà incontrate nelle presenti ricerche è dipesa dalla impossibilità di avere per ora le sostanze sottoposte all'analisi di composizione definita e libere da materie straniere; ed è per questo che prevedo le cose esposte andar soggette a non poche correzioni.

CONCLUSIONE

Dalle cose fin qui dette si deduce che il vesbio forma un acido da noverarsi tra quelli che dànno con gli alcali sali solubili, e con gli altri ossidi metallici sali insolubili nell'acqua ma solubili negli acidi; che le soluzioni acide del vesbiato di alluminio e ferro ottenuto dalla vesbina sono colorite in verde, e con l'idrogeno solforato il color verde si muta in azzurro; che le soluzioni acquose dei vesbiati alcalini sono colorate in giallo, ovvero sono affatto scolorite, secondo la maniera come essi sono stati prodotti; e dànno con le soluzioni degli altri sali metallici precipitati di color vario secondo i metalli contenuti in queste soluzioni; che tra i precipitati più notevoli sono quelli del vesbiato di argento di color giallo rossiccio o rosso di minio, e l'altro del vesbiato di zinco ch'è verdastro; che le soluzioni di manganese fanno eccezione a questa regola, dappoichè non dànno alcun precipitato ed invece si colorano in giallo. Di più l'acido vesbico ottenuto dalla scomposizione del vesbiato di argento è rosso, quasi insolubile nell'acqua, e solubile negli acidi che si colorano in rosso; lo stesso acido ottenuto dai vesbiati alcalini scolorati è bianco poco solubile nell'acqua. Nelle soluzioni acide dei vesbiati l'ammoniaca e la potassa precipitano i vesbiati disciolti e nel tempo stesso ne disciolgono una porzione, e la soluzione che se ne ottiene è colorata in giallo dall'acido cloroidrico. Tutti i composti di vesbio fusi col sale di fosforo dànno alla fiamma esterna vetro di color giallo, al quale si mescola un po' di rosso e di bruno, ed alla fiamma interna vetro di color verde.

Tra i fatti ammirevoli che s'incontrano nei composti di vesbio vanno ricordati quello del vesbiato giallo di potassio, che riscaldato sino a che giunga a fondersi, si annerisce e diventa insolubile nell'acqua, ma se si fa progredire la fusione sino a dare un liquido trasparente, ritorna solubile. E l'altro fatto non meno importante dei vesbiati solubili che nelle loro soluzioni neutre, aggiungendo prima l'idrogeno solforato e poi l'acido cloroidrico, si ha precipitato bruno nericcio; e se al contrario prima si rende acida la soluzione con l'acido cloroidrico e poi si aggiunge l'idrogeno solforato, si produce forte intorbidamento di color bianco.

Se gli esposti caratteri fanno presumere essere il vesbio un corpo diverso dagli altri fin'ora conosciuti, è pur vero che la sua storia rimane molto imperfetta, e restano non poche cose importanti a conoscersi. Ed oltre le correzioni a farsi nelle cose innanzi riferite, e che non tutte hanno potuto riuscire esatte per la impurità e la scarsezza delle sostanze adoperate, restano a separarsi i caratteri del corpo semplice, il suo peso equivalente, la maniera di determinare quantitativamente il vesbio, le formole chimiche, e le forme cristalline dei suoi composti. Avute queste conoscenze si potrà meglio giudicare se il vesbio sia un nuovo corpo; e da mia parte, se i mezzi e la mia poca abilità me lo permetteranno, mi propongo riempire le menzionate lacune.

finita stampare il dì 31 dicembre 1879

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SUR LA DÉTERMINATION DES GROUPES D'ORDRE FINI CONTENUS DANS LE GROUPE LINÉAIRE

MÉMOIRE

par M.r CAMILLE JORDAN

La détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire fractionnaire à une variable (ou ce qui revient au même, dans le groupe des substitutions linéaires entières à deux variables) a été effectuée pour la première fois par M. Klein (*Mathematische Annalen*, T. IX). Ses résultats ont été confirmés depuis par des méthodes toutes différentes (Fuchs, *Journal de Borchardt,* 81, et Gordan, *Mathematische Annalen*, T. 12).

Malgré l'intérêt considérable qui s'attache aux travaux de ces éminents géomètres, on pouvait désirer une méthode plus directe pour résoudre cette question. La détermination des groupes cherchés n'est en effet qu'un problème de substitutions, qui doit pouvoir se traiter par les seules ressources de cette théorie, sans recourir comme M. Klein à la géomètrie non euclidienne, ou comme MM. Fuchs et Gordan, à la théorie des formes. La nouvelle méthode qu'il s'agissait de trouver devait d'ailleurs, pour être entièrement satisfaisante, être susceptible de s'étendre aux groupes à plus de 2 variables.

M. Camille Jordan a consacré récemment à cette question un mémoire étendu (*Journal de Crelle,* 84). Il y résout le problème pour les groupes à 2 et à 3 variables; et pour le cas de n variables, il arrive au théorème suivant :

Les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à n *variables, appartiennent à un nombre de types limité.*

Le démonstration que M. Jordan donne de cette proposition est exacte au fond; mais la forme est imparfaite. L'auteur démontre en effet que le nombre des types cherchés n'est pas illimité, mais sans fournir aucun moyen de déterminer sa limite supérieure. M. Jordan a d'ailleurs fait dans l'énumération des groupes à trois variables une omission relevée par M. Klein. Il importait de remonter à la source de cette erreur

pour s'assurer qu'elle n'avait pas fait négliger d'autres groupes que celui dont le savant géomètre de Munich a démontré l'existence.

Le présent Mémoire est divisé en deux Chapitres :

Le chapitre I est consacré à la théorie générale. Nous y montrons qu'en énumérant d'une façon convenable les substitutions d'un groupe d'ordre fini à n variables, et égalant le nombre trouvé au nombre total, on obtient une équation, dite fondamentale, d'où l'on peut déduire sans difficulté le théorème de M. Jordan, par une voie qui permet d'assigner effectivement la limite dont ce géomètre s'était borné à établir l'existence. La formation de cette équation fondamentale suppose d'ailleurs la connaissance des groupes d'ordre fini à moins de n variables.

Le Chapitre II est spécialement consacré aux groupes à 4 variables. Il est divisé en trois sections :

Dans la première, nous établissons celles des propriétés des groupes à 2 et 3 variables qui sont nécessaires pour notre objet; cette recherche nous conduit à compléter l'énumération des groupes à 3 variables, dans laquelle il existait une lacune, ainsi que nous l'avons dit.

Dans les sections II et III, nous formons explicitement l'équation fondamentale relative à 4 variables.

Pour achever la solution du problème, il resterait à discuter cette équation, par un procédé analogue à celui qui a été employé avec succès pour 3 variables. Mais ce travail est tellement considérable par suite de la multiplicité des cas à examiner que nous avons dû renoncer à l'entreprendre pour le moment.

ANALYSE

CHAPITRE I.

Démonstration du théorème fondamental.

§ 1.

1. On sait que toute substitution linéaire d'ordre fini et de déterminant $\gtrless 0$ peut être ramenée, en choisissant convenablement les variables, à la forme *canonique*

$$| x, y, z, \ldots \quad ax, by, cz, \ldots |$$

où $a, b, c, \ldots$ sont des racines de l'unité.

2. Nous donnerons le nom de *faisceau* à tout groupe de substitutions linéaires échangeables entre elles.

On sait encore que si F est un faisceau d'ordre fini, on pourra choisir les varia-

bles de manière à ramener à la fois toutes les substitutions de F à leurs formes canoniques respectives

$$| x, y, z, u, v, \ldots \quad a'x, b'y, c'z, d'u, e'v, \ldots |$$
$$| x, y, z, u, v, \ldots \quad a''x, b''y, c''z, d''u, e''v, \ldots |$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il peut arriver après cette réduction que les coefficients qui multiplient quelques unes des variables soient constamment égaux entre eux dans les substitutions de F; qu'on ait par exemple $a'=b'$, $a''=b''$, etc. Si cette circonstance se présente, il conviendra de la mettre en évidence, en remplaçant dans l'expression de ses substitutions les coefficients $b', b'', \ldots$ par $a', a'', \ldots$ qui leur sont égaux. Cela fait, les substitutions de F seront de la forme générale

$$| x, y, z, u, v, \ldots \quad ax, ay, cz, du, ev, \ldots | . \tag{1}$$

Deux quelconques des coefficients $a, c, d, e, \ldots$ qui restent en évidence devront être inégaux dans l'une au moins des substitutions de F (sinon on devrait les représenter par la même lettre, comme il vient d'être expliqué, ce qui réduirait le nombre des coefficients distincts que contient l'expression (1)).

3. Soient $s_1, s_2, \ldots$ les diverses substitutions de F; $\theta_1, \theta_2, \ldots$ les valeurs correspondantes des rapport $\frac{c}{a}$, par exemple. Ces diverses quantités, étant des racines de l'unité, se réduiront aux puissances d'une même irrationnelle θ, racine primitive d'une équation binôme telle que $\theta^\mu=1$. Soit d'ailleurs ω l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de F dans lesquelles $a=c$; l'ordre de F sera évidemment égal à $\mu\omega$.

4. Nous dirons que le faisceau F est *irréductible par rapport à un nombre* λ si chacun des rapports $\frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{e}{a}, \frac{d}{c}, \frac{e}{c}, \frac{e}{d}, \ldots$ prend dans les diverses substitutions de F un nombre de valeurs distinctes supérieur à λ.

5. Si F est réductible par rapport à λ, quelques uns des rapports précédents, par exemple $\frac{c}{a}$ et $\frac{e}{d}$, ne prendront pas plus de λ valeurs distinctes dans ses substitutions. Soit F' le faisceau formé par celles des substitutions de F où $c=a$ et $d=e$. Elles auront pour forme générale la suivante

$$| x, y, z, u, v, \ldots \quad ax, ay, az, du, dv, \ldots |$$

où le nombre des coefficients distincts est moindre de deux unités que dans l'expression (1). Soit d'ailleurs Ω' l'ordre de F'. Celui de F sera evidemment $k\Omega'$, k étant le nombre des systèmes de valeurs distinctes dont les rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{e}{d}$ y sont suscepti-

bles. Chacun d'eux ayant au plus λ valeurs distinctes, par hypothèse, on aura évidemment $k \overline{\overline{<}} \lambda^2$.

Le faisceau F′ peut être irréductible par rapport à λ. S'il ne l'est pas, on en déduira de même un nouveau faisceau F″ contenu dans F′, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un faisceau irréductible, ou à un faisceau dont les substitutions

$$| x, y, z, u, v, \dots \quad ax, ay, az, au, av, \dots |$$

multiplient toutes les variables par un même facteur. Si nous convenons de considérer ce dernier faisceau comme irréductible, nous pourrons énoncer la proposition suivante:

Théorème. — *Tout faisceau* F *réductible par rapport à* λ *contient au moins un faisceau irréductible* F_1, *qui s'en déduit par un procédé exempt d'ambiguïté.*

Les ordres Ω *et* Ω_1 *de ces deux faisceaux satisfont à la relation*

$$\Omega \overline{\overline{<}} \lambda^{m-m_1} \Omega_1,$$

m *et* m_1 *désignant le nombre des coefficients distincts qui figurent respectivement dans l'expression générale des substitutions de* F *et de* F_1.

Corollaire : m_1 étant au moins égal à l'unité, et m au plus égal au nombre total n des variables, on aura a fortiori

$$\Omega \overline{\overline{<}} \lambda^{n-1} \Omega_1.$$

Remarque : F peut contenir des faisceaux irréductibles autres que F_1; mais il est clair que ces faisceaux seront nécessairement contenus dans F_1.

6. Théorème. — *Soient* f *un faisceau quelconque;* F *un autre faisceau contenant* f; ω *et* $\Omega = k\omega$ *leurs ordres respectifs. Si* f *est réductible par rapport à* λ, F *le sera par rapport à* $k\lambda$.

Soit pour fixer les idées

$$| x, y, z, u, v, \dots \quad ax, ay, cz, du, ev, \dots |$$

la forme des substitutions de f. Ce faisceau étant réductible par rapport à λ, l'un au moins des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, ... prendra au plus λ valeurs dans ses substitutions. Admettons, par exemple, que $\frac{c}{a}$ y prenne l valeurs, l étant $\overline{\overline{<}} \lambda$. On aura évidemment $\omega = l\omega'$, ω' étant l'ordre du faisceau f' formé par celles des substitutions de f où $a = c$. On aura de même $\Omega = L\Omega'$, L étant le nombre des valeurs que prend $\frac{c}{a}$ dans les substitutions de F, et Ω' l'ordre du faisceau F′ formé par celles des substitutions de F où $a = c$.

Or il est clair que F′ contient f'. Donc $\Omega' \overline{\gtrless} \omega'$; on aura par suite

$$L\Omega' = \Omega = k\omega = kl\omega' \overline{\lessgtr} kl\Omega'$$

d'où $L \overline{\lessgtr} kl \overline{\lessgtr} k\lambda$, ce qui démontre le théorème.

§ 2.

7. Soient G un groupe d'ordre fini, contenu dans le groupe linéaire à n variables; F un faisceau contenu dans G, et dont les substitutions ramenées à la forme canonique soient par exemple de la forme suivante:

$$|\, x, y, z, u, v, \ldots \quad ax, ay, cz, du, ev, \ldots \,|.$$

On pourra dire que le faisceau F est *complet* ou non, suivant qu'il contiendra ou non toutes celles des substitutions de G qui sont de la forme ci-dessus.

Le faisceau F étant supposé complet, prenons celles de ses substitutions où les coefficients $a, c, d, e, \ldots$ satisfont à certaines relations d'égalité telles que celles-ci: $a = c$, $d = e$. Ces substitutions auront pour forme générale

$$|\, x, y, z, u, v, \ldots \quad ax, ay, az, du, dv, \ldots \,|$$

et formeront un faisceau complet contenu dans F.

En faisant varier le nombre et la nature des égalités imposées aux coefficients, on obtiendra une série de faisceaux complets, tous contenus dans F. Réciproquement il est clair que tout faisceau complet contenu dans F s'obtiendra par ce procédé.

Nous n'aurons d'ailleurs à nous occuper dans ce qui suit que des faisceaux complets contenus dans G. Nous pourrons donc supprimer l'épithète de complets, et leur donner simplement le nom de *faisceaux*.

8. Ces définitions posées, nous allons établir le théorème suivant:

Théorème. — *On peut déterminer un faisceau* F *contenu dans* G *et deux entiers limités* λ_n *et* μ_n, *jouissant des propriétés suivantes:*

1° F *est permutable aux substitutions de* G.

2° *Il est irréductible par rapport à* λ_n.

3° *Tout faisceau contenu dans* G *et irréductible par rapport à* λ_n *est contenu dans* F.

4° *L'ordre de* G *ne surpasse pas* $\mu_n \omega$, ω *désignant l'ordre de* F.

Nous dirons que le faisceau F est le *noyau* du groupe G.

Le théorème ci-dessus est évident si $n=1$, auquel cas on aura $\lambda_1 = \mu_1 = 1$, F=G.

Nous établirons qu'il est vrai pour une valeur quelconque de n, s'il est vrai pour les valeurs moindres.

9. On doit distinguer deux cas dans cette démonstration, suivant que G est *décomposable* au non.

1^{er} cas — groupes décomposables. — Nous dirons que G est décomposable, si l'on peut y répartir les variables en systèmes $x', y', \dots ; x'', y'', \dots ; x''', y''' \dots ; \dots$ tels que chaque substitution S du groupe G remplace les variables de chacun de ces systèmes par des fonctions linéaires des variables d'un même système.

Nous dirons pour abréger que S *fait succéder* au système Σ le système Σ', si elle remplace les variables de Σ par des fonctions linéaires des variables de Σ'.

10. A chaque substitution S du groupe G correspondra d'après cette définition une certaine substitution s, opérée sur les systèmes $\Sigma, \Sigma', \dots$

L'ordre Ω du groupe G sera évidemment égal à $k\Omega'$, Ω' étant l'ordre du groupe G' formé par celles des substitutions de G qui ne déplacent pas les systèmes, lesquelles seront de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x', y', \dots & a'x' + b'y' + \dots, c'x' + d'y' + \dots, \dots \\ x'', y'', \dots & a''x'' + b''y'' + \dots, c''x'' + d''y'' + \dots, \dots \\ \dots & \dots \end{array}\right| \qquad (2)$$

et k l'ordre du groupe formé par les substitutions s.

Admettons que parmi les systèmes, il y en ait α' contenant n' variables, α'' contenant n'' variables etc. Le nombre total des variables étant n, on aura

$$\alpha' n' + \alpha'' n'' + \dots = n .$$

D'ailleurs les substitutions de G ayant par hypothèse leur déterminant $\lesseqgtr 0$ devront permuter exclusivement entre eux les systèmes qui contienent un même nombre de variables. Le nombre k des déplacements qu'elles font subir aux systèmes sera donc un diviseur de $1 . 2 . \alpha' . 1 . 2 . . \alpha'' \dots$

11. Cela posé, chacune des substitutions (2) du groupe G' est le produit de substitutions partielles

$$| x', y', \dots a'x' + b'y' + \dots, c'x' + d'y' + \dots, \dots | \qquad (3)$$

$$| x'', y'', \dots a''x'' + b''y'' + \dots, c''x'' + d''y'' + \dots, \dots | \qquad (4)$$

opérées respectivement sur les variables des divers systèmes.

Soit n' le nombre des variables $x', y', \dots$ du premier système. Les diverses substitutions (3) correspondantes aux diverses substitutions de G' forment un groupe H'; et comme $n' < n$, on pourra par hypothèse déterminer un faisceau F' contenu dans H' et deux entiers limités $\lambda_{n'}$, $\mu_{n'}$, satisfaisant à l'énoncé du théorème. Soient de même n'' le nombre des variables $x'', y'', \dots$ du second système; H'' le groupe formé par les substitutions (4); on pourra déterminer un faisceau F'' contenu dans H'' et deux entiers $\lambda_{n''}$, $\mu_{n''}$ satisfaisant à l'énoncé du théorème. Et de même pour chacun des autres systèmes.

12. Soit I le faisceau formé par celles des substitutions de G' qui sont le produit de substitutions partielles respectivement contenues dans F', F'', ... L'ordre de H'

étant au plus égal à $\mu_{n''}$ fois l'ordre de F″; celui de H″ au plus égal à $\mu_{n''}$ fois l'ordre de F″, etc., il est clair que l'ordre Ω de G′ sera au plus égal à $O\mu_{n'}\mu_{n''}\ldots$ O désignant l'ordre de I.

13. Soit enfin λ_n le plus grand des entiers n, $\lambda_{n'}$, $\lambda_{n''}$, .. On pourra déterminer par la méthode du N° 5, un faisceau F contenu dans I, irréductible par rapport à λ_n, et dont l'ordre ω sera lié à celui de I par la relation

$$O \overline{\leq} \lambda_n^{n-1}\omega .$$

De cette relation, jointe aux précédentes

$$\Omega' \overline{\leq} O\mu_{n'}\mu_{n''}\ldots$$

$$\Omega = k\Omega' \overline{\leq} 1.2\ldots\alpha'.1.2\ldots\alpha''\ldots\Omega'$$

on déduira

$$\Omega \overline{\leq} k\mu_{n'}\mu_{n''}\ldots\lambda_n^{n-1}\omega \leq \mu_n\omega ,$$

μ_n désignant le produit

$$1.2\ldots\alpha'\ldots\mu_{n'}\mu_{n''}\ldots\lambda_n^{n-1} .$$

14. Le faisceau F et les entiers λ_n, μ_n satisferont à l'énoncé du théorème.

En effet, les substitutions de G étant évidemment permutables à G′, le seront au faisceau F, qui se déduit de G′ par un procédé exempt d' ambiguité. C'est la première condition.

D'ailleurs F est irréductible par rapport à λ_n, et l'ordre de G ne surpasse pas $\mu_n\omega$.

Il reste donc seulement à prouver que tout faisceau L contenu dans G sera réductible par rapport à λ_n s'il n'est pas contenu dans F.

Nous établirons successivement que L est réductible: 1° S'il n'est pas contenu dans G′; 2° S'il est contenu dans G′ sans l'être dans I; 3° S'il est contenu dans I sans l'être dans F.

15. 1° Supposons d'abord que L ne soit pas contenu dans G′. Ses substitutions déplacent les systèmes. Admettons pour fixer les idées qu'elles permutent entre eux d'une manière transitive les i premiers systèmes $x', y', \ldots ; x'', y'', \ldots ; \ldots ; x^i, y^i, \ldots$ sans les permuter avec les systèmes suivants $x^{i+1}, \ldots ; \ldots$ Chaque substitution S du faisceau L sera le produit de deux autres, dont l'une S_1 remplacera les variables $x', y', \ldots ; \ldots ; x^i, y^i, \ldots$ par des fonctions linéaires de ces mêmes variables, tandis que l'autre S_2 sera opérée sur les variables restantes $x^{i+1}, \ldots ; \ldots$

Les substitution S_1, considerées isolément, forment un faisceau L_1; les substitutions S_2 formeront un faisceau L_2; et il est clair que si l'un de ces faisceaux est réductible, L le sera.

Nous allons montre que L_1 est réductible.

16. Soit A le faisceau formé par celles des substitutions de L_1 qui ne déplacent pas les i systèmes $x', y', \ldots ; \ldots ; x^i, y^i, \ldots$; prenant pour variables indépendantes,

à la place des variables de chacun de ces systèmes, des fonctions linéaires convenablement choisies de ces mêmes variables, on pourra ramener simultanément à la forme canonique toutes les substitutions de A.

Cette opération effectuée, soit pour fixer les idées

$$\left|\begin{array}{ll} x', y', z' \ldots & ax', ay', cz', \ldots \\ x'', y'', z'' \ldots & ax'', ay'', cz'', \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^i, y^i, z^i, \ldots & ax^i, ay^i, cz^i, \ldots \end{array}\right|$$

la forme générale des substitutions de A. Les substitutions de L_1, étant échangeables à celles-là, devront remplacer les variables $x', y'; x'', y''; \ldots; x^i, y^i$ que chaque substitutions de A multiplie par un même facteur a par une fonction jouissant de cette même propriété, c'est à dire par une fonction linéaire de ces mêmes variables. De même pour les variables $z', z'', \ldots, z^i$; etc. Donc chaque substitution S_1 de L_1 est le produit de deux autres S_{11}, S_{12} effectuées respectivement sur les variables $x', y'; \ldots; x^i, y^i$ et sur les autres variables.

Soit L_{11} le faisceau formé par les substitutions partielles S_{11}. S'il est réductible, L_1 le sera évidemment. Nous allons prouver que L_{11} est réductible.

17. Les substitutions de L_1 remplaçant les variables de chacun des systèmes $x', y', z', \ldots; \ldots; x^i, y^i, z^i, \ldots$ par des fonctions linéaires des variables d'un même système et permutant transitivement ces i systèmes, les substitutions partielles S_{11} remplaceront les variables de chacun des systèmes $x', y'; \ldots; x^i, y^i$ par des fonctions linéaires des variables d'un même système, et permuteront transitivement ces systèmes. L'ordre de L_{11} sera donc égal à $i\omega_1$, ω_1 étant l'ordre du groupe A_1 formé par celles de ses substitutions qui ne déplacent pas le système x', y'.

Or les substitutions de A_1 ne déplacent aucun système. Soient en effet S l'une d'elles; x^s, y^s un système quelconque. L_{11} contiendra une substitution T qui fait succéder ce système à x', y'. Les substitutions du faisceau L_{11} étant échangeables entre elles, la substitution $T^{-1}ST$, laquelle ne déplace pas le système x^s, y^s, se confondra avec S. Donc S ne déplacera aucun système.

Le groupe A_1 sera donc exclusivement formé par les substitutions partielles

$$\left|\begin{array}{ll} x', y' & ax', ay' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x^i, y^i & ax^i, ay^i \end{array}\right|$$

correspondantes aux diverses substitutions de A. On voit que ces substitutions multiplient par un même facteur a toutes les variables $x', y'; \ldots; x^i, y^i$, et plus généralement toute fonction linéaire de ces variables.

18. Cela posé, changeons de variables, de manière à ramener simultanément à

leur forme canonique toutes les substitutions de L_{11}. Soient X, Y, Z, ... les nouvelles variables, et soit pour fixer les idées

$$| X, Y, Z, \ldots \quad \alpha X, \beta Y, \gamma Z, \ldots |$$

la forme générale des substitutions de L_{11}. L'ordre $i\omega_1$ de L_{11} sera égal à kP, k désignant le nombre de valeurs distinctes du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ et P l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de L_{11} pour lesquelles $\beta = \alpha$. Ce dernier groupe contient évidemment le groupe A_1 dont les substitutions sont de la forme

$$| X, Y, Z, \ldots \quad aX, aY, aZ, \ldots |$$

et dont l'ordre est ω_1. On aura donc

$$P \overline{\gtrless} \omega_1 \quad , \quad i\omega_1 = kP$$

d'où $k \overline{\lessgtr} i$, et *a fortiori* $k \overline{\lessgtr} n \overline{\lessgtr} \lambda_n$. Donc L_{11} sera réductible, comme nous l'avions annoncé.

19. 2° Supposons que L soit contenu dans G' sans l'être dans I. Chacune de ses substitutions S est un produit de substitutions partielles S', S'', ... appartenant respectivement aux groupes H', H'', ... Soient L', L'', ... les faisceaux respectivement formés par les substitutions partielles S', par les substitutions partielles S'', etc. Il est clair que L sera réductible, si l'un quelconque de ces faisceaux L', L'', ... est réductible. Or le théorème est supposé établi pour le groupe H' qui n'a que n' variables. Donc L sera réductible par rapport à $\lambda_{n'}$ (et *a fortiori* par rapport à λ_n qui est $\overline{\gtrless} \lambda_{n'}$) à moins qu'il ne soit contenu dans F'. De même L'' sera réductible, s'il n'est pas contenu dans F''; etc. Donc pour que L soit irréductible, il faut que L', L'', ... soient respectivement contenus dans F', F'', ... ; mais alors, par définition, L sera contenu dans I, contrairement à ce qu'on a supposé.

20. 3° Supposons enfin que L soit contenu dans I sans l'être dans F. Tout faisceau irréductible contenu dans I l'étant nécessairement dans F (N° 5), L sera réductible.

21. Remarque. — Les expressions trouvées plus haut (N° 13) pour λ_n et μ_n, dépendent des quantités $\alpha', \alpha'', \ldots, \lambda_{n'}, \lambda_{n''}, \ldots, \mu_{n'}, \mu_{n''}, \ldots$ Si l'on donne successivement à $\alpha', \alpha'', \ldots n', n'', \ldots$ tous les systèmes de valeurs compatibles avec l'équation de condition

$$\alpha' n' + \alpha'' n'' + \ldots = n$$

on obtiendra divers systèmes de valeurs pour λ_n et μ_n. Prenant pour chacune de ces deux quantités la plus grande des valeurs ainsi obtenues (lesquelles sont évidemment toutes limitées) on aura des valeurs de λ_n et μ_n applicables à un groupe décomposable quelconque.

22. $2^{ème}$ *cas.* — *Groupes indécomposables.* — Soit G un semblable groupe. Nous donnerons le nom de *substitutions singulières* à celles de ses substitutions qui multiplient toutes les variables par un même facteur. Leur ensemble constituera un faisceau Φ (contenant au moins une substitution, la substitution unité). Nous l'appellerons *faisceau singulier* et nous désignerons son ordre par φ.

Ce faisceau Φ est irréductible par définition par rapport à un nombre quelconque, et notamment par rapport à λ, λ désignant un nombre au moins égal au plus grand des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ qui satisfont à l'énoncé du théorème du N° 8 pour les groupes à $1, 2, \ldots, n-1$ variables.

23. Il peut se faire que G contienne outre le faisceau singulier Φ, d'autres faisceaux irréductibles par rapport à λ. Nous les nommerons *faisceaux ordinaires.* Chacun d'eux contiendra évidemment le faisceau singulier. Quelques uns d'entre eux pourront d'ailleurs être contenus les uns dans les autres.

24. Lemme I. — *Les faisceaux ordinaires qui contiennent un faisceau ordinaire donné* f *sont tous contenus dans un seul d'entre eux* F.

En effet, soit pour fixer les idées

$$| x, y, z, u, v, \ldots \quad ax, ay, cz, cu, ev, \ldots |$$

le forme canonique des substitutions de f, et soit f' un faisceau ordinaire qui contienne f. Les substitutions de f' étant échangeables à celles de f, seront de la forme

$$| x, y, z, u, v, \ldots \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z + \delta u, \gamma' z + \delta' u, \varepsilon v, \ldots | .$$

Donc f' sera contenu dans le groupe I formé par celles des substitutions de G qui sont de cette forme. Mais tout faisceau contenu dans I est réductible par rapport à λ s'il n'est pas contenu dans le faisceau F qui forme le noyau de I (N° 19 et 20).

25. Il résulte de cette proposition qu'en appelant *faisceaux généraux* les faisceaux ordinaires irréductibles par rapport à λ qui ne sont contenus dans aucun autre, chaque faisceau ordinaire f sera contenu dans un seul faisceau général F. On pourra donc répartir ces faisceaux en autant de *classes* qu'il y a de faisceaux généraux.

26. Lemme II. — *A chaque substitution non singulière du groupe* G *on peut faire correspondre un faisceau irréductible par rapport à* λ *et parfaitement déterminé.*

Soit pour fixer les idées

$$S = | x, y, z, u, v, \ldots \quad ax, ay, cz, cu, ev, \ldots |$$

la forme canonique de cette substitution. Les substitutions échangeables à S seront de la forme

$$| x, y, z, u, v, \ldots \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z + \delta u, \gamma' z + \delta' u, \varepsilon v, \ldots |$$

Soit I le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont de cette forme. Les faisceaux irréductibles par rapport à λ dont les substitutions sont échangeables à S et qui sont contenus dans G le seront dans I. Ils seront donc contenus dans un seul d'autre eux f, qui sera le noyau de I.

Nous dirons que S est *afférente* au faisceau f (lequel pourra, suivant les circonstances, être ordinaire ou singulier). On peut d'ailleurs définir f *le faisceau le plus général parmi ceux qui sont irréductibles et dont les substitutions sont échangeables à* S.

27. Réciproquement, soit f un faisceau ordinaire; les substitutions qui lui sont afférentes pourront être déterminées par la double condition: 1° D'être échangeables à celles de f, et par suite permutables au faisceau général F qui contient f (car ce faisceau F se déduit de f sans ambiguïté); 2° De n'être échangeables à celles d'aucun autre faisceau contenant f.

28. Il est maintenant aisé d'énumérer les substitutions de G:

1° Nous aurons d'abord les substitutions singulières, en nombre φ.

29. 2° En second lieu viendront les substitutions afférentes aux faisceaux généraux.

Soient F un de ces faisceaux, et

$$| \; x, y, z, u, \ldots \quad ax, ay, cz, cu, \ldots \; |$$

la forme canonique de ses substitutions. Celles des substitutions de G qui leur sont échangeables seront de la forme

$$| \; x, y, z, u, \ldots \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z + \delta u, \gamma' z + \delta' u, \ldots \; |$$

et formeront un groupe H, contenant évidemment Φ. Son ordre sera donc $p\varphi$, p étant un entier. Il contiendra donc $(p-1)\varphi$ substitutions non singulières, toutes afférentes à F, puisque F n'est contenu dans aucun faisceau irréductible plus général.

D'autre part, soit I le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à F; elles devront remplacer chacun des systèmes de variables x, y; z, u; ... que chaque substitution de F multiplie par un même facteur par des fonctions jouissant des mêmes propriétés, c'est à dire par des fonctions linéaires des variables d'un même système. I sera donc un groupe décomposable, d'ordre $kp\varphi$, k étant l'ordre du groupe formé par les déplacements que ses substitutions font éprouver aux systèmes et $p\varphi$ l'ordre du groupe H formé par celles des substitutions de I qui ne déplacent pas les systèmes. D'ailleurs le nombre total des systèmes ne peut surpasser le nombre n des variables; donc k est un diviseur de $1.2\ldots n$.

On pourra même obtenir dans certains cas une limite plus précise pour le nombre k, en remarquant que les substitutions de I ne pouvent permuter ensemble que les systèmes qui contiennent le même nombre de variables. Si donc nous avons α' systèmes de n' variables, α'' systèmes de n'' variables, etc., k sera un diviseur de $1.2..\alpha'.1.2..\alpha''\ldots$, nombre inférieur à $1.2..n$ sauf dans le cas où tous les systèmes n'auraient qu'une seule variable.

*

Cela posé, transformons le faisceau F par les Ω substitutions de G. Nous obtiendrons $\frac{\Omega}{kp\varphi}$ faisceaux transformés; à chacun d'eux seront afférentes $(p-1)\varphi$ substitutions, transformées de celles qui sont afférentes à F. Le nombre total des substitutions afférentes à F et à ses transformés sera donc

$$(p-1)\varphi \cdot \frac{\Omega}{kp\varphi} = \frac{p-1}{kp}\Omega .$$

30. S'il existe un autre faisceau général F_1, différent de F et de ses transformés, on trouvera de même que le nombre total des substitutions afférentes à F_1 et à ses transformés sera $\frac{p_1-1}{k_1 p_1}\Omega$.

Continuant ainsi, on aura pour le nombre total des substitutions afférentes à des faisceaux généraux une expression de la forme

$$\Sigma \frac{p-1}{kp}\Omega$$

où les quantités p sont des entiers, et les quantités k des diviseurs de $1.2..n$.

31. 3° Passons aux substitutions afférentes à des faisceaux ordinaires non généraux.

Soient f un de ces faisceaux; s une des substitutions qui lui sont afférentes (s'il en existe); F le faisceau général qui contient f; $1, S, S', \dots$ les $p\varphi$ substitutions de G qui sont échangeables à celles de F.

Les $p\varphi$ substitutions $s, sS, sS', \dots$ seront afférentes à f. En effet, f, et en général tous les faisceaux qui contiennent f, étant contenus dans F, leurs substitutions sont échangeables à $S, S', \dots$ Mais f est de tous ces faisceaux le seul dont les substitutions sont échangeables à s. (Si non s ne lui serait par afférente). Donc il est le seul dont les substitutions soient échangeables à $s, sS, sS', \dots$

Si en dehors de ces substitutions, il en existe une autre s' afférente à f, on voit de même que les $p\varphi$ substitutions $s', s'S, s'S', \dots$ le sont. Continuant ainsi, on voit que le nombre des substitutions afférentes à f est de la forme $rp\varphi$, r étant un entier (lequel pourrait être nul).

Soit d'autre part δ l'ordre du groupe K formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à f. Les transformés de f par les substitutions de G seront en nombre $\frac{\Omega}{\delta}$; le nombre total des substitutions afférentes à f et à ses transformés sera donc $rp\varphi\,\frac{\Omega}{\delta}$.

Mais le faisceau F se déduisant sans ambiguïté du faisceau f, toute substitution permutable à f le sera à F. Donc le groupe K sera contenu dans le groupe I d'ordre $kp\varphi$ formé des substitutions permutables à F; et son ordre δ divisera $kp\varphi$. On aura donc

$$rp\varphi\,\frac{\Omega}{\delta} = \frac{l}{k}\Omega ,$$

l désignant un entier.

32. Tout faisceau ordinaire non général autre que f et ses transformés, donnera un résultat analogue. Le nombre total des substitutions de G afférentes à de semblables faisceaux sera donc de la forme

$$\Sigma \frac{l}{k} \Omega .$$

33. 4° Il reste à énumérer les substitutions non singulières, mais afférentes au faisceau singulier. Soit S l'une d'elles. Considérons le système σ formé par les substitutions

$$S, aS, bS, \ldots$$

$a, b \ldots$ désignant respectivement celles des substitutions du faisceau singulier qui multiplient toutes les variables par a, par b, etc. Chacune des substitutions de σ, étant échangeable aux mêmes substitutions que S, sera afférente au même faisceau Φ.

Soient $\sigma, \sigma_1, \ldots$ les systèmes distincts que l'on obtient en transformant σ par les substitutions de G. Leur nombre sera $\frac{\Omega}{q}$, q étant le nombre des substitutions permutables à σ. D'ailleurs il est clair que deux de ces systèmes ne peuvent avoir de substitutions communes sans se confondre entièrement. Le nombre total des substitutions contenues dans $\sigma, \sigma_1, \ldots$ sera donc $\varphi \cdot \frac{\Omega}{q}$.

Reste à évaluer q.

34. Pour qu'une substitution soit permutable à σ, il faut et il suffit évidemment qu'elle transforme S en une substitution de σ. Soient r le nombre des substitutions de σ dans lesquelles S peut être transformée par les substitutions de G; t le nombre des substitutions de G qui sont échangeables à S; on aura $q = rt$.

Mais pour que S puisse être transformé en aS, il faut que ces substitutions aient le même déterminant; d'ailleurs si Δ est le déterminant de S, celui de aS sera $a^n \Delta$. Il faut donc qu'on ait $a^n = 1$. Le nombre r des valeurs distinctes qui peuvent être assignées à a sera donc $\overline{\overline{<}} n$.

Reste à évaluer t.

35. Supposons S ramenée à sa forme canonique

$$| x, y, z, u, \ldots \quad ax, ay, cz, cu, \ldots | .$$

Celles des substitutions de G qui lui sont échangeables seront de la forme

$$| x, y, z, u, \ldots \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z + \delta u, \gamma' z + \delta' u, \ldots |$$

et formeront un groupe décomposable, dont les substitutions ne permutent pas les systèmes $x, y; z, u; \ldots$, et qui aura pour noyau Φ (S étant supposée afférente à ce

dernier faisceau). L'ordre t de ce groupe sera donc égal à $\mu\varphi$, μ étant un entier qui ne surpasse pas la limite μ_n trouvée pour les groupes décomposables (Nos 10 à 21).

On aura donc

$$\varphi\frac{\Omega}{q} = \varphi\frac{\Omega}{rt} \overline{\overline{<}} \varphi\frac{\Omega}{n\mu_n\varphi} = \frac{\Omega}{v}$$

v étant un entier qui ne surpasse pas $n\mu_n$.

36. S'il existe quelque autre substitution S' non singulière, mais afférente au faisceau singulier, on continuera l'énumération de la même manière, et l'on trouvera ainsi pour le nombre total de ces substitutions une expression de la forme

$$\Sigma\frac{\Omega}{v}$$

(les nombres v étant $\overline{\overline{<}}\, n\mu_n$).

37. L'énumération étant maintenant complète, nous n'aurons plus qu'à égaler le nombre des substitutions que nous avons trouvées au nombre total Ω des substitutions de G, ce qui nous donnera l'équation fondamentale

$$\Omega = \varphi + \Omega\left\{\Sigma\frac{p-1}{kp} + \Sigma\frac{l}{k} + \Sigma\frac{1}{v}\right\}. \tag{5}$$

Discutons cette égalité.

38. On voit tout d'abord que les termes qui figurent dans les sommes du second membre sont en nombre limité. Car les entiers k et v étant limités et $\frac{p-1}{kp}$ étant $\overline{\overline{>}}\, \frac{1}{2k}$ la valeur de chaque terme a une limite inférieure aisée à déterminer. D'autre part, la somme de ces termes doit être <1 pour que l'égalité puisse subsister.

39. Posons pour abréger

$$1 - \Sigma\frac{1}{k} - \Sigma\frac{l}{k} - \Sigma\frac{1}{v} = -\mathrm{C},$$

C sera une fraction à numérateur et dénominateur limités, et l'équation (5) pourra s'écrire

$$\frac{\Omega}{\varphi} = \frac{1}{-\mathrm{C} + \Sigma\frac{1}{kp}} = \frac{1}{-\mathrm{C} + \frac{1}{kp} + \frac{1}{k_1 p_1} + \dots + \frac{1}{k_i p_i}}.$$

Supposons les quantités $\frac{1}{kp}$, $\frac{1}{k_1 p_1}$, ... rangées par ordre de grandeur croissante; la quantité

$$-\mathrm{C} + \frac{1}{k_1 p_1} + \dots + \frac{1}{k_i p_i} = -\mathrm{D}$$

sera négative.

En effet, si elle était nulle ou positive, on aurait

$$\frac{\Omega}{\varphi} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\frac{1}{kp}} \quad \text{d'où} \quad \Omega \overline{\overline{<}} kp\varphi .$$

Mais G contient un groupe décomposable I d'ordre $kp\varphi$ (N° 29). Son ordre Ω est donc un multiple de $kp\varphi$, supérieur à $kp\varphi$, car G étant indécomposable ne peut se confondre avec I.

D'autre part, $\frac{\Omega}{\varphi}$ étant positif, on aura

$$-C+\frac{1}{kp}+\frac{1}{k_1 p_1}+\ldots+\frac{1}{k_i p_i}>0 \tag{6}$$

et *a fortiori*

$$-C+i\frac{1}{k_i p_i}>0$$

d'où

$$p_i<\frac{i}{Ck_i}.$$

Le nombre des valeurs distinctes qu'on peut assigner à l'entier p_i sera limité par cette inégalité.

Posons

$$-C+\frac{1}{k_i p_i}=-C',$$

C′ sera une fraction positive, à numérateur et dénominateur limités.

L'équation (6) deviendra

$$-C'+\frac{1}{kp}+\frac{1}{k_1 p_1}+\ldots+\frac{1}{k_{i-1} p_{i-1}}>0$$

et donnera *a fortiori*

$$-C'+\frac{i-1}{k_{i-1} p_{i-1}}>0$$

inégalité qui limitera p_{i-1}.

Continuant ainsi, on verra successivement que p_i, p_{i-1}, ..., p_1 sont limités, et que D est une fraction positive $\frac{a}{b}$ à numérateur et dénominateur limités.

40. Cela posé, on aura

$$\frac{\Omega}{\varphi}=\frac{1}{-\frac{a}{b}+\frac{1}{kp}}$$

d'où

$$\Omega=\frac{b\,.\,kp\varphi}{-akp+b}.$$

D'ailleurs Ω est un multiple de $kp\varphi$, supérieur à $kp\varphi$. Donc $\frac{b}{akp - b}$ sera un entier au moins égal à 2; on aura donc

$$akp - b > 0 \overline{\overline{<}} \frac{1}{2} b$$

d'où

$$p > \frac{b}{ak} \overline{\overline{<}} \frac{3b}{2ak}.$$

Donc p sera lui-même limité, et par suite $\frac{\Omega}{\varphi}$ le sera.

41. Soit L la limite supérieure trouvée pour $\frac{\Omega}{\varphi}$. On satisfera aux conditions du théorème en prenant Φ pour noyau de G et en posant $\lambda_n = \mu_n = L$.

En effet, Φ est irréductible par rapport à un nombre quelconque, et notamment par rapport à λ_n. Les substitutions de G sont permutables à Φ, et son ordre ne surpasse pas $L\varphi$. Reste à montrer que tout faisceau autre que Φ contenu dans G est réductible par rapport à $\lambda_n = L$.

42. Soient F un de ces faisceaux,

$$| x, y, z, u, \ldots \quad ax, ay, cz, du, \ldots |$$

la forme canonique de ses substitutions, v le nombre des valeurs qu'y prend le rapport $\frac{c}{a}$; l'ordre de F sera $v\omega$, ω étant l'ordre du faisceau F' formé par celles de ses substitutions où $c = a$. Ce faisceau F' contient Φ; donc ω est un multiple de φ. Mais d'autre part, F étant contenu dans G, son ordre est $\overline{\overline{<}} L\varphi$. On aura donc

$$L\varphi \overline{\overline{>}} v\omega \overline{\overline{>}} v\varphi \quad , \quad \text{d'où} \quad v \overline{\overline{<}} L$$

ce qui montre que F est réductible.

43. La relation $\Omega \overline{\overline{<}} L\varphi$, où L est limité, montre que les groupes indécomposables à n variables rentrent dans un nombre limité de types distincts.

Quant aux groupes décomposables, il sera facile de les construire lorsque on aura formé le tableau des groupes de moins de n variables.

Chapitre II.

Groupes à quatre variables.

§ 1.

44. Proposons-nous d'appliquer les principes généraux qui viennent d'être exposés à la détermination des groupes à quatre variables.

La première question à résoudre sera de déterminer avec précision la valeur du nombre λ_n pour les groupes où le nombre n des variables est <4.

Pour les groupes à une variable, on a évidemment $\lambda_1 = 1$.

45. Pour les groupes décomposables à deux variables, on aura $\lambda_2 \overline{\gtrless} 2$. En effet pour les groupes décomposables à n variables, on a vu (N° 13) qu'on peut prendre pour λ_n le plus grand des nombres $n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$.

46. Quant aux groupes indécomposables à 2 variables, M. Klein a montré qu'ils se ramènent à trois types (type tétraédrique, octaédrique et icosaédrique) ayant respectivement pour ordre 12φ, 24φ, 60φ et ayant pour isomorphes *) les groupes formés par les déplacements qui superposent à lui-même le tétraèdre, l'octaèdre ou l'icosaèdre régulier. La correspondance a lieu de telle sorte qu'aux φ substitutions singulières du groupe donné G correspond dans son isomorphe g la substitution 1.

Soient F un faisceau ordinaire quelconque contenu dans G ; f le groupe des substitutions correspondantes dans g ; ω l'ordre de f ; celui de F sera $\omega\varphi$. D'ailleurs les substitutions de F étant échangeables entre elles, celles de f le seront. Mais on voit immédiatement que dans le groupe g des déplacements qui superposent à lui-même un polyèdre régulier il n'y a d'autres déplacements échangeables entre eux que ceux qui résultent de la répétition d'une même rotation, dont l'ordre est $\overline{\gtrless} 5$. On aura donc $\omega \overline{\gtrless} 5$.

Cela posé, soit

$$| \; x, y \quad ax, by \; |$$

la forme générale des substitutions de F ; l'ordre de F sera évidemment égal à $\lambda\varphi$, λ étant le nombre des valeurs distinctes du rapport $\frac{b}{a}$. On aura donc

$$\lambda\varphi = \omega\varphi \quad , \quad \text{d'où} \quad \lambda = \omega \overline{\gtrless} 5 .$$

Si donc on pose $\lambda_2 = 5$, F sera certainement réductible par rapport à λ_2.

47. Passons aux groupes à trois variables.

Pour les groupes décomposables, on pourra prendre pour λ_3 le plus grand des nombres n, λ_1, λ_2. Ici $n = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \overline{\gtrless} 5$. On pourra donc prendre $\lambda_3 = 5$.

*) Un groupe g est dit *isomorphe* à un groupe G si à chaque substitution de G correspond une substitution de g, de telle sorte qu'au produit de deux substitutions corresponde le produit de leurs correspondantes.

48. Quant aux groupes indécomposables, M. Jordan en signale quatre types dans son Mémoire.

Le premier (type de l'icosaèdre régulier) a pour ordre 60φ. Il a pour isomorphe le groupe g des déplacements qui superposent à lui-même l'icosaèdre. On voit comme au N° 46 qu'on pourra poser $\lambda_3 = 5$.

49. Le second type (type hessien) a pour ordre 24.9φ. Un groupe G appartenant à ce type contient le groupe H d'ordre 27 dérivé des substitutions

$$\theta = | x, y, z \quad \theta x, \theta y, \theta z |$$

$$A = | x, y, z \quad x, \theta y, \theta^2 z |$$

$$B = | x, y, z \quad y, z, x | .$$

Les substitutions de G sont permutables à H. L'une quelconque d'entre elles S transforme A et B en $\theta^\rho A^\alpha B^\beta$ et $\theta^\sigma A^\gamma B^\delta$, les entiers α, β, γ, δ satisfaisant à la relation $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$ mod 3. On peut lui faire correspondre une substitution s de la forme

$$| \xi, \eta \quad \alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta | \text{ mod. } 3. \qquad (7)$$

L'ensemble des substitutions correspondantes à celles de G forme un groupe g d'ordre 24, isomorphe à G, et contenant toutes celles des substitutions de la forme (7) dont le déterminant est congru à 1 mod. 3. A la substitution unité, du groupe g, correspondent dans G les 9φ substitutions de la forme $mA^p B^q$, où m désigne l'une quelconque des substitutions du faisceau singulier Φ, et p, q des entiers égaux à 0, 1 ou 2 (mod. 3).

Enfin, les substitutions A et B sont échangeables à θ, et satisfont à la relation

$$AB = \theta BA .$$

50. Ces préliminaires étant admis, nous allons démontrer que tout faisceau ordinaire F contenu dans G est réductible par rapport à 4.

Supposons d'abord que F contienne une substitution de la forme $mA^p B^q$ où p et q ne soient pas nuls à la fois. On sait que G contient une substitution linéaire T qui transforme A en $A^p B^q$. Le faisceau F', transformé de F par T^{-1}, contiendra la substitution mA. D'ailleurs deux faisceaux transformés l'un de l'autre, ayant même forme canonique, sont en même temps réductibles ou irréductibles. Il suffira donc de montrer que F' est réductible.

51. Or F' contient mA; il contient d'ailleurs la substitution singulière m; donc il contient A. Soit S une autre de ses substitutions ; elle est échangeable à A. Donc elle transformera B en une substitution de la forme $\theta^\sigma A^\gamma B$ (en vertu de la relation $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$ du N° 49). S^3 transformera donc B en $(\theta^\sigma A^\gamma)^3 B = \theta^{3\sigma} A^{3\gamma} B = B$. Donc elle sera échangeable à la fois à A et à B. Or les seules substitutions qui jouissent de cette propriété sont celles de Φ. Donc S^3 appartient à ce faisceau.

Cela posé, supposons les substitutions de F' ramenées simultanément à la forme canonique

$$| x, y, z \quad ax, by, cz | .$$

Le cube de chacune d'elles appartenant à Φ, on aura $a^3=b^3=c^3$. Donc a, b, c ne diffèrent que par des puissances de θ. Les rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ ne pourront donc avoir chacun plus de trois valeurs distinctes. Donc F' sera réductible par rapport à 3.

52. Admettons en second lieu que F ne contienne aucune substitution de la forme $mA^p B^q$ en dehors de celles où $p=q=0$.

Les substitutions correspondantes de g formeront un faisceau f de substitutions échangeables entre elles. A la substitution 1 contenue dans ce faisceau f correspondront celles des substitutions de F qui sont de la forme $mA^p B^q$, lesquelles se réduiront par hypothèse aux substitutions singulières m. L'ordre de F sera donc $\omega\varphi$, si l'ordre de f est ω.

Mais on sait que le groupe g est isomorphe au groupe g' formé par les substitutions entre 4 lettres. Au faisceau f d'ordre ω contenu dans g correspondra un faisceau f' d'ordre ω contenu dans g' et dont les substitutions seront échangeables entre elles. Or on vérifie immédiatement que g' ne contient aucun faisceau de substitutions échangeables entre elles et dont l'ordre surpasse 4. Donc ω ne pourra surpasser 4; et F, ayant pour ordre $\omega\varphi$, sera réductible par rapport à 4.

53. Les deux derniers types de groupes indécomposables signalés par M. Jordan sont contenus dans le groupe hessien. Les faisceaux qu'ils peuvent contenir seront donc contenus dans ceux du groupe hessien. Ceux-ci étant réductibles par rapport à 4, comme on vient de le voir, les autres le seront *a fortiori*.

54. La limite supérieure de λ_3 serait donc égale à 5, s'il n'existait dans le groupe linéaire à trois variables d'autres groupes finis et indécomposables que ceux reconnus par M. Jordan. Mais son énumération est incomplète, ainsi que nous allons le voir, par suite d'une inadvertance commise dans la discussion de l'équation fondamentale qu'il a établie pour le cas de 3 variables.

Parmi les solutions de cette équation se trouve la suivante (page 167, ligne 21)

$$\alpha=3 \quad , \quad \beta=3 \quad , \quad p=7 \quad , \quad \Omega=\frac{\varphi}{1-\frac{p-1}{3p}-\frac{\alpha}{8}-\frac{\beta}{9}}=24.7\varphi .$$

M. Jordan la rejette comme absurde, par ce motif que Ω devrait être divisible par 9φ, ce qui n'a pas lieu.

Cette assertion serait exacte, si le terme $\frac{\beta}{9}$ provenait de la sommation de plusieurs termes ayant chacun 9 en dénominateur; leur existence prouverait en effet que le groupe cherché G contient un groupe d'ordre 9φ. Mais le terme $\frac{\beta}{9}$ peut être produit par

*

un terme $\frac{1}{3}$ dont le numérateur et le dénominateur auraient été multipliés par 3 pour le réduire en neuvièmes. Dans ce cas tout ce qu'on peut dire, c'est que Ω doit être divisible par 3φ, ce qui a lieu effectivement.

Cette solution ne doit donc pas être rejetée *a priori*, mais doit être discutée, concurremment avec les 47 autres qui forment le tableau de la page 169.

55. Procédons à cette discussion.

Ω contient un faisceau F d'ordre 7φ, auquel 3.7φ de ses substitutions sont permutables. Il contiendra donc 8 faisceaux semblables à F. Les permutations que ses substitutions font subir à ces 8 faisceaux formeront un groupe g isomorphe à G et d'ordre $8.7.3$.

Le seul groupe de 8 lettres qui soit de cet ordre est, comme on sait, celui qui est formé des substitutions

$$\left| t \quad \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta} \right|$$

où t admet les 8 valeurs ∞, 0, 1, 2, . . ., 6 mod. 7 et où $\alpha\delta-\beta\gamma$ est résidu quadratique de 7.

Ses substitutions dérivent des trois suivantes

$$a=|\, t \quad t+1 \,| = (0123456) \qquad (8)$$

$$b=|\, t \quad 2t \,| = (124)(365) \qquad (9)$$

$$c=\left| t \quad \frac{-1}{t} \right| = (0\infty)(23)(45)(16)\,. \qquad (10)$$

56. Les substitutions de G correspondantes à a ne diffèrent les unes des autres que par un facteur constant; d'ailleurs leur puissance 7^e, ayant pour correspondante l'unité, est une substitution du faisceau singulier Φ; ces substitutions seront donc de la forme

$$A=|\, x, y, z \quad mx, m\tau y, m\tau^{\alpha} z \,|$$

où τ est une racine 7^e de l'unité, et α un exposant qui reste à déterminer.

57. Les substitutions correspondantes à la substitution ternaire b, étant permutables au faisceau dérivé des substitutions A, permuteront à des facteurs constants près les variables x, y, z; et comme leur cube appartient à Φ, elles les permuteront circulairement. Soit

$$|\, x, y, z \quad \lambda y, \mu z, \nu x \,|$$

l'une d'elles. On pourra évidemment la ramener à la forme plus simple

$$B=|\, x, y, z \quad ny, nz, nx \,| \qquad (11)$$

en prenant pour variables des multiples convenables des variables primitives. Les autres substitutions correspondantes à b seront également de la forme B et ne différeront de la précédente que par la valeur du coefficient n.

Cela posé, les substitutions a, b satisfaisant à la relation $ab = ba^2$, les substitutions correspondantes AB et BA^2 ne pourront différer que par un facteur constant.

Or on a

$$AB = | \; x , y , z \quad nm\tau y , nm\tau^{\alpha} z , nmx \; |$$

$$BA^2 = | \; x , y , z \quad m^2 ny , m^2\tau^2 nz , m^2\tau^{2\alpha} nx \; | .$$

On aura donc

$$\frac{m^2 n}{nm\tau} = \frac{m^2\tau^2 n}{nm\tau^{\alpha}} = \frac{m^2\tau^{2\alpha} n}{nm}$$

d'où

$$1 = \tau^{3-\alpha} = \tau^{2\alpha+1} \quad , \quad \alpha \equiv 3 \text{ mod. } 7 .$$

On aura par suite, en écrivant $m\tau$ à la place de m

$$A = | \; x , y , z \quad m\tau x , m\tau^2 y , m\tau^4 z \; | . \tag{12}$$

58. Cherchons enfin la forme des substitutions correspondantes à c. Soit

$$C = \begin{vmatrix} x & \alpha x + \beta y + \gamma z \\ y & \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z & \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{vmatrix}$$

l'une d'elles. On a $bc = cb^2$. Donc BC et CB^2 seront identiques à un facteur constant près.

Mais on a à un facteur constant près

$$BC = \begin{vmatrix} x & \alpha y + \beta z + \gamma x \\ y & \alpha' y + \beta' z + \gamma' x \\ z & \alpha'' y + \beta'' z + \gamma'' x \end{vmatrix} , \qquad CB^2 = \begin{vmatrix} x & \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \\ y & \alpha x + \beta y + \gamma z \\ z & \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \end{vmatrix} .$$

On aura donc, θ désignant un facteur constant

$$\begin{array}{lll} \alpha'' = \gamma\theta & \beta'' = \alpha\theta & \gamma'' = \beta\theta \\ \alpha = \gamma'\theta & \beta = \alpha'\theta & \gamma = \beta'\theta \\ \alpha' = \gamma''\theta & \beta' = \alpha''\theta & \gamma' = \beta''\theta \end{array}$$

d'où

$$C = \begin{vmatrix} x & \alpha x + \gamma''\theta^2 y + \beta'\theta z \\ y & \gamma''\theta x + \beta' y + \alpha\theta^2 z \\ z & \beta'\theta^2 x + \alpha\theta y + \gamma'' z \end{vmatrix} .$$

On déduit d'ailleurs des équations précédentes

$$\alpha\theta^3 = \alpha\ ,\ \beta\theta^3 = \beta\ ,\ \gamma\theta^3 = \gamma\ ,\ \text{etc.},$$

d'aù $\theta^3 = 1$, α , β , γ , . . . ne pouvant être nuls à la fois.

On peut même supposer $\theta = 1$. En effet, transformons le groupe G par la substitution

$$\left|\ x\ ,\ y\ ,\ z \qquad x\ ,\ \theta y\ ,\ \theta^2 z\ \right| .$$

La transformation n'altérera pas les substitutions A. Les substitutions B seront multipliées par le facteur constant θ^2 et conserveront ainsi leur forme générale. Enfin C sera transformée en

$$\left|\begin{matrix} x & \alpha x + \gamma'' y + \beta z \\ y & \gamma'' x + \beta y + \alpha z \\ z & \beta' x + \alpha y + \gamma'' z \end{matrix}\right| .$$

Le groupe G peut donc être transformé en un groupe analogue où θ est remplacé par l'unité.

59. Supposons donc $\theta = 1$, et achevons de déterminer la substitution C. La substitution $ac = (06\infty)(135)$ est d'ordre 3. Or d'après le théorème de M. Sylow, les groupes d'ordre 3 que renferme g sont les transformés par les substitutions de g d'un seul d'entre eux, tel que celui que forment les puissances de b. Donc ac est la transformée (par une substitution de g) d'une puissance de b. Donc AC sera la transformée par une substitution de G d'une puissance d'une des substitutions B qui correspondent à b. Or dans ces dernières substitutions, la somme des racines de l'équation caractéristique est évidemment nulle. La transformée

$$\mathrm{AC} = \left|\begin{matrix} x & \alpha m\tau x + \gamma'' m\tau^2 y + \beta' m\tau^4 z \\ y & \gamma'' m\tau x + \beta' m\tau^2 y + \alpha m\tau^4 z \\ z & \beta' m\tau x + \alpha m\tau^2 y + \gamma'' m\tau^4 z \end{matrix}\right|$$

jouira de la même propriété ; d'où l'équation de condition

$$\alpha\tau + \beta'\tau^2 + \gamma''\tau^4 = 0\ .$$

La substitution $a^{-1}c$ étant également d'ordre 3, on obtiendra en changeant τ en τ^{-1} une seconde équation de condition

$$\alpha\tau^{-1} + \beta'\tau^{-2} + \gamma''\tau^{-4} = 0\ .$$

Soit enfin $\alpha+\beta'+\gamma''=-p$. On aura

$$C=p\left|\begin{array}{ll} x & ax+c''y+b'z \\ y & c''x+b'y+az \\ z & b'x+ay+c''z \end{array}\right|=pC_1, \tag{13}$$

a, b', c'' étant déterminés par le système des trois équations

$$\begin{aligned} a\tau+b'\tau^2+c''\tau^4&=0\\ a\tau^{-1}+b'\tau^{-2}+c''\tau^{-4}&=0\\ a+b'+c''&=-1. \end{aligned}$$

Le groupe cherché résultera de la combinaison de substitutions de cette forme avec les substitutions précédemment trouvées

$$\begin{aligned} B&=n\,|\,x, y, z \quad y, z, x\,|=nB_1\\ A&=m\,|\,x, y, z \quad \tau x, \tau^2 y, \tau^4 z\,|=mA_1. \end{aligned}$$

60. M. Klein a montré que les substitutions A_1, B_1, C_1 forment un groupe G_1, d'ordre 168. On le vérifierait aisément en montrant qu'on a les relations

$$\begin{aligned} &A^7_1=1, \quad B^3_1=1, \quad A_1B_1=B_1A^2_1\\ &C^2_1=1, \quad C_1B_1C_1=B^2_1, \quad C_1A^\rho C_1=A_1{}^\mu C_1B^\nu{}_1A^\pi{}_1 \end{aligned}$$

ρ étant un entier quelconque et μ, ν, π des entiers convenablement choisis pour chaque valeur de ρ. On conclut en effet de ces relations: 1° que toute substitution dérivée de A_1, B_1, C_1 peut être mise sous une forme telle que le nombre des facteurs C_1 qui y figurent ne surpasse pas l'unité; 2° que celles où C_1 ne figure pas se réduisent à la forme $B_1{}^\nu A_1{}^\pi$ (où ν varie de 0 à 2 et π de 0 à 6) et sont ainsi au nombre de 3.7; 3° que celles qui contiennent un facteur C_1 se réduisent à la forme $A_1{}^\mu C_1 B_1{}^\nu A_1{}^\pi$ (où ν varie de 0 à 2, μ et π de 0 a 6) et sont au nombre de 7.3.7. On aura donc bien en tout 24.7 substitutions.

61. Le groupe G contiendra le groupe G_1 et résultera de sa combinaison avec les substitutions de Φ.

En effet, G contenant des substitutions de chacune des formes mA_1, nB_1, pC_1, contiendra la substitution

$$(nB_1)^{-1}(pC_1)^{-1}nB_1 . pC_1=B_1 .$$

Il contiendra en outre les transformées de B_1 par les substitutions dérivées de mA_1, nB_1, pC_1, ou, ce qui revient au même, par les substitutions dérivées de A_1, B_1, C_1.

Ces transformées, combinées entre elles, reproduiront tout le groupe G_1, car ce groupe, étant isomorphe au groupe g, qui est simple, sera lui-même simple.

Donc G contient bien G_1, et résultera de la combinaison de ses substitutions avec les substitutions singulières m, n, p.

62. Pour clore cette discussion, il faut encore s'assurer qu'il n'existe aucun groupe linéaire indécomposable d'ordre fini plus général que le groupe G d'ordre 24.7φ que nous venons de déterminer, et dont les substitutions lui soient permutables.

Soit H un semblable groupe; $q.24.7\varphi$ son ordre (q étant > 1). Ses substitutions étant permutables à G, permuteront les uns dans les autres les 8 faisceaux d'ordre 7φ que contient G, et que les substitutions de G permutaient déjà transitivement entre eux.

Le nombre des substitutions de H permutables à l'un F de ces faisceaux sera évidemment $\frac{q.24.7\varphi}{8} = 21q\varphi$.

La considération du faisceau F et des substitutions qui lui sont permutables fournira à la somme Σ un terme $\frac{p-1}{kp}$ dont le dénominateur sera $21q$.

Or si l'on se reporte au tableau donné par M. Jordan (pages 169 et 170 de son mémoire) on voit que les seules solutions où Σ contienne un terme de cette forme sont celles qui portent les N° XX, XXVIII, XLIII, XLIV.

Les solutions XX et XLIII doivent être rejetées *a priori*, car la valeur qu'elles donnent pour Ω n'est pas divisible par 24.7φ.

63. Restent les solutions XXVIII et XLIV qui donnent toutes deux $\Omega = 72.7\varphi$ d'où $q = 3$. Dans ce cas H contiendrait encore 8 faisceaux d'ordre 7φ, dérivés, l'un des substitutions de la forme mA_1, les autres de leurs transformées. Les déplacements de ces 8 faisceaux par les substitutions de H formeraient un groupe h isomorphe à H, et contenant g, dont l'ordre est 24.7. L'ordre de h devant être divisible par celui de g et diviser d'autre part 72.7 sera égal a 72.7 où à 24.7.

Or il n'existe aucun groupe de 8 lettres et d'ordre 72.7. Donc l'ordre de h sera seulement 24.7. Donc le nombre des substitutions de H permutables aux 8 faisceaux à la fois sera $\frac{72.7\varphi}{24.7} = 3\varphi$. Ces 3φ substitutions formeront évidemment un groupe K permutable à toutes les substitutions de H. Soit S une substitution de K qui n'appartienne pas à Φ. En la combinant avec Φ on obtiendra un faisceau F de substitutions échangeables entre elles. L'ordre de ce faisceau sera $> \varphi$ et divisera 3φ. Il sera donc égal à 3φ. Donc F se confond avec K.

Les substitutions de K sont donc toutes échangeables entre elles, et pourront être ramenées simultanément à la forme canonique. Celles de H, étant permutables au faisceau K, formeront un groupe décomposable ; ce qui contredit l'hypothèse d'après laquelle H serait indécomposable.

Le groupe G de M. Klein est donc le seul qu'il faille ajouter à ceux que M. Jordan a énumérés.

64. Il est aisé de voir que pour ce groupe on a $\lambda_3 = 7$. Pour l'établir, il suffira de

montrer que le groupe g qui lui est isomorphe ne contient aucun faisceau f de substitutions échangeables entre elles, et dont l'ordre surpasse 7 (N° 46).

Or g, formé des substitutions

$$\left| t \quad \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \right| \text{ mod. } 7 \,,$$

où $\alpha\delta - \beta\gamma =$ résidu quadratique de 7 est isomorphe au groupe g' formé des substitutions à deux variables

$$\left| \begin{matrix} \xi & \alpha\xi + \beta\eta \\ \eta & \gamma\xi + \delta\eta \end{matrix} \right| \text{ mod. } 7 \,,$$

où $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et de telle sorte qu'à la substitution 1 de g correspondent dans g' les deux substitutions ± 1. Mais les faisceaux de substitutions échangeables entre elles contenus dans g' sont réductibles comme on sait à l'une des trois formes suivantes

$$F_1 = | \xi , \eta \quad a\xi , a^{-1}\eta | \quad a \text{ réel}$$

$$F_2 = | \xi , \eta \quad a^\rho (\xi + \rho\eta) , a^\rho \eta | \quad (a^2 = 1) \,,$$

on enfin

$$F_3 = | \Xi , H \quad \alpha\Xi , \alpha^7 H | \,,$$

où Ξ, H sont deux variables imaginaires conjuguées, et α une imaginaire telle que l'on ait $\alpha^8 \equiv 1$ mod 7.

Le faisceau F_1 contient 6 substitutions; F_2 en contient 14, qu'on obtient en posant $a = \pm 1$, $\rho = 0 , 1 , 2 , \ldots , 6$; F_3 en contient 8. Chacun de ces faisceaux F_1, F_2, F_3 contient d'ailleurs les deux substitutions ± 1. Les faisceaux correspondants dans g contiendront donc respectivement 3, 7 et 4 substitutions.

Nous pouvons donc énoncer comme résultat de cette analyse, la proposition suivante:

Pour les groupes indécomposables à 3 variables, le nombre λ_3 ne peut être supérieur à 7.

§ 2.

65. Pour déterminer les groupes indécomposables à 4 variables nous aurons à discuter l'équation fondamentale

$$\Omega = \varphi + \Omega \left\{ \Sigma \frac{p-1}{kp} + \Sigma \frac{l}{k} + \Sigma \frac{1}{v} \right\} .$$

Chaque terme $\frac{p-1}{kp}$ de la premiére somme résulte de l'énumération des substitutions afférentes aux faisceaux transformés d'un faisceau F, irréductible par rapport à 7, et tel que le groupe H, formé par les substitutions de G qui sont échangeables à celles de F, soit d'ordre $p\varphi$, et que le groupe I formé par les substitutions de G qui sont permutables à F soit d'ordre $kp\varphi$ (N° 29 et 30).

66. Les substitutions de F étant d'ailleurs ramenées à la forme canonique, réunissons dans un même système celles des variables que toutes ces substitutions multiplient par un même facteur. Supposons que nous ayons ainsi α' systèmes contenant n' variables, α'' contenant n'' variables etc. On aura

$$\alpha' n' + \alpha'' n'' + \ldots = 4 ,$$

et k sera un diviseur de $1 . 2 . . \alpha' . 1 . 2 . . \alpha'' . . .$ (N° 29).

Cette formule montre que k ne pourra surpasser 2 à moins qu'on n'ait

$$\alpha' = 4 , n' = 1 , \alpha'' = \ldots = 0 .$$

67. Si donc k surpasse 2, chaque système ne pourra contenir qu'une seule variable, et les substitutions de F auront pour forme générale

$$| x , y , z , u \quad ax , by , cz , du | , \tag{14}$$

où chacun des rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, . . . est susceptible de plusieurs valeurs.

Les substitutions de H, devant être échangeables à toutes celles de F, seront nécessairement de cette même forme ; donc H se confondra avec F, et ce dernier faisceau aura pour ordre $p\varphi$.

Enfin, les substitutions de I, étant permutables à F, appartiendront nécessairement à l'une des 24 formes suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} | x , y , z , u \quad ax , by , cz , du | \\ | x , y , z , u \quad ay , bx , cz , du | \\ | x , y , z , u \quad ay , bz , cx , du | \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{array}\right\} \tag{15}$$

qui se déduisent de la première en permutant dans son second membre les quatre variables x, y, z, u.

Si d'ailleurs I contient une substitution S appartenant à l'une de ces formes, il en contiendra évidemment $p\varphi$, qui s'obtiendront en multipliant successivement S par les $p\varphi$ substitutions de F.

Nous allons étudier successivement ce qui a lieu lorsque k est égal à 24, à 12, à 8 ou à 6.

68. *Premier cas*: $k = 24$.

I contiendra des substitutions de chacune des 24 formes (15).

Soit

$$| x , y , z , u \quad ax , by , cz , du |$$

une substitution de F, que nous désignerons pour abréger par S_{abcd}. F contiendra les 24 substitutions S_{abcd}, S_{bacd}, S_{bcda}, . . transformées de celle-là par les substitutions de I.

69. Cela posé, soit F_1 le faisceau formé par celles des substitutions de F où $a = b = c$. Soit ρ le nombre des valeurs que prend dans ses substitutions le rapport $\frac{d}{a}$. Ces valeurs seront les diverses puissances d'une même quantité θ, racine primitive de l'équation $\theta^\rho = 1$ (N° 3). F_1 contiendra donc une substitution $S_{m,m,m,m\theta}$, où ce rapport est égal à θ, et résultera de la combinaison des puissances de cette substitution avec les φ substitutions du faisceau singulier. Son ordre sera évidemment $\rho\varphi$.

Quant à F il contiendra, outre la substitution $S_{m,m,m,m\theta}$, ses transformées par les substitutions de 1, parmi lesquelles se trouvent les suivantes, $S_{m,m,m\theta,m}$, $S_{m,m\theta,m,m}$. Ces substitutions, combinées entre elles et avec les substitutions singulières, formeront évidemment un groupe d'ordre $\rho^3\varphi$. Donc l'ordre $p\varphi$ de F sera un multiple de $\rho^3\varphi$.

70. D'autre part, cet ordre est un diviseur de $16\rho^3\varphi$, ainsi que nous allons le montrer.

Soit S_{abcd} l'une quelconque des substitutions de F. Ce faisceau contiendra ses transformées S_{bacd}, S_{bcad}, . . . Il contiendra donc la substitution

$$S_{abcd}\, S_{bcad}\, S_{cabd} = | \; x, y, z, u \quad abcx, abcy, abcz, d^3 u \; | .$$

Cette substitution appartenant évidemment à F_1, on aura

$$\frac{d^3}{abc} = \text{une puissance de } \theta ,$$

et puisque F contient outre la substitution S_{abcd} les suivantes S_{bdca}, S_{acdb}, S_{adbc}, on aura de même

$$\frac{a^3}{bcd} = \text{une puissance de } \theta$$

$$\frac{b^3}{acd} = \text{une puissance de } \theta$$

$$\frac{c^3}{abd} = \text{une puissance de } \theta .$$

Divisant membre à membre les égalités ci-dessus, on voit que les quantités a^4, b^4, c^4, d^4 seront entre elles comme des puissances de θ. Donc a, b, c, d seront entre aux comme des puissances de τ, τ étant une racine primitive de l'équation $\tau^{4\rho} = 1$.

Toutes les substitutions de F seront donc de la forme suivante

$$| \; x, y, z, u \quad ax, a\tau^\beta y, a\tau^\gamma z, a\tau^\delta u \; | .$$

71. Cela posé, l'ordre de F sera égal à $k'\omega_2$, k' désignant le nombre des valeurs distinctes par rapport au module 4ρ que prend l'exposant β dans ses substitutions (lequel nombre est évidemment un diviseur de 4ρ) et ω_2 l'ordre du groupe F_2 formé par celles de ses substitutions qui sont de la forme

$$| \; x, y, z, u \quad ax, ay, a\tau^\gamma z, a\tau^\delta u \; | .$$

*

D'autre part ω_2 est évidemment égal à $k''\omega_1$, k'' désignant le nombre de valeurs distinctes mod. 4ρ que prend l'exposant γ dans les substitutions de F_2, lequel nombre est un diviseur de 4ρ, et ω_1 l'ordre du groupe F_1 formé par celles des substitutions de F_2 où $\gamma = 0$. On a d'ailleurs par hypothèse $\omega_1 = \rho\varphi$ et par suite $p\varphi = k'k''\rho\varphi =$ un diviseur de $16\rho^3\varphi$.

72. Nous pouvons donc énoncer cette proposition :

Si $\mathrm{k} = 24$, *le nombre* p *sera de la forme* $\delta\rho^3$, δ *étant un entier qui divise* 16.

73. Deux cas seront à distinguer ici, suivant que ρ sera ou non > 7.

1° Si $\rho > 7$, le faisceau F_1 sera irréductible. Le faisceau F_2, contenant les deux substitutions $S_{m,m,m,m\theta}$ et $S_{m,m,m\theta,m}$ le sera évidemment aussi. Enfin le faisceau F_3 formé des substitutions où $a = b$, $c = d$, sera également irréductible, car il contient la substitution $S_{m^2,m^2,m^2\theta,m^2\theta}$, produit des deux précédentes.

Proposons-nous d'évaluer les termes de la somme $\Sigma \frac{l}{k}$ qui proviennent de la considération des substitutions afférentes à ces trois faisceaux. Pour obtenir le terme correspondant à chacun d'eux, il faudra évaluer le nombre des substitutions qui lui sont afférentes, et le diviser par le nombre des substitutions qui lui sont permutables. Les unes et les autres doivent d'ailleurs être exclusivement cherchées parmi les substitutions de I (N° 31).

74. Considérons d'abord le faisceau F_1. Celles des substitutions de I qui lui sont permutables sont évidemment les $6p\varphi$ substitutions appartenant aux 6 formes suivantes :

$$| x, y, z, u \quad ax, by, cz, du | \tag{16}$$

$$| x, y, z, u \quad ay, bx, cz, du | \tag{17}$$

$$| x, y, z, u \quad az, by, cx, du | \tag{18}$$

$$| x, y, z, u \quad ax, bz, cy, du | \tag{19}$$

$$| x, y, z, u \quad ay, bz, cx, du | \tag{20}$$

$$| x, y, z, u \quad az, bx, cy, du | . \tag{21}$$

Toutes ces substitutions sont d'ailleurs échangeables aux substitutions de F_1. Pour obtenir celles qui lui sont afférentes, il faut en retrancher toutes celles qui sont échangeables aux substitutions d'un faisceau irréductible plus général que F_1.

On devra donc retrancher : 1° Les substitutions (16) qui sont échangeables à celles de F ; 2° les substitutions (17) qui le sont à celles de F_2 ; 3° Les substitutions (18) et (19) respectivement échangeables aux substitutions de la forme

$$| x, y, z, u \quad ax, by, az, du |$$

$$| x, y, z, u \quad ax, by, bz, du | .$$

Car les faisceaux F_2', F_2'' formés par ces dernières substitutions contiennent F_1 ; ils

sont d'ailleurs irréductibles, car ce sont les transformés du faisceau irréductible F_i par les substitutions de I. Il ne restera donc comme afférentes à F_1 que les $2p\varphi$ substitutions (20) et (21). Le terme de la somme $\Sigma \frac{l}{k}$ qui provient du faisceau F_1 sera donc $\frac{2p\varphi}{6p\varphi} = \frac{1}{3}$.

75. Passons au faisceau F_2.

Les substitutions qui lui sont permutables sont les $4p\varphi$ substitutions suivantes :

$$| x, y, z, u \quad ax, by, cz, du | \tag{22}$$

$$| x, y, z, u \quad ay, bx, cz, du | \tag{23}$$

$$| x, y, z, u \quad ax, by, cu, dz | \tag{24}$$

$$| x, y, z, u \quad ay, bc, cu, dz | . \tag{25}$$

Les substitutions (22) et (23) sont échangeables à celles de F_2. Mais il faut en retrancher les substitutions (22) afférentes à F. Reste comme afférentes à F_2 les $p\varphi$ substitutions (23). F_2 fournira donc à la somme $\Sigma \frac{l}{k}$ le terme

$$\frac{p\varphi}{4p\varphi} = \frac{1}{4} .$$

76. Considérons enfin le faisceau F_3. Il est permutable aux $8p\varphi$ substitutions qui résultent de la combinaison des suivantes :

$$| x, y, z, u \quad ax, by, cz, du | \tag{26}$$

$$| x, y, z, u \quad ay, bx, cz, du | \tag{27}$$

$$| x, y, z, u \quad ax, by, cu, dz | \tag{28}$$

$$| x, y, z, u \quad ay, bx, cu, dz | , \tag{29}$$

avec les substitutions

$$| x, y, z, u \quad az, bu, cx, dy | . \tag{30}$$

Ses substitutions sont échangeables aux substitutions (26), (27), (28), (29). Mais les substitutions (26), (27), (28) doivent être rejetées comme respectivement afférentes à F_1 à F_2 et au faisceau F_2''' transformé de F_2 et formé des substitutions

$$| x, y, z, u \quad ax, by, cz, cu | .$$

Restent les $p\varphi$ substitutions (29). Donc F_3 fournira à la somme le terme

$$\frac{p\varphi}{8p\varphi} = \frac{1}{8} .$$

77. La somme des termes de l'équation fondamentale obtenus par la considération du faisceau général F et des faisceaux F_1, F_2, F_3 qui y sont contenus sera donc

$$\frac{p-1}{24p}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{p-1}{24p}+\frac{17}{24}=\frac{3}{4}-\frac{1}{24\delta\rho^3}.$$

78. 2° Si $\rho \overline{\gtrless} 7$, F_1 sera réductible, et F_2, F_3 pourront l'être également. Les considérations précédentes cesseront donc d'être applicables. Mais le dénominateur du terme $\frac{p-1}{24p}=\frac{\delta\rho^3-1}{24\delta\rho^3}$ sera limité et divisera dans tous les cas $2^{13}.\ 3^4.\ 5^3.\ 7^3$.

79. *Deuxième cas* : $k=12$

I contiendra les $12p\varphi$ substitutions

$$|\ x, y, z, u \quad ax, by, cz, du\ |$$

$$|\ x, y, z, u \quad ay, bz, cx, du\ |$$

. . . .

qui s'obtiennent en effectuant sur les variables x, y, z, u, dans les seconds membres des substitutions de F les diverses substitutions du groupe alterné.

Si F contient une substitution S_{abcd}, il contiendra ses transformées par les substitutions de I, lesquelles se déduisent de S_{abcd} en effectuant sur les coefficients a, b, c, d les diverses substitutions du groupe alterné.

80. On verra comme aux N^os 69 à 72 que si $\rho_1\varphi$ désigne l'ordre du faisceau F_1 formé par celles des substitutions de F où $a=b=c$, p sera de la forme $\delta_1\rho^3_{\ 1}$, où δ_1 est diviseur de 16.

81. Supposons d'abord $\rho>7$.

On verra comme au N° 73 que les faisceaux F_1, F_2, F_3 sont irréductibles.

Proposons-nous d'évaluer les termes qu'ils fournissent à la somme $\Sigma\frac{l}{k}$.

1.° F_1 sera permutable aux $3p\varphi$ substitutions des formes (16), (20) et (21). D'autre part toutes ces substitutions sont échangeables à celles de F_1. Mais les substitutions (16) afférentes à F doivent être rejetées. Il reste comme afférentes à F_1 les $2p\varphi$ substitutions (20) et (21). F_1 fournira donc à la somme le terme $\frac{2p\varphi}{3p\varphi}=\frac{2}{3}$.

2.° F_2 sera permutable aux $2p\varphi$ substitutions (22) et (25). D'autre part les seules substitutions échangeables à celles de F_2 sont les substitutions (22). Mais elles sont afférentes à F. Donc F_2 ne fournira aucun terme à la somme.

3.° F_3 sera permutable aux $4p\varphi$ substitutions dérivées de la combinaison des substitutions (26), (29) et (30). Ses substitutions sont échangeables aux substitutions (26) et (29). Mais les substitutions (26) sont afférentes à F. Il reste comme afférentes à F_3 les $p\varphi$ substitutions (29). Donc F_3 fournira le terme $\frac{p\varphi}{4p\varphi}=\frac{1}{4}$.

L'ensemble des faisceaux F , F_1 , F_2 , F_3 fournira donc à l'équation fondamentale les termes

$$\frac{p-1}{12p}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{12\delta_1\rho^3_1}.$$

82. Soit au contraire $\rho<7$. Les dénominateur du terme $\frac{p-1}{12p}=\frac{\delta_1\rho^3_1-1}{12\delta_1\rho^3_1}$ sera limité, et divisera dans tous les cas $2^{12}.\ 3^4.\ 5^3.\ 7^3$.

83. *Troisième cas.* $k=8$.

Les substitutions de I seront des 8 formes suivantes :

$$|\ x,y,z,u \quad ax,by,cz,du\ | \qquad (31)$$

$$|\ x,y,z,u \quad ay,bx,cz,du\ | \qquad (32)$$

$$|\ x,y,z,u \quad ax,by,cu,dz\ | \qquad (33)$$

$$|\ x,y,z,u \quad ay,bx,cu,dz\ | \qquad (34)$$

$$|\ x,y,z,u \quad az,bu,cx,dy\ | \qquad (35)$$

$$|\ x,y,z,u \quad az,bu,cy,dx\ | \qquad (36)$$

$$|\ x,y,z,u \quad au,bz,cx,dy\ | \qquad (37)$$

$$|\ x,y,z,u \quad au,bz,cy,dx\ |\ . \qquad (38)$$

Et si F contient une substitution S_{abcd}, il contiendra ses transformées par les substitutions de I, lesquelles se déduisent de S_{abcd} en y opérant sur les coefficients a,b,c,d les huit substitutions dérivées des suivantes (ab) , (cd) , (ac) , (bd).

Soit F_2 le faisceau formé par celles des substitutions de F où $a=b$. Deux cas seront à distinguer, suivant qu'il est irréductible ou non.

84. Si F_2 est irréductible, cherchons le terme qu'il fournira à la somme $\Sigma\frac{l}{k}$.

Les substitutions permutables à F_2 seront celles des formes (31) , (32) , (33) , (34) en nombre $4p\varphi$. Les substitutions (31) , (32) sont échangeables à celles de F_2. Excluant les substitutions (31) échangeables à celles de F, il restera comme afférentes à F_2 les $p\varphi$ substitutions (32). F_2 fournira donc le terme $\frac{p\varphi}{4p\varphi}=\frac{1}{4}$.

85. Supposons en second lieu que F_2 soit réductible, mais que le faisceau F_3 formé de celles des substitutions de F dans lesquelles $a=b$, $c=d$ soit irréductible. Cherchons le terme qu'il fournira.

Les $8p\varphi$ substitutions de I sont toutes permutables à F_3. Dans ce nombre, les substitutions (31) , (32) , (33) , (34) sont échangeables à celles de F_3. On doit exclure les substitutions (31) échangeables à celles de F. Les substitutions (32) sont échangeables à celles de F_2, et les substitutions (33) à celles d'un de ses transformés. Mais ces faisceaux étant réductibles, par hypothèse, on doit conserver ces substitutions. On aura donc $3p\varphi$ substitutions afférentes à F_3 et ce faisceau fournira ainsi le terme $\frac{3}{8}$.

86. Dans les deux cas qui viennent d'être discutés, les faisceaux irréductibles contenus dans F fourniront donc à la somme $\Sigma \frac{l}{k}$ un contingent de termes au moins égal à $\frac{1}{4}$. D'ailleurs k étant égal à 8, chacun de ces termes sera un nombre entier de 8èmes. Leur somme sera donc de la forme $\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{8}$, ε étant un entier que nous nous abstiendrons de déterminer pour ne pas multiplier outre mesure le nombre des cas à discuter.

87. Supposons enfin que F_2 et F_3 soient tous deux réductibles.

Soit S_{abcd} une substitution quelconque de F. Ce faisceau contiendra ses transformées S_{bacd}, S_{abdc}, S_{badc}, S_{cdab}; et F_2 contiendra les substitutions

$$S_{abcd}\,S_{bacd} = S_{ab,ab,c^2,d^2}$$

$$S_{abdc}\,S_{badc} = S_{ab,ab,d^2,c^2}.$$

Ce faisceau étant réductible par hypothèse, on aura ou bien

$$\frac{ab}{c^2} = \text{puissance de } \theta\,,\quad \frac{ab}{d^2} = \text{puissance de } \theta \tag{39}$$

ou

$$\frac{d^2}{c^2} = \text{puissance de } \theta\,, \tag{40}$$

θ étant une racine d'une équation binôme dont le degré σ ne dépasse pas 7. D'ailleurs en divisant membre à membre les équations (39) on retombe sur l'équation (40). Donc cette dernière équation sera satisfaite dans tous les cas. On en déduit

$$\frac{d}{c} = \text{puissance de } \tau\,,$$

τ étant une racine de l'équation $\tau^{2\sigma} = 1$. D'ailleurs F contenant la substitution S_{cdba}, où les coefficients c, d sont remplacés par a, b, on aura également

$$\frac{b}{a} = \text{puissance de } \tau\,.$$

Le nombre k' des valeurs distinctes du rapport $\frac{b}{a}$ dans les substitutions de F sera donc un diviseur de 2σ; et l'ordre $p\varphi$ de F sera d'ailleurs égal à $k'\omega_2$, ω_2 désignant l'ordre de F_2. Mais d'autre part, soit

$$|\, x, y, z, u \quad a'x, a'y, c'z, d'u \,|$$

la forme générale des substitutions de F_2. Ce faisceau étant réductible, l'un au moins des trois rapports $\frac{c'}{a'}$, $\frac{d'}{a'}$, $\frac{d'}{c'}$ aura tout au plus sept valeurs distinctes. On aura donc

en désignant par θ' une racine d'une équation binôme dont le degré σ' est $\overline{\overline{<}}\, 7$

$$\frac{c'}{a'} = \text{puissance de } \theta' \tag{41}$$

ou

$$\frac{d'}{a'} = \text{puissance de } \theta' \tag{42}$$

ou enfin

$$\frac{d'}{c'} = \text{puissance de } \theta'. \tag{43}$$

Mais chaque substitution de F_2 a une transformée dans laquelle les coefficients c' et d' sont permutés, et cette transformée appartiendra encore à F_2. Si donc une des équations (41), (42) est satisfaite pour toutes les substitutions de F_2, l'autre le sera. et l'équation (43) qui s'en déduit par la division, aura également lieu. Cette dernière équation est donc nécessairement satisfaite.

Cela posé, ω_2 sera évidemment égal à $\sigma'\omega_3$, ω_3 étant l'ordre du faisceau F_3. Enfin. soit

$$| \, x, y, z, u \quad a''x, a''y, c''z, c''u \, |$$

la forme générale des substitutions de F_3. On aura $\omega_3 = \sigma''\varphi$, σ'' désignant le nombre de valeurs du rapport $\frac{c''}{a''}$, lequel nombre sera $\overline{\overline{<}}\, 7$, F_3 étant supposé réductible.

On aura donc ici

$$p\varphi = k'\sigma'\sigma''\varphi \quad , \quad \text{d'où} \quad p = k'\sigma'\sigma'',$$

k' étant un diviseur de 2σ, et $\sigma, \sigma', \sigma''$ des entiers $\overline{\overline{<}}\, 7$. Le dénominateur du terme $\frac{p-1}{8p}$ fourni par F à l'équation fondamentale sera donc un nombre limité, qui divisera le nombre $2^{10}. 3^3. 5^3. 7^3$.

88. *Quatrième cas:* $k = 6$.

Les substitutions de I seront des 6 formes suivantes:

$$| \, x, y, z, u \quad ax, by, cz, du \, | \tag{44}$$

$$| \, x, y, z, u \quad ay, bx, cz, du \, | \tag{45}$$

$$| \, x, y, z, u \quad ax, bz, cy, du \, | \tag{46}$$

$$| \, x, y, z, u \quad az, by, cx, du \, | \tag{47}$$

$$| \, x, y, z, u \quad ay, bz, cx, du \, | \tag{48}$$

$$| \, x, y, z, u \quad az, bx, cy, du \, |. \tag{49}$$

Si F contient une substitution S_{abcd}, il contiendra celles qui s'en déduisent par la permutation des coefficients a, b, c.

89. Supposons d'abord que le faisceau F_2, formé par celles des substitutions de F où $a=b$, soit irréductible. Cherchons quel terme il fournira à la somme $\Sigma \frac{l}{k}$.

Les substitutions (44) et (45), en nombre $2p\varphi$, sont en même temps permutables à F_2 et échangeables à ses substitutions. Excluant les substitutions (44), qui sont afférentes à F, il restera comme afférentes à F_2 les substitutions (45) en nombre $p\varphi$. Le terme fourni par F_2 sera donc $\frac{p\varphi}{2p\varphi} = \frac{1}{2}$.

90. Supposons en second lieu que F_2 soit réductible, mais que le faisceau F_1 formé par celles des substitutions de F où $a=b=c$ soit irréductible. Cherchons le terme qu'il fournira.

Les $6p\varphi$ substitutions (44) à (49) sont permutables à F_1, et de plus échangeables à chacune de ses substitutions. Excluant les substitutions (44) afférentes à F, il restera $5p\varphi$ substitutions afférentes à F_1. Le terme cherché sera donc $\frac{5}{6}$.

91. Dans les deux cas qui viennent d'être discutés, le contingent apporté à la somme $\Sigma \frac{l}{k}$ par les faisceaux irréductibles contenus dans F sera donc $\overline{\gtrless} \frac{1}{2}$. Il sera d'ailleurs de la forme $\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon'}{6}$, ε' étant un entier.

92. Supposons enfin que F_2 et F_1 soient tous deux réductibles.

Soit dans ce cas S_{abcd} une substitution quelconque de F. Ce faisceau contiendra les substitutions S_{bacd} etc. Donc F_2 contiendra les substitutions

$$S_{abcd}\,S_{bacd} = S_{ab,\,ab,\,c^2,\,d^2}$$
$$S_{acbd}\,S_{cabd} = S_{ac,\,ac,\,b^2,\,d^2}$$
$$S_{bcad}\,S_{cbad} = S_{bc,\,bc,\,a^2,\,d^2}.$$

Mais F_2 est réductible; donc en désignant par θ une racine d'une équation binôme dont le degré σ ne dépasse pas 7, on aura ou bien

$$\frac{ab}{c^2} = \text{puiss. de } \theta,\ \frac{ac}{b^2} = \text{puiss. de } \theta,\ \frac{bc}{a^2} = \text{puiss. de } \theta, \tag{50}$$

ou bien

$$\frac{ab}{d^2} = \text{puiss. de } \theta,\ \frac{ac}{d^2} = \text{puiss. de } \theta,\ \frac{bc}{d^2} = \text{puiss. de } \theta, \tag{51}$$

ou enfin

$$\frac{c^2}{d^2} = \text{puiss. de } \theta,\ \frac{b^2}{d^2} = \text{puiss. de } \theta,\ \frac{a^2}{d^2} = \text{puiss. de } \theta. \tag{52}$$

Si les équations (50) sont satisfaites, on en déduira en les divisant membre à membre

$$\frac{b^3}{a^3} = \text{puiss. de } \theta\ ,\ \frac{c^3}{a^3} = \text{puiss. de } \theta,$$

d'où

$$\frac{b}{a} = \text{puiss. de } \tau\ ,\ \frac{c}{a} = \text{puiss. de } \tau,$$

τ étant racine de l'équation $\tau^{3\sigma} = 1$.

Si les équations (52) sont satisfaites, on en déduira

$$\frac{b^2}{a^2} = \text{puiss. de } \theta\ ,\ \frac{c^2}{a^2} = \text{puiss. de } \theta,$$

d'où

$$\frac{b}{a} = \text{puiss. de } \tau\ ,\ \frac{c}{a} = \text{puiss. de } \tau,$$

τ étant ici une racine de l'équation $\tau^{2\sigma} = 1$.

Quant aux équations (51), elles sont inadmissibles ; car on en déduirait que $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ sont des puissances de θ ; et par suite F ne serait pas irréductible.

Les substitutions de F auront donc pour forme générale

$$|\ x, y, z, u \quad ax, a\tau^{\beta} y, a\tau^{\gamma} z, du\ |,$$

et l'ordre de F sera égal à $k'\omega$, k' étant le nombre des systèmes de valeurs que prennent β et γ dans ses substitutions et ω_1 l'ordre de F_1.

Si $\tau^{2\sigma} = 1$, chacun des exposants β, γ peut prendre au maximum 2σ valeurs distinctes ; donc k' sera un diviseur de $4\sigma^2$.

Si $\tau^{3\sigma} = 1$, l'exposant β pourra prendre au maximum 3σ valeurs distinctes. A chacune d'elles ne pourront correspondre plus de σ valeurs de γ. Car on a dans ce cas la relation

$$\frac{bc}{a^2} = \text{puiss. de } \theta = \text{puiss. de } \tau^3,$$

d'où

$$\tau^{\beta+\gamma} = \text{puiss. de } \tau^3 \quad,\quad \beta + \gamma \equiv 0 \text{ mod. } 3\ .$$

Donc k' sera un diviseur de $3\sigma^2$.

D'autre part, F_1 étant réductible, le nombre σ' des valeurs que le rapport $\frac{d}{a}$ prend dans ses substitutions ne peut surpasser 7 ; et l'on aura évidemment $\omega_1 = \sigma'\varphi$.

L'ordre $p\varphi$ du faisceau F sera donc un diviseur de $4\sigma^2\sigma'\varphi$ ou de $3\sigma^2\sigma'\varphi$, σ et σ' étant $\overline{\overline{>}}\ 7$. Le dénominateur du terme $\frac{p-1}{6p}$ fourni par le faisceau F à la somme $\Sigma\,\frac{p-1}{kp}$ sera donc limité, et divisera dans tous les cas le nombre $2^{10}.\ 3^5.\ 5^3.\ 7^3$.

93. Il résulte de l'analyse qui précède que la somme $\Sigma \frac{p-1}{kp} + \Sigma \frac{l}{k}$ est composée d'une suite de termes des espèces suivantes :

1° Des termes T de la forme $\frac{3}{4} - \frac{1}{24\delta\rho^3}$ où $\rho > 7$, $\delta =$ un diviseur de 16.

2° Des termes T_1 de la forme $1 - \frac{1}{12\delta_1\rho_1^3}$ où $\rho_1 > 7$, $\delta_1 =$ diviseur de 16.

3° Des termes T_2 de la forme

$$\frac{p-1}{8p} + \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{8}, \quad \text{où} \quad p > 7 \ (*).$$

4° Des termes T_3 de la forme

$$\frac{p_1-1}{6p_1} + \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{6}, \quad \text{où} \quad p_1 > 7.$$

5° Des termes T_4 de la forme

$$\frac{p_2-1}{kp_2}, \quad \text{où} \quad k \leqq 4, \quad \text{et} \quad p_2 > 7.$$

6° Enfin des termes U dont le dénominateur divise $2^{13}.3^5.5^3.7^3$ (**).

94. Le nombre des termes des espèces $T, T_1, \ldots, T_4$ ne pourra en aucun cas surpasser 4. Car d'après l'équation (5) la somme

$$\Sigma \frac{k-1}{kp} + \Sigma \frac{l}{k} \text{ doit être } < 1.$$

Mais tout terme de l'espèce T est plus grand que $\frac{3}{4} - \frac{1}{24.8} = \frac{143}{192}$. Tout terme T_1 est plus grand que $1 - \frac{1}{12.8} = \frac{190}{192}$. Tout terme T_2 est au moins égal à $\frac{7}{64} + \frac{1}{4} = \frac{69}{192}$; tout terme T_3 au moins égal à $\frac{7}{48} + \frac{1}{2} = \frac{124}{192}$; enfin tout terme T_4 au moins égal à $\frac{7}{32} = \frac{42}{192}$.

Si donc on désigne par $N, N_1, \ldots, N_4$ le nombre des termes de chacune des espèces $T, T_1, \ldots, T_4$, on aura l'équation de condition

$$148N + 190N_1 + 69N_2 + 124N_3 + 42N_4 < 192.$$

(*) Si p n'était pas >7, le faisceau F qui fournit ce terme ne serait pas irréductible.

(**) Parmi ces termes U figureraient les termes $\frac{l}{k}$ fournis par les substitutions afférentes aux faisceaux non généraux qui n'auraient pas été expressément considérés; le dénominateur k de ces termes diviserait 24.

Une discussion très-simple montre qu'elle admet les systèmes de solutions suivants (les variables non écrites étant nulles) :

$$\begin{aligned}
&N = 1 \quad , \quad N_4 = 1 \text{ ou } 0 \\
&N_1 = 1 \\
&N_2 = 2 \quad , \quad N_4 = 1 \text{ ou } 0 \\
&N_2 = 1 \quad , \quad N_4 = 2, 1, 0 \\
&N_3 = 1 \quad , \quad N_4 = 1, 0 \\
&N_4 = 4, 3, 2, 1, 0 .
\end{aligned} \tag{53}$$

On voit que dans aucun cas la somme $N + N_1 + \ldots + N_4$ ne surpasse 4.

§ 3.

95. Etudions enfin la somme $\Sigma \frac{1}{v}$ provenant de l'énumération des substitutions afférentes au faisceau singulier.

Soient S une de ces substitutions ; m, m', ... celles du faisceau singulier. On a vu (Nos 33 à 36) que S fournira à la somme $\Sigma \frac{1}{v}$ le terme $\frac{1}{rt}$, r désignant le nombre des substitutions de la suite S, mS, m'S dans lesquelles S peut être transformée (lequel nombre divisera 4, d'après le N° 34), et $t\varphi$ désignant l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de G qui sont échangeables à S.

Cherchons à évaluer le produit rt.

1° Supposons d'abord que S soit de la forme

$$S = | x, y, z, u \quad ax, by, cz, du | ,$$

a, b, c, d étant différents. Les substitutions échangeables à S seront de cette même forme et constitueront un faisceau F. Ce faisceau étant réductible, l'un des rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ etc., par exemple $\frac{b}{a}$, n'aura que σ valeurs distinctes dans ses substitutions, σ étant $\overline{\gtrless} 7$; et $t\varphi$ sera égal à $\sigma\omega_1$, ω_1 étant l'ordre du faisceau F_1 formé par celles des substitutions de F où $a = b$. D'ailleurs F_1 sera réductible (car s'il ne l'était pas, la substitution S qui est échangeable à ses substitutions, lui serait afférente, au lieu de l'être au faisceau singulier). Donc dans les substitutions de F_1, l'un des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{d}{c}$, par exemple $\frac{c}{a}$, n'aura que σ' valeurs distinctes, σ' étant $\overline{\gtrless} 7$. On aura évidemment $\omega_1 = \sigma'\omega_2$, ω_2 étant l'ordre du faisceau formé par celles des substitutions de F où $a = b = c$.

On verra de même que F_2 est réductible, et a pour ordre $\sigma''\omega_3$, ω_3 étant l'ordre du faisceau F_3 formé par celles des substitutions de F où $a = b = c = d$.

Ce faisceau F_3 n'étant autre que le faisceau singulier, on aura $\omega_3=\varphi$, et par suite $t=\sigma\sigma'\sigma''$. Donc $v=rt$ sera un diviseur de $4\sigma\sigma'\sigma''$, et par suite un diviseur de $2^8.3^3.5^3.7^3$.

96. 2° Supposons que S soit de la forme

$$| x, y, z, u \quad ax, ay, cz, du |.$$

Elle ne peut être transformée en mS que si les nombres a, b, c, d sont identiques à l'ordre près aux nombres ma, mb, mc, md. Il faut évidemment pour cela qu'on ait $m=1$. Donc $r=1$.

Soit d'autre part H le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont échangeables à S. Ses substitutions sont de la forme

$$| x, y, z, u \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta y, cz, du |.$$

Soit H′ le groupe formé par les substitutions partielles

$$| x, y \quad \alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y |.$$

Si H′ est indécomposable, son ordre sera égal à $\delta\varphi'$, δ désignant l'un des nombres 12, 24, 60, et φ' l'ordre du faisceau formé par celles de ses substitutions qui multiplient x et y par un même facteur. L'ordre $t\varphi$ de H sera donc égal à $\delta\omega$, ω étant l'ordre du faisceau F_1 formé par celles de ses substitutions qui sont de la forme

$$| x, y, z, u \quad ax, ay, cz, du |.$$

On verra d'ailleurs comme au N° 95 que F_1 est réductible et a pour ordre $\sigma'\sigma''\varphi$, σ' et σ'' étant $\overline{\gtrless}$ 7.

Donc v sera égal à $\delta\sigma'\sigma''$, et divisera $2^7. 3^3. 5^2. 7^2$.

97. Si H′ est décomposable, son ordre sera égal à 1 ou 2 fois l'ordre de son noyau, dont les substitutions peuvent être mises sous la forme canonique $| x, y \quad ax, by |$. L'ordre de H sera donc égal à ω ou à 2ω, ω étant l'ordre du faisceau F formé par les substitutions

$$| x, y, z, u \quad ax, by, cz, du |.$$

On voit comme au N° 95 que ω est égal à $\sigma\sigma'\sigma''\varphi$, $\sigma, \sigma', \sigma''$ ne surpassant pas 7. Donc v sera égal à $\sigma\sigma'\sigma''$ ou à $2\sigma\sigma'\sigma''$, et divisera $2^7. 3^3. 5^3. 7^3$.

98. 3° Supposons S de la forme

$$| x, y, z, u \quad ax, ay, cz, cu |.$$

Pour qu'elle puisse être transformée en mS, il faudra qu'on ait $a=am$, $c=cm$, d'où $m=1$, ou bien $a=cm$, $c=am$, d'où $m^2=1$. Donc $m^2=1$ dans tous les cas, et γ sera un diviseur de 2.

Cherchons d'autre part à déterminer t.

99. Le groupe H aura ses substitutions de la forme

$$|x, y, z, u \quad \alpha y + \beta y, \alpha' x + \beta' y, \gamma z + \delta u, \gamma' z + \delta' u| \ldots \qquad (54)$$

Si l'un des groupes H′ et H″ respectivement formés par les substitutions partielles

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y, \alpha' x + \beta' y|$$

$$|z, u \quad \gamma z + \delta u, \gamma' z + \delta' u|,$$

par exemple le groupe H′, est indécomposable, l'ordre $t\varphi$ de H sera égal à $\delta\omega$, δ étant égal à $12, 24$ ou 60, et ω étant l'ordre du groupe K formé par les substitutions de la forme

$$|x, y, z, u \quad ay, ay, \gamma_1 z + \delta_1 u, \gamma_1' z + \delta_1' u|.$$

100. Si le groupe H_1'' formé par les substitutions partielles

$$|z, u \quad \gamma_1 z + \delta_1 u, \gamma_1' z + \delta_1' u|$$

est indécomposable, on aura $\omega = \delta_1 \omega_1$, δ_1 étant égal à 12, 24 ou 60 et ω_1 désignant l'ordre du faisceau formé par les substitutions de la forme

$$|x, y, z, u \quad ax, ay, cz, cu|.$$

Ce faisceau étant réductible, son ordre ω_1 sera égal à $\sigma\varphi$, σ étant $\overline{\gtrless} 7$. Dans le cas que nous examinons, v sera donc un diviseur de $2\delta\delta_1\sigma$, et *a fortiori* un diviseur de $2^9 . 3^3 . 5^3 . 7$.

101. Si au contraire H_1'' est décomposable, son ordre sera ω_1 ou $2\omega_1$, ω_1 désignant l'ordre de son noyau, formé des substitutions

$$|z, u \quad cz, du|.$$

L'ordre ω de k sera donc égal à ω' ou à $2\omega'$, ω' étant l'ordre du faisceau F′ formé par les substitutions

$$|x, y, z, u \quad ax, ay, cz, du|.$$

On aura d'ailleurs (N° 95) $\omega' = \sigma'\sigma''\varphi$, σ' et σ'' étant $\overline{\gtrless} 7$. Donc v divisera $\delta . 2\sigma'\sigma''$, et *a fortiori* il divisera $2^8 . 3^3 . 5^3 . 7^2$.

102. Considérons enfin le cas où H′ et H″ seraient décomposables. L'ordre de H sera évidemment égal à ω ou à 2ω, ω étant l'ordre du groupe K formé par les substitutions

$$|x, y, z, u \quad ax, by, \gamma_1 z + \delta_1 u, \gamma_1' z + \delta_1' u|.$$

Le groupe H_1'' formé des substitutions partielles

$$| z , u \quad \gamma_1 z + \delta_1 u , \gamma_1' z + \delta_1' u | ,$$

étant contenu dans H'', qui est décomposable, le sera également, et aura pour ordre ω_1 ou $2\omega_1$, ω_1 étant l'ordre du faisceau formé par les substitutions

$$| z , u \quad cz , du | .$$

L'ordre de K sera donc ω' ou $2\omega'$, ω' désignant l'ordre du faisceau F formé des substitutions

$$| x , y , z , u \quad ax , by , cz , du | .$$

Enfin ω' sera égal à $\sigma\sigma'\sigma''\varphi$, $\sigma , \sigma' , \sigma''$ étant $\overline{\gtrless} 7$. Donc v sera un diviseur de $8\sigma\sigma'\sigma''$ et *a fortiori* un diviseur de $2^9 . 3^3 . 5^3 . 7^3$.

103. 4° Enfin supposons S de la forme

$$| x , y , z , u \quad ax , ay , az , du | .$$

On aura évidemment $r = 1$.

D'autre part, H aura ses substitutions de la forme

$$\left| \begin{array}{ll} x & \alpha x + \beta y + \gamma z \\ y & \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z & \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \\ u & du \end{array} \right| .$$

104. Si le groupe H' formé des substitutions partielles

$$| x , y , z \quad \alpha x + \beta y + \gamma z , \alpha' x + \beta' y + \gamma' z , \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z |$$

est indécomposable, son ordre sera égal à δ fois l'ordre de son noyau

$$| x , y , z \quad ax , ay , az |$$

δ étant égal à 60, à un diviseur de 24.9, ou à 168.

L'ordre $t\varphi$ de H sera $\delta\omega$, ω désignant l'ordre du faisceau F formé par les substitutions

$$| x , y , z , u \quad ax , ay , az , du | .$$

Enfin ω sera égal à $\sigma\varphi$, σ étant $\overline{\gtrless} 7$. On aura donc $v =$ un diviseur de $\delta\sigma$, et a fortiori un diviseur de $2^5 . 3^4 . 5^3 . 7^2$.

105. Si H′ est décomposable et a ses substitutions de la forme

$$| x , y , z \quad \alpha x + \beta y , \alpha' x + \beta' y , \gamma z |$$

les substitutions de H étant de la forme (53) on pourra déterminer son ordre comme aux N° 29 à 102, et l'on trouvera que v divise un des nombres $\delta\sigma\sigma'\sigma''$, ou $2\sigma\sigma'\sigma''$, δ étant égal à 12, 24 su 60, et $\sigma, \sigma', \sigma''$ ne surpassant pas 7. Dans tous les cas il divisera $2^7 . 3^3 . 5^3 . 7^3$.

106. Enfin, si H′ est décomposable de telle sorte que les variables y forment trois systèmes, son ordre sera un diviseur de $6\omega_1$, ω_1 étant l'ordre du faisceau formé par les substitutions

$$| x , y , z \quad ax , by , cz |$$

qui ne déplacent pas les systèmes. L'ordre $t\varphi$ de H divisera 6ω, ω étant l'ordre du faisceau F formé des substitutions

$$| x , y , z , u \quad ax , by , cz , du | .$$

D'ailleurs on aura $\omega = \sigma\sigma'\sigma''\varphi$, $\sigma, \sigma', \sigma''$ étant $\overline{\gtrless} 7$. Donc v divisera $6\sigma\sigma'\sigma''$, et *a fortiori* il divisera $2^7 . 3^4 . 5^3 . 7^3$.

107. Il résulte de cette discussion que les termes $\frac{1}{v}$ sont des fractions dont le dénominateur est dans tous les cas un diviseur de $2^{13} . 3^5 . 5^3 . 7^3$. Ils sont donc de même forme que les termes U fournis par la discussion de la somme $\Sigma \frac{p-1}{kp} + \Sigma \frac{l}{k}$ et pourront leur être associés.

L'équation fondamentale pour le cas de 4 variables prendra donc la forme suivante:

$$\Omega = \frac{\varphi}{1 - \Sigma T - \Sigma T_1 - \Sigma T_2 - \Sigma T_3 - \Sigma T_4 - U} ,$$

où U est une fraction dont le dénominateur divise $2^{13} . 3^5 . 5^3 . 7^3$ et où les termes $T, T_1, \ldots, T_4$ ont respectivement les formes indiquées au N° 92. D'ailleurs le nombre total de ces termes ne peut surpasser 4.

Il resterait à discuter cette équation par des procédés analogues à ceux employés par M. Jordan pour les groupes à 3 variables. Mais les calculs, déjà fort longs dans ce dernier cas, prendraient ici des proportions effrayantes, par suite de la grandeur du dénominateur de U.